

Chapitre 1

Théorèmes d’existence et d’unicité

Master 1 – EDP et Applications
Équations différentielles ordinaires

Table des matières

Introduction	3
1 Le problème de Cauchy	3
1.1 Équation différentielle ordinaire	3
1.2 Solution classique	4
2 Théorème du point fixe de Banach-Picard	4
2.1 Démonstration	4
3 Condition de Lipschitz	5
3.1 Critère par dérivée	6
4 Théorème de Cauchy–Lipschitz	6
4.1 Version locale	6
5 Démonstration du Théorème de Cauchy–Lipschitz	7
6 Cas global	15
6.1 Du problème local au problème global	15
6.2 Que signifie “global” ?	16
6.3 Le principe de prolongement	16
6.4 Condition de croissance linéaire	16
6.5 Théorème d’existence globale	17
6.6 Interprétation du théorème	17
6.7 Cas particulier : f globalement lipschitzienne	18
6.8 Pourquoi la condition de croissance est-elle importante ?	18
6.9 À retenir	19

7	Théorème de Peano	19
7.1	Contre-exemple : absence d'unicité	21
8	Solutions maximales et continuation des solutions	22
8.1	Prolongement d'une solution	22
8.2	Solutions maximales	23
8.3	Existence d'une solution maximale	23
8.4	Continuation des solutions	24
8.5	Solutions globales	26
9	Exemples de solutions maximales et globales	28

Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité locale et globale des problèmes de Cauchy (c'est à dire une équation différentielle ordinaire pour laquelle on a donnée une condition initiale) sans connaître explicitement les solutions.

Nous n'aurons pas besoin de traiter les équations différentielles d'ordre n étant donné que l'on est capable de se ramener à l'ordre 1. Par conséquent, nous ne donnerons les résultats que pour les EDO d'ordre 1 ici, sous forme normale, autrement dit, du type

$$x' = f(t, x),$$

où x est la fonction inconnue de la variable réelle t dans un espace $\mathbb{R}^n$, et f sera une fonction donnée sur $I \times J$, ouvert, non vide de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. dans certains résultats on verra même que l'on peut prendre f définie de façon générale sur un ouvert non vide $U \in \mathbb{R}^{n+1}$. Nous verrons qu'il faut faire des hypothèses de régularité sur la fonction f afin d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité des solutions.

Trois questions sont fondamentales :

1. **Existence** : une solution existe-t-elle ?
2. **Unicité** : une solution passant par la donnée initiale est-elle unique ?
3. **Continuation** : sur quel intervalle peut-on prolonger cette solution ?

Le programme met particulièrement l'accent sur le théorème de Cauchy–Lipschitz, le théorème de Peano, la continuation des solutions et les solutions maximales. La preuve de Cauchy–Lipschitz sera organisée autour du théorème du point fixe de Banach.

1 Le problème de Cauchy

1.1 Équation différentielle ordinaire

Une équation différentielle ordinaire (EDO) relie une fonction inconnue d'une seule variable à ses dérivées. Une EDO d'ordre p s'écrit sous une forme générale

$$F(t, x, x', \dots, x^{(p)}) = 0.$$

Dans ce chapitre, nous nous concentrons principalement sur les EDO du premier ordre sous forme normale

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

Définition 1.1. (*Problème de Cauchy*)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Le problème de Cauchy associé à $(t_0, x_0) \in \Omega$ est

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Remarque 1.2. La donnée $x(t_0) = x_0$ sélectionne une trajectoire parmi la famille des solutions de l'équation différentielle.

1.2 Solution classique

Définition 1.3. Une fonction $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle contenant t_0 , est une solution du problème de Cauchy si

1. $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$;
2. $(t, x(t)) \in \Omega$ pour tout $t \in I$;
3. $x'(t) = f(t, x(t))$ pour tout $t \in I$;
4. $x(t_0) = x_0$.

Proposition 1.4. Supposons f continue. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}$, une fonction $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \text{ pour tout } t \in I.$$

2 Théorème du point fixe de Banach-Picard

Nous rappelons ici le théorème de point fixe de Banach-Picard

Définition 2.1. Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \rightarrow X$ est une contraction s'il existe $q \in [0, 1[$ tel que

$$d(Tx, Ty) \leq q d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Théorème 2.2 (Point fixe de Banach). Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \rightarrow X$ une contraction. Alors T possède un unique point fixe $x^* \in X$:

$$T(x^*) = x^*.$$

De plus, pour tout $x_0 \in X$, la suite

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

converge vers x^* .

