

Analysis I: Tutorial Exercise Sheet 2

Exercise 01:

For each of the following sequences, give the first five terms:

من أجل كل متتالية من المتتاليات الآتية ، أعطي الحدود الخمسة الأولى:

(a) $\left\{ \frac{2n-1}{3n+2} \right\}_{n \geq 1}$ (b) $\left\{ \frac{1-(-1)^n}{n^3} \right\}_{n \geq 1}$ (c) $\left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right\}_{n \geq 1}$ (d) $\left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right\}_{n \geq 1}$

Exercise 02:

Show by induction that:

برهن بالتراجع ان:

1. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x > -1, (1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercise 03:

Show that the sequence $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ defined by: $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ is not convergent.

بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ: $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ليست متقاربة.

Exercise 04:

Let $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ and for any integer $n \geq 3$:

لتكن $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ ، ومن أجل كل عدد $n \geq 3$:

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Calculate u_n . Deduce that $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

احسب العبارة u_n . استنتج أن $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Exercise 05:

1. Prove that a convergent sequence is bounded.

برهن أن أي متتالية متقاربة تكون محدودة.

2. Using the definition of a sequence limit, show that:

باستعمال تعريف نهاية متتالية ، برهن أن:

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3}{2}$ (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0$ (3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ (4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-5n^2-3}{4n} = -\infty$

Exercise 06:

Let $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be an increasing sequence. Let (v_n) be the sequence defined for all $n \in \mathbb{N}^*$ by:

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

Demonstrate that the sequence (v_n) is increasing.

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متزايدة. (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$. برهن أن المتتالية (v_n) متزايدة.

Exercise 07:

Using theorems on limits, find each of the following limits:

باستعمال مبرهنات النهايات، أوجد كلا من مايلي:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 5n}{5n^2 + 2n - 6} \quad & \text{(b)} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad , \quad \text{(c)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \cdot 10^n}{5 + 3 \cdot 10^n} \\ \text{(d)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(2n^3 - 5)}{3n^3 + 2n^2 + 1} \quad & \text{(e)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{2n} - e^n + 1}{2e^n + 3} \quad \text{(f)} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^a e^{-bn} \quad (a > 0, b > 0) \end{aligned}$$

Exercise 08:

1. Using the squeeze theorem, demonstrate that the sequence $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converges to a limit l , determining it in each case ($[\cdot]$ denotes the floor function):

باستعمال مبدأ حصر متتالية (مبرهنة المتتاليات الثلاث)، بين أن المتتالية (U_n) تتقارب نحو نهاية l مع تعيينها:

$$\text{(a)} U_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \quad \text{(b)} U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

2. Let $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + |\cos k| \sqrt{k}}$, demonstrate that $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$.

لتكن $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + |\cos k| \sqrt{k}}$ ، برهن أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$.

Exercise 9:

Consider the sequence $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ defined by: $U_0 = 0$ and $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

1. Show that $0 \leq U_n < 2$ for all $n \in \mathbb{N}$.

بين أن $0 \leq U_n < 2$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

2. Deduce the monotonicity of $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

استنتج رتابة المتتالية (U_n) .

3. Consider the sequence $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ defined by $V_n = 2 - U_n$ for all $n \in \mathbb{N}$.

نعتبر المتتالية $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ $V_n = 2 - U_n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Determine the sign of $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

عين إشارة (V_n) .

- (b) Prove that, for every natural number n : $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$.

برهن أن $\frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

(c) Using proof by induction, demonstrate that $V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ for all $n \in \mathbb{N}^*$.

. باستعمال البرهان بالتراجع، بين أن $V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Deduce the limit of the sequence (V_n) and then the limit of (U_n) .

. استنتج نهاية المتتالية (V_n) ، ثم نهاية (U_n) .

Exercise 10:

Consider the sequence $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ defined by:
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n e^{-U_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Show that $U_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

. بين أن $U_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

2. Deduce the monotonicity of $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

. استنتج رتبة المتتالية (U_n) .

3. Deduce that (U_n) is convergent, then calculate its limit.

. استنتج أن (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

4. Let $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$. Demonstrate that $U_{n+1} = e^{-S_n}$ for all $n \in \mathbb{N}$.

. لتكن $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$. برهن أن $U_{n+1} = e^{-S_n}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

5. Conclude that $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

. استخلص أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Exercise 11:

Consider the sequence $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ defined by:
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{7U_n + 4}{3U_n + 3}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Show that $0 \leq U_n \leq 2$ for all $n \in \mathbb{N}$.

. بين أن $0 \leq U_n \leq 2$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

2. Study the monotonicity of (U_n) for $n \in \mathbb{N}$.

. ادرس رتبة المتتالية (U_n) .

3. Deduce that (U_n) is convergent and calculate its limit.

. استنتج أن (U_n) متقاربة وأحسب نهايتها.

4. Let $E = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; determine $\sup E$ and $\inf E$.

. لتكن $E = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ، عين $\sup E$ و $\inf E$.

Exercise 12:

Two real sequences $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ and $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ are defined as follows:

المتتالتان الحقيقيتان $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ معرفتان كمايلي:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} V_1 = 12 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Let $W_n = V_n - U_n$ for all $n \in \mathbb{N}^*$. Express the sequence (W_n) in terms of n and calculate its limit.

تكن $W_n = V_n - U_n$. عبر عن المتتالية (W_n) بدلالة n ثم أحسب نهايتها.

2. Show that the sequences (U_n) and (V_n) are adjacent.

بين أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

Exercise 13:

Using the Cauchy criterion, demonstrate that the sequence $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ is convergent and that $(V_n)_{n \geq 2}$ is divergent:

باستعمال معيار كوشي، بين أن المتتالية (U_n) متقاربة وأن المتتالية (V_n) متباعدة:

1. $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k)}{2^k}$ for all $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $V_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln(k)}$ for all $n \geq 2$.

Exercise 14: $\sqrt{2}$ and Sequence Convergence

1. Prove that if $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n} = L$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n+1} = L$, then (U_n) converges to L .

برهن أنه إذا كان $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n} = L$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n+1} = L$ فإن (U_n) متقاربة نحو L .

2. Given $U_1 = 1$ and $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+U_n}$, compute the first eight terms of (U_n) . Then use part (1) to show that

$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \sqrt{2}$. This gives the continued fraction expansion $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}$.

تعطى $U_1 = 1$ و $U_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+U_n}$. احسب القيم الثماني الأولى للمتتالية (U_n) . ثم استخدم الجزء (١) لإثبات أن $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \sqrt{2}$. هذا يعطي التمديد بصيغة الكسر المستمر.

Exercise 15: Fish Population Dynamics

The fish population p_n is modeled by $p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$ where $a, b > 0$ and $p_0 > 0$.

يمكن نمذجة أعداد الأسماك بـ

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n} \text{ حيث } a, b > 0 \text{ و } p_0 > 0.$$

1. Show that if (p_n) converges, then its limit is either 0 or $b - a$.

بين أنه إذا كانت (p_n) متقاربة، فإن نهايتها إما 0 أو $b - a$.

2. Show that $p_{n+1} < \frac{b}{a} p_n$.

برهن أن $p_{n+1} < \frac{b}{a} p_n$.

3. Use part (2) to show that if $a > b$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$.

استعمل الجزء (٢) لتبين أنه إذا كان $a > b$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$.