
TD 1 : Existence, unicité, méthode de Picard, Peano, solutions globales, solutions maximales et continuation

Exercice 1

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2t(1 + x(t)), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

1. Écrire la formulation intégrale associée au problème de Cauchy.
2. Définir l'opérateur de Picard correspondant.
3. En prenant $x_0(t) = 0$, calculer les trois premières approximations de Picard x_1, x_2, x_3 .
4. Déterminer la forme générale des approximations successives.
5. Identifier la limite des approximations et comparer avec la solution exacte.

Exercice 2

On considère le problème

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 + x^2(t), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

sur le rectangle

$$R = [-1, 1] \times [-1, 1].$$

1. Vérifier que $f(t, x) = t^2 + x^2$ satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy–Lipschitz sur $\mathbb{R}$ et déterminer des constantes L et M convenables.
3. Donner un intervalle local sur lequel l'existence et l'unicité de la solution sont assurées.
2. Construire l'opérateur de Picard et calculer les deux premières approximations.

Exercice 3

On considère le problème

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de $f(t, x)$ et appliquer le théorème de Peano.
2. Vérifier que $x(t) \equiv 0$ est une solution.
3. Construire, pour $a \geq 0$, une famille de solutions distinctes du problème.
4. Conclure sur l'unicité et expliquer pourquoi le théorème de Cauchy–Lipschitz ne permet pas de l'obtenir.

Exercice 4

On considère

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = x(t) + \cos t, \\ x(0) = x_0, \end{cases}} \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $f(t, x)$ est globalement lipschitzienne par rapport à x .
2. Vérifier une condition de croissance linéaire pour f .
3. En déduire l'existence et l'unicité d'une solution globale.
4. Déterminer explicitement cette solution.

Exercice 5

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

1. Déterminer la solution du problème de Cauchy.
2. Déterminer l'intervalle maximal d'existence de cette solution.
3. Montrer que cette solution est maximale mais non globale.
4. Peut-on prolonger cette solution au-delà de son intervalle maximal ?

R de la matière : S. Bourourou