2.1 Démonstration

On pose

$$x_{n+1} = T(x_n).$$

Alors

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq q d(x_n, x_{n-1}).$$

Par récurrence,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0).$$

Pour $m > n$,

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{m-1} q^k.$$

Ainsi

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Le membre de droite tend vers 0, donc (x_n) est une suite de Cauchy. Comme X est complet, il existe $x^* \in X$ tel que

$$x_n \rightarrow x^*.$$

La contraction est continue, donc

$$T(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*.$$

Pour l'unicité, si y^* est un autre point fixe,

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq qd(x^*, y^*).$$

Comme $q < 1$, on obtient

$$d(x^*, y^*) = 0,$$

donc $x^* = y^*$.

La démonstration donne

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Cette estimation permet d'évaluer la vitesse de convergence des approximations successives.

Exercice 2.1. Soit $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$T(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}.$$

Montrer que T possède un unique point fixe et le déterminer.

Solution. Pour $x, y \in [0, 1]$,

$$|T(x) - T(y)| = \frac{1}{4}|x - y|.$$

Donc T est une contraction de constante $q = 1/4$. Le théorème de Banach donne un unique point fixe. Il vérifie

$$x = \frac{x}{4} + \frac{1}{2},$$

d'où

$$x = \frac{2}{3}.$$

3 Condition de Lipschitz

Définition 3.1. Soit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On dit que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait une condition de Lipschitz par rapport à x dans D s'il existe $L \geq 0$ tel que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

pour tous $(t, x), (t, y) \in D$.

Définition 3.2. On dit que f est localement lipschitzienne en x si, autour de chaque point (t_0, x_0) , il existe un voisinage sur lequel f satisfait une condition de Lipschitz en x .

3.1 Critère par dérivée

Proposition 3.3. *Supposons D convexe par rapport à la variable x et supposons que f soit de classe C^1 par rapport à x . Si*

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq L$$

sur D , alors f est lipschitzienne en x sur D avec constante L .

Démonstration. Pour x, y , on considère le segment

$$x_\theta = y + \theta(x - y), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

La formule de Taylor sous forme intégrale donne

$$f(t, x) - f(t, y) = \int_0^1 D_x f(t, x_\theta)(x - y) d\theta.$$

Donc

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \int_0^1 L \|x - y\| d\theta = L \|x - y\|.$$

□

Exemple 3.4. *La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ car $f'(x) = 2x$ n'est pas bornée. Elle est cependant localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

4 Théorème de Cauchy–Lipschitz

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}. \quad (1)$$

4.1 Version locale

Théorème 4.1 (Théorème de Cauchy–Lipschitz). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement lipschitzienne par rapport à x . Pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un intervalle $I = [t_0 - h, t_0 + h]$, ($h > 0$), contenant t_0 sur lequel le problème*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une solution unique. Si de plus, f est de classe C^k , $k \geq 1$ alors $x(\cdot)$ est de classe C^{k+1}

1. Passage de la formulation différentielle à la formulation intégrale

Supposons que x soit une solution du problème de Cauchy. On a alors, pour tout t appartenant à l'intervalle considéré,

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

En intégrant cette égalité entre t_0 et t , on obtient

$$\int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$\int_{t_0}^t x'(s) ds = x(t) - x(t_0).$$

Par conséquent,

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Comme la condition initiale donne

$$x(t_0) = x_0,$$

on obtient finalement

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Cette équation est appelée la **formulation intégrale** du problème de Cauchy.

5 Démonstration du Théorème de Cauchy–Lipschitz

La démonstration repose sur les six étapes suivantes :

Étape 1. Construire un voisinage rectangulaire de (t_0, x_0) contenu dans Ω ;

Étape 2. Définir un espace fonctionnel complet E ;

Étape 3. Montrer que l'opérateur de Picard T envoie E dans E et est contractant ;

Étape 4. Appliquer le théorème du point fixe de Banach ;

Étape 5. Revenir au problème différentiel ;

Étape 6. Unicité de la solution.

Étape 1 : Construction du rectangle local

Puisque Ω est un ouvert et $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que le rectangle fermé

$$R = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, b) \subset \Omega. \quad (2)$$

On choisit a et b suffisamment petits pour que cette inclusion soit satisfaite.

