

Analysis I: Tutorial Exercise Sheet 1

Exercise 01:

Rewrite the sets S below using interval notation:

أعد كتابة المجموعات في الأسفل باستعمال ترميز المجالات :

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} : -x \leq 2\}$$

$$S_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 3\}$$

$$S_4 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$$

$$S_5 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}$$

$$S_6 = \{x \in \mathbb{R} : -x^3 \geq 3\}$$

Exercise 02

A) Show the following inequalities

(بين المتراجحات التالية) :

$$1. |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$2. \sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

$$3. |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

B) Let $[x]$ be the floor function of x

(لتكن $[x]$ دالة الجزء الصحيح لـ x :

- Find $[3.6], [\pi], [e], [-5.3], [-0.4], [8]$.

(أوجد ما يلي) :

- Demonstrate that for all $x, y \in \mathbb{R}$

(برهن أنه من أجل كل x, y ينتميان إلى $\mathbb{R}$:

$$1. [x + m] = [x] + m \text{ where } m \in \mathbb{Z}$$

$$2. x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$$

$$3. [x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$$

Exercise 03:

Let A et B de two subsets of $\mathbb{R}$ such that $B \subset A$. Show that:

لتكن A و B مجموعتين من $\mathbb{R}$ حيث $B \subset A$. بين أن:

- A is bounded $\Rightarrow B$ is bounded.

1. A محدودة $\Leftarrow B$ محدودة.

- $\inf(A) \leq \inf(B)$, and $\sup(A) \geq \sup(B)$.

2. $\inf(A) \leq \inf(B)$ ، و $\sup(A) \geq \sup(B)$.

Exercise 04:

Consider A as a subset of $\mathbb{R}$ equipped with the usual order. Determine, for each of the following sets: the set of upper bounds $Maj(A)$, the set of lower bounds $Min(A)$, the supremum $\sup(A)$, the infimum $\inf(A)$, the smallest element $\min(A)$, and the largest element $\max(A)$.

اعتبر A جزءاً من $\mathbb{R}$ مزوداً بالترتيب المعتاد. حدّد لكل مجموعة مما يلي: مجموعة الحدود العليا $Maj(A)$ ، مجموعة الحدود السفلى $Min(A)$ ، الحد الأعلى $\sup(A)$ ، الحد الأدنى $\inf(A)$ ، أصغر عنصر $\min(A)$ ، وأكبر عنصر $\max(A)$.

1. $A = [-\alpha, \alpha], [-\alpha, \alpha[,]-\alpha, \alpha[$ (where $\alpha > 0$), $E = \mathbb{R}$.
2. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$, $E = \mathbb{R}$.
3. $A = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, $E = \mathbb{R}$.

Exercise 05:

Let A be a non-empty and bounded subset of $\mathbb{R}$. We denote $B = \{|x - y|; (x, y) \in A^2\}$.

ليكن A جزءاً غير فارغاً ومحدوداً من $\mathbb{R}$. نرمز به $B = \{|x - y|; (x, y) \in A^2\}$.

1. Justify that B is bounded above.

برر أن B مجموعة محدودة من الأعلى.

2. We denote $\sup(B)$ as the supremum of the set B . Show that: $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

نرمز به $\sup(B)$ للحد الأعلى للمجموعة B . أثبت أن: $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercise 06:

Notation: $\mathcal{P}_B(\mathbb{R})$ denotes the set of bounded subsets of $\mathbb{R}$. Show that for all $A, B \in \mathcal{P}_B(\mathbb{R})$:

$\mathcal{P}_B(\mathbb{R})$ يمثل مجموعة المجموعات الجزئية المحدودة من $\mathbb{R}$. أثبت أنه لكل $A, B \in \mathcal{P}_B(\mathbb{R})$:

1. (a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
(b) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
2. If $A \cap B \neq \emptyset$, then: $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$
3. (a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
(b) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$. where $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$.

Exercise 07:

Using the characterization of the supremum and infimum, show that:

باستخدام مميزات الحد الأعلى والحد الأدنى، أثبت أن:

1. $\sup A = \frac{3}{2}$, $\inf A = 1$ for $A = \left\{\frac{3n+1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$
2. $\sup B = 2$, $\inf B = 0$ for $B = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Calculate $\max A$, $\min A$, $\max B$, $\min B$, $\max C$, $\min C$, $\max D$, $\min D$ if they exist.

احسب $\max A$ ، $\min A$ ، $\max B$ ، $\min B$ ، $\max C$ ، $\min C$ ، $\max D$ ، $\min D$ إذا وجدت.