Comme f est continue sur le compact R , elle y est bornée. Il existe donc une constante $M \geq 0$ telle que

$$\|f(t, x)\| \leq M, \quad (t, x) \in R. \quad (3)$$

D'autre part, puisque f est localement lipschitzienne par rapport à x , on peut choisir le rectangle R de façon qu'il existe une constante $L \geq 0$ telle que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad (4)$$

pour tous $(t, x), (t, y) \in R$ ayant le même t .

Remarque 5.1. *La constante M contrôle la taille de f sur le rectangle, tandis que L contrôle sa variation par rapport à la variable x . Ces deux constantes sont les constantes essentielles dans la construction locale.*

Étape 2 : Choix de l'intervalle et définition de l'espace

On choisit $h > 0$ suffisamment petit pour que

$$h \leq a, \quad Mh \leq b, \quad Lh < 1. \quad (5)$$

Par exemple, lorsque $M > 0$ et $L > 0$, on peut prendre

$$0 < h < \min \left\{ a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L} \right\}. \quad (6)$$

Si $M = 0$ ou $L = 0$, les conditions correspondantes dans (5) sont automatiquement satisfaites.

On pose

$$I = [t_0 - h, t_0 + h]. \quad (7)$$

On considère l'ensemble

$$E = \{x \in C(I, \mathbb{R}^n) ; \|x(t) - x_0\| \leq b \text{ pour tout } t \in I\}. \quad (8)$$

On munit E de la norme uniforme

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in I} \|x(t)\|. \quad (9)$$

L'espace $C(I, \mathbb{R}^n)$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach. De plus, E est fermé dans $C(I, \mathbb{R}^n)$; par conséquent, E est lui-même un espace de Banach.

Étape 3 : définition de l'opérateur de Picard

La formulation intégrale obtenue précédemment est

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (10)$$

Elle suggère naturellement de définir l'opérateur de Picard

$$T : E \longrightarrow E \quad (2)$$

par

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (11)$$

Nous allons montrer successivement que

$$T(E) \subset E \quad \text{et} \quad T \text{ est contractant sur } E.$$

1. Montrons que T est bien défini et que $T(E) \subset E$. Soit $x \in E$. Alors, pour tout $s \in I$,

$$\|x(s) - x_0\| \leq b.$$

Ainsi,

$$(s, x(s)) \in R.$$

La fonction

$$s \longmapsto f(s, x(s))$$

est donc continue sur I , et l'intégrale dans (11) est bien définie.

Pour tout $t \in I$, en utilisant (3),

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \quad \text{si } t \geq t_0, \end{aligned}$$

et, dans tous les cas,

$$\|(Tx)(t) - x_0\| \leq \int_{\min(t, t_0)}^{\max(t, t_0)} \|f(s, x(s))\| ds. \quad (12)$$

Comme $\|f(s, x(s))\| \leq M$ et $|t - t_0| \leq h$,

$$\|(Tx)(t) - x_0\| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b. \quad (13)$$

Par conséquent,

$$Tx \in E.$$

On a donc bien

$$T(E) \subset E. \quad (14)$$

2. Montrons que T est contractant. Soient $x, y \in E$. Pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t) - (Ty)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \right\| \\ &\leq \int_{\min(t, t_0)}^{\max(t, t_0)} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds. \end{aligned}$$

Puisque $(s, x(s))$ et $(s, y(s))$ appartiennent à R , la condition de Lipschitz (4) donne

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t) - (Ty)(t)\| &\leq L \int_{\min(t, t_0)}^{\max(t, t_0)} \|x(s) - y(s)\| ds \\ &\leq L|t - t_0| \|x - y\|_\infty \\ &\leq Lh \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

En prenant le supremum par rapport à $t \in I$, on obtient

$$\|Tx - Ty\|_\infty \leq Lh \|x - y\|_\infty. \quad (15)$$

Or, par construction de h ,

$$Lh < 1.$$

En posant

$$q = Lh \in [0, 1), \quad (16)$$

on obtient

$$\|Tx - Ty\|_\infty \leq q \|x - y\|_\infty, \quad 0 \leq q < 1. \quad (17)$$

Ainsi, T est une contraction de l'espace métrique complet E dans lui-même.

Étape 4 : application du théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach affirme que toute contraction d'un espace métrique complet dans lui-même possède un unique point fixe.

Il existe donc un unique $x \in E$ tel que

$$Tx = x. \quad (18)$$

Par définition de T , cette égalité signifie que, pour tout $t \in I$,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (19)$$

Il reste à montrer que cette fonction est bien une solution du problème de Cauchy.

Étape 5 : retour à l'équation différentielle

Comme x est continue et que f est continue, la fonction

$$s \mapsto f(s, x(s))$$

est continue sur I .

Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$t \mapsto \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

est de classe C^1 et sa dérivée vaut

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right) = f(t, x(t)).$$

En dérivant (19), on obtient donc

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I. \quad (20)$$

D'autre part, en prenant $t = t_0$ dans (19),

$$x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s)) ds = x_0. \quad (21)$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

La fonction x obtenue comme point fixe de T est donc une solution du problème de Cauchy.

Étape 6 : unicité de la solution

Nous avons montré que T possède un unique point fixe dans E . Comme toute solution du problème de Cauchy appartenant à E est un point fixe de T , il ne peut y avoir qu'une seule solution dans I .

En effet, si x_1 et x_2 sont deux solutions dans E , alors, d'après la formulation intégrale,

$$x_1 = Tx_1, \quad x_2 = Tx_2.$$

Comme T possède un unique point fixe,

$$x_1 = x_2.$$

On a donc établi l'existence et l'unicité locales de la solution.

Conclusion

Pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe $h > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur

$$I = [t_0 - h, t_0 + h].$$

L'idée fondamentale de la démonstration est l'équivalence

$$\boxed{x \text{ est solution du problème de Cauchy} \iff Tx = x}$$

et l'application du théorème du point fixe de Banach à l'opérateur de Picard T .

Remarque 5.2. La construction du rectangle R intervient avant la définition de l'espace E et de l'opérateur de Picard. Son rôle est de garantir que toutes les valeurs $(t, x(t))$ considérées restent dans un domaine où f est bornée et où la condition de Lipschitz par rapport à x est valable avec une constante uniforme L . Le rectangle sert donc à sécuriser le cadre local de la démonstration ; il ne constitue pas l'objectif final de la preuve.

4.5 Picard : approximations successives

Dans la section précédente, nous avons montré, à l'aide du théorème du point fixe de Banach, que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet localement une solution unique.

La démonstration nous a conduit à introduire l'opérateur de Picard

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

La solution cherchée est précisément le point fixe de T , c'est-à-dire une fonction x vérifiant

$$Tx = x.$$

L'idée de Picard consiste maintenant à approcher ce point fixe par une suite de fonctions obtenues par itérations successives de l'opérateur T .

4.5.1 Principe de la méthode

On choisit comme première approximation la fonction constante

$$x_0(t) = x_0.$$

On définit ensuite, par récurrence,

$$\boxed{x_{n+1} = Tx_n, \quad n \geq 0.}$$

En utilisant la définition de T , on obtient

$$\boxed{x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds.}$$

Les fonctions

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$$

sont appelées les **approximations successives de Picard**.

Remarque 5.3. *Il faut distinguer la donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ de la fonction constante $x_0(t) = x_0$ utilisée comme première approximation.*

4.5.2 Pourquoi les approximations convergent-elles ?

Dans la démonstration précédente, nous avons montré que l'opérateur T est une contraction :

$$\|Tx - Ty\|_\infty \leq q\|x - y\|_\infty, \quad 0 \leq q < 1.$$

Comme

$$x_{n+1} = Tx_n,$$

on obtient

$$\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq q\|x_n - x_{n-1}\|_\infty.$$

Par récurrence,

$$\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq q^n\|x_1 - x_0\|_\infty.$$

Pour $m > n$,

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\|_\infty &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\|_\infty \\ &\leq \|x_1 - x_0\|_\infty \sum_{k=n}^{m-1} q^k \\ &\leq \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|_\infty. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq q < 1$, le membre de droite tend vers 0. La suite (x_n) est donc de Cauchy dans l'espace complet E . Elle converge vers une fonction $x \in E$.

En passant à la limite dans

$$x_{n+1} = Tx_n,$$

on obtient

$$x = Tx.$$

La limite des approximations successives est donc le point fixe de T , et par conséquent l'unique solution locale du problème de Cauchy.

Exemple 5.4. $x' = x$, $x(0) = 1$ *Considérons*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Ici,

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 1, \quad f(t, x) = x.$$

La formule de Picard devient

$$x_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t x_n(s) ds.$$

Première approximation. *On commence par*

$$x_0(t) = 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + \int_0^t x_0(s) \, ds \\ &= 1 + \int_0^t 1 \, ds \\ &= 1 + t. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{x_1(t) = 1 + t.}$$

Deuxième approximation. *On remplace maintenant x_0 par x_1 :*

$$\begin{aligned} x_2(t) &= 1 + \int_0^t x_1(s) \, ds \\ &= 1 + \int_0^t (1 + s) \, ds \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{x_2(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}.}$$

Troisième approximation. *On utilise x_2 :*

$$\begin{aligned} x_3(t) &= 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2} \right) \, ds \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{x_3(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}.}$$

Quatrième approximation. *De la même manière,*

$$\begin{aligned} x_4(t) &= 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} \right) \, ds \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!}. \end{aligned}$$

On observe alors le schéma général

$$\boxed{x_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}.}$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$x_n(t) \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t.$$

La solution exacte est donc

$$\boxed{x(t) = e^t.}$$

6 Cas global

6.1 Du problème local au problème global

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Dans les résultats précédents, le théorème local de Cauchy–Lipschitz permet, sous des hypothèses appropriées sur f , d’obtenir une solution définie sur un intervalle autour de t_0 .

On se pose maintenant une question différente :

La solution locale peut-elle être prolongée pour des temps plus grands ?

Cette question conduit à la distinction fondamentale entre existence locale et existence globale.

Définition 6.1 (Solution locale). *Une solution x de (3) est dite locale si elle est définie sur un intervalle ouvert*

$$I \ni t_0,$$

qui peut être relativement petit.

Définition 6.2 (Prolongement). *Soit $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (3). On appelle prolongement de x une solution*

$$\tilde{x} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad I \subset \tilde{I},$$

telle que

$$\tilde{x}(t) = x(t), \quad \forall t \in I.$$

Autrement dit, le prolongement ne crée pas une nouvelle solution : il continue la même solution sur un intervalle plus grand.

Remarque 6.3. *Il faut bien distinguer les trois notions suivantes :*

$$\boxed{\text{existence locale}}, \quad \boxed{\text{unicité locale}}, \quad \boxed{\text{existence globale}}.$$

L’existence locale ne signifie pas automatiquement que la solution existe pour tout t .

6.2 Que signifie “global” ?

Supposons, pour simplifier, que

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Une solution x est dite *globale sur $\mathbb{R}$* si

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi, dans le cas global, notre objectif est de passer de

$$x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

à

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

La difficulté essentielle est qu’une solution peut, en général, devenir non bornée en un temps fini. On parle alors d’*explosion en temps fini*.

6.3 Le principe de prolongement

L’idée générale est la suivante.

1. Le théorème local de Cauchy–Lipschitz donne une solution sur un intervalle autour de t_0 .
2. Si cette solution reste suffisamment contrôlée lorsqu’on s’approche d’une extrémité finie de son intervalle d’existence, on peut la prolonger au-delà de cette extrémité.
3. Si l’on peut répéter ce prolongement sans rencontrer d’explosion en temps fini, on obtient une solution globale.

On peut résumer cette idée par le schéma

solution locale $\longrightarrow$ prolongement $\longrightarrow$ solution globale.
--

6.4 Condition de croissance linéaire

Une condition classique permettant d’éviter l’explosion en temps fini est une condition de croissance au plus linéaire par rapport à x .

On suppose qu’il existe des fonctions continues

$$a, b : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$$

telles que

$$\|f(t, x)\| \leq a(t)\|x\| + b(t), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Cette hypothèse signifie que, par rapport à la variable x , la fonction f ne peut pas croître plus vite qu’une fonction affine en $\|x\|$.

Remarque 6.4. La condition (4) est une condition de croissance. Elle est différente de la condition de Lipschitzianité.

La condition de Lipschitz contrôle la différence

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|,$$

tandis que la condition de croissance contrôle directement

$$\|f(t, x)\|.$$

6.5 Théorème d'existence globale

Théorème 6.5 (Existence globale sous une condition de croissance). Soit

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à x .

Supposons qu'il existe des fonctions continues

$$a, b : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$$

telles que

$$\|f(t, x)\| \leq a(t)\|x\| + b(t), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Alors, pour tout

$$(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution globale

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

6.6 Interprétation du théorème

Ce théorème rassemble deux idées différentes.

Première idée : unicité. La condition de Lipschitz locale par rapport à x permet d'appliquer le théorème local de Cauchy–Lipschitz. Elle garantit l'unicité de la solution locale.

Deuxième idée : prolongement. La condition

$$\|f(t, x)\| \leq a(t)\|x\| + b(t)$$

empêche la solution de devenir infinie en un temps fini. La solution locale peut donc être prolongée.

On obtient finalement

existence globale + unicité globale.

6.7 Cas particulier : f globalement lipschitzienne

Une situation particulièrement importante est celle où f est globalement lipschitzienne par rapport à x .

Proposition 6.6. *Supposons que*

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

soit continue et qu'il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|,$$

pour tous

$$t \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Alors, pour tout (t_0, x_0) , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution globale sur $\mathbb{R}$.

Remarque 6.7. *La Lipschitzianité globale fournit en particulier une condition de croissance au plus linéaire.*

En effet,

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\| &\leq \|f(t, x) - f(t, 0)\| + \|f(t, 0)\| \\ &\leq L\|x\| + \|f(t, 0)\|. \end{aligned}$$

On obtient donc une estimation de la forme

$$\|f(t, x)\| \leq L\|x\| + b(t), \quad b(t) = \|f(t, 0)\|.$$

C'est précisément le type de croissance qui permet d'éviter l'explosion en temps fini.

6.8 Pourquoi la condition de croissance est-elle importante ?

La simple continuité de f ne suffit pas à garantir une existence globale.

Par exemple, considérons

$$x'(t) = x(t)^2, \quad x(0) = 1.$$

La fonction

$$f(x) = x^2$$

est continue et localement lipschitzienne. Le problème possède donc une solution locale unique.

La solution est

$$x(t) = \frac{1}{1-t},$$

qui est définie seulement pour

$$t < 1.$$

Lorsque

$$t \longrightarrow 1^-,$$

on a

$$x(t) \longrightarrow +\infty.$$

La solution ne peut donc pas être prolongée au-delà de $t = 1$ comme solution finie de l'équation.

Cet exemple montre que

$$\boxed{\text{existence locale} \not\Rightarrow \text{existence globale.}}$$

La croissance quadratique de

$$f(x) = x^2$$

est ici responsable de l'explosion en temps fini.

6.9 À retenir

Pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

on peut retenir la chaîne logique suivante :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{continuité de } f \\ + \text{Lipschitz local en } x \end{array}} \implies \boxed{\text{solution locale unique}}$$

Puis, si une condition de croissance appropriée empêche l'explosion en temps fini,

$$\boxed{\text{solution locale}} \implies \boxed{\text{prolongement}} \implies \boxed{\text{solution globale}}.$$

Dans le cas particulier où f est globalement lipschitzienne en x ,

$$\boxed{\text{continuité} + \text{Lipschitzianité globale}} \implies \boxed{\text{solution globale unique.}}$$

Remarque 6.8. « *Le théorème local de Cauchy–Lipschitz nous donne une solution autour de t_0 . Mais cette solution n'est pas nécessairement définie pour tout t . Nous devons donc étudier son prolongement. Une condition de croissance appropriée empêche l'explosion de la solution en temps fini. On peut alors prolonger la solution et obtenir une solution globale.* »

7 Théorème de Peano

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Théorème 7.1 (Peano). *Soit*

$$f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

une fonction continue au voisinage du point (t_0, x_0) .

Alors il existe un nombre $h > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet au moins une solution

$$x \in C^1([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R}^n).$$

Autrement dit, le problème de Cauchy possède au moins une solution locale au voisinage de t_0 .

Interprétation. La condition essentielle du théorème de Peano est la **continuité** de f au voisinage de (t_0, x_0) . Cette condition garantit l'existence d'au moins une solution locale, mais elle ne garantit pas, en général, son unicité.

C'est une différence importante avec le théorème de Cauchy–Lipschitz : une condition de Lipschitz par rapport à x permet d'obtenir à la fois l'existence et l'unicité locales.

Idée de la preuve. On utilise d'abord la formulation intégrale :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Contrairement au théorème de Cauchy–Lipschitz, on ne suppose pas ici que f est lipschitzienne par rapport à x . On ne peut donc pas appliquer directement le théorème du point fixe de Banach.

L'idée consiste à construire des solutions approximatives, appelées **polygones d'Euler**. On obtient ainsi une suite (x_n) de fonctions qui approchent la solution recherchée.

La continuité de f permet d'obtenir des estimations uniformes sur ces approximations. On montre ensuite qu'une sous-suite converge uniformément vers une fonction x .

En utilisant la continuité de f , on passe à la limite dans la formulation intégrale et on obtient

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Ainsi, x est une solution du problème de Cauchy.

À retenir.

$f \text{ continue} \implies \text{existence locale d'au moins une solution.}$
--

Mais

$f \text{ continue} \not\Rightarrow \text{unicité de la solution.}$

7.1 Contre-exemple : absence d'unicité

Considérons

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Posons

$$f(t, x) = \sqrt{|x|}.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Peano garantit donc l'existence d'au moins une solution locale.

Une première solution est

$$x_1(t) = 0.$$

D'autre part, pour tout $a \geq 0$, définissons

$$x_a(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a, \\ \frac{(t-a)^2}{4}, & t > a. \end{cases}$$

On a $x_a(0) = 0$. Pour $t < a$,

$$x'_a(t) = 0 = \sqrt{|x_a(t)|}.$$

Pour $t > a$,

$$x'_a(t) = \frac{t-a}{2} = \sqrt{\frac{(t-a)^2}{4}} = \sqrt{|x_a(t)|}.$$

Au point $t = a$, on vérifie également que x_a est dérivable. Ainsi, x_a est une solution du même problème de Cauchy.

On obtient donc plusieurs solutions correspondant à la même condition initiale. Par exemple,

$$x_1(t) = 0$$

et

$$x_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1, \\ \frac{(t-1)^2}{4}, & t > 1. \end{cases}$$

Conclusion. Cet exemple montre que la continuité de f assure l'existence d'une solution, mais ne suffit pas à assurer son unicité.

En effet, la fonction

$$x \mapsto \sqrt{|x|}$$

n'est pas localement lipschitzienne au voisinage de $x = 0$.

Ainsi, pour obtenir l'unicité, une hypothèse supplémentaire, telle qu'une condition de Lipschitz par rapport à x , est nécessaire.

8 Solutions maximales et continuation des solutions

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

où

$$\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

est un ouvert et

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dans ce qui suit, on suppose que les hypothèses locales du théorème de Cauchy–Lipschitz sont satisfaites lorsque l’unicité est nécessaire.

Après avoir établi l’existence et l’unicité locales, une question naturelle se pose :

Sur quel intervalle la solution peut-elle être définie ?

Une solution obtenue localement peut parfois être prolongée sur un intervalle plus grand. L’objectif de cette partie est de formaliser cette idée et de comprendre la notion de *solution maximale*.

8.1 Prolongement d’une solution

Définition 8.1 (Prolongement). *Soit*

$$x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

une solution du problème différentiel. On dit qu’une solution

$$\tilde{x} : \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est un prolongement de x si

$$I \subset \tilde{I}$$

et

$$\tilde{x}(t) = x(t), \quad \forall t \in I.$$

Si, de plus,

$$I \subsetneq \tilde{I},$$

on dit que $\tilde{x}$ est un prolongement propre de x .

Remarque 8.2. *Le prolongement ne consiste pas à construire une nouvelle solution indépendante. Il s’agit de continuer la même solution en conservant exactement ses valeurs sur son intervalle initial.*

Exemple 8.3 (Exemple simple de prolongement). *Considérons*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

La fonction

$$x(t) = e^t$$

est une solution sur $\mathbb{R}$. Si on ne la considère d'abord que sur

$$I = (-1, 1),$$

alors

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(t) = e^t,$$

admet le prolongement

$$\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{x}(t) = e^t.$$

La solution définie sur $(-1, 1)$ n'est donc pas maximale.

8.2 Solutions maximales

Définition 8.4 (Solution maximale). *Une solution*

$$x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement propre qui soit encore une solution du même problème différentiel.

Autrement dit, une solution maximale est une solution que l'on ne peut plus continuer comme solution classique sur un intervalle strictement plus grand.

Remarque 8.5. *Il est important de distinguer les deux notions suivantes :*

maximale signifie que la solution ne peut plus être prolongée comme solution ;

globale signifie que son intervalle de définition est l'ensemble $\mathbb{R}$.

Ainsi,

$$\boxed{\text{solution globale} \implies \text{solution maximale},}$$

mais une solution maximale n'est pas nécessairement globale.

8.3 Existence d'une solution maximale

Sous les hypothèses de Cauchy–Lipschitz, les solutions locales sont uniques. Cette unicité permet de les recoller lorsqu'elles se recouvrent.

Théorème 8.6 (Existence d'une solution maximale). *Supposons que f vérifie les hypothèses locales du théorème de Cauchy–Lipschitz sur l'ouvert Ω . Pour tout*

$$(t_0, x_0) \in \Omega,$$

le problème de Cauchy admet une unique solution maximale

$$x : I_{\max} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

où $I_{\max}$ est un intervalle contenant t_0 .

Remarque 8.7 (Idée de construction). *On considère toutes les solutions locales du problème qui passent par (t_0, x_0) . Grâce à l'unicité, deux telles solutions coïncident sur leur intersection. Elles peuvent donc être recollées.*

On obtient ainsi une solution définie sur l'union de tous les intervalles de définition possibles. Cette solution est la solution maximale.

8.4 Continuation des solutions

La notion de solution maximale conduit naturellement au problème suivant : si l'intervalle maximal possède une extrémité finie, peut-on encore prolonger la solution au-delà de cette extrémité ?

C'est précisément l'objet du principe de continuation.

Définition 8.8 (Intervalle maximal). *On écrit l'intervalle maximal sous la forme*

$$I_{\max} = (\alpha, \beta),$$

où

$$-\infty \leq \alpha < t_0 < \beta \leq +\infty.$$

Les nombres α et β sont appelés les extrémités de l'intervalle maximal.

Théorème 8.9 (Principe de continuation). *Soit*

$$x : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

une solution maximale de

$$x' = f(t, x),$$

où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à x .

Supposons que $\beta < +\infty$ et qu'il existe un compact

$$K \subset \Omega$$

tel que

$$(t, x(t)) \in K$$

pour t suffisamment proche de β .

Alors la solution x peut être prolongée au-delà de β .

Par conséquent, une solution maximale qui possède une extrémité droite finie ne peut pas rester dans un compact de Ω lorsque $t \rightarrow \beta^-$.

Remarque 8.10. *Cette formulation donne l'idée essentielle :*

<i>solution maximale + temps final fini $\implies$ sortie de tout compact admissible.</i>
--

Autrement dit, si une solution maximale cesse d'exister à un temps fini, quelque chose doit empêcher sa continuation. Typiquement, la trajectoire s'approche de la frontière du domaine Ω ou devient non bornée.

Idée de la preuve du principe de continuation

Supposons que

$$\beta < +\infty$$

et que $(t, x(t))$ reste dans un compact $K \subset \Omega$ lorsque $t \rightarrow \beta^-$.

Puisque f est continue sur le compact K , elle y est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que

$$\|f(t, x)\| \leq M, \quad (t, x) \in K.$$

Comme

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

on obtient

$$\|x'(t)\| \leq M$$

pour t suffisamment proche de β .

Ainsi, pour s, t proches de β ,

$$\|x(t) - x(s)\| \leq \int_s^t \|x'(r)\| dr \leq M|t - s|.$$

La fonction x est donc de Cauchy lorsque $t \rightarrow \beta^-$. Il existe alors une limite

$$x_\beta = \lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t).$$

Comme $(t, x(t))$ reste dans le compact $K \subset \Omega$, on a

$$(\beta, x_\beta) \in \Omega.$$

On peut alors appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz au nouveau problème

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(\beta) = x_\beta. \end{cases}$$

Il existe donc une solution y sur un petit intervalle autour de β . En utilisant

$$\lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t) = x_\beta$$

et l'unicité, on recolle x et y . On obtient une solution définie sur un intervalle strictement plus grand que (α, β) .

Cela contredit la maximalité de x .

On conclut donc que, lorsque β est fini, une solution maximale doit nécessairement quitter tout compact admissible de Ω lorsque $t \rightarrow \beta^-$.

Exemple : explosion en temps fini

Exemple 8.11. *Considérons le problème*

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

La séparation des variables donne

$$\frac{dx}{x^2} = dt.$$

Après intégration,

$$-\frac{1}{x(t)} = t + C.$$

La condition initiale $x(0) = 1$ donne

$$C = -1.$$

Ainsi,

$$x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Cette fonction est définie pour

$$t < 1.$$

La solution maximale est donc

$$x(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in (-\infty, 1).$$

Lorsque $t \rightarrow 1^-$,

$$x(t) \longrightarrow +\infty.$$

La solution devient donc non bornée en temps fini. Elle ne peut pas être prolongée comme solution classique au-delà de $t = 1$.

Ainsi,

$$I_{\max} = (-\infty, 1) \neq \mathbb{R}.$$

Cette solution est maximale, mais elle n'est pas globale.

$$\boxed{\text{Maximale} \not\Rightarrow \text{Globale.}}$$

8.5 Solutions globales

Définition 8.12 (Solution globale). Une solution maximale

$$x : I_{\max} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est dite globale si

$$I_{\max} = \mathbb{R}.$$

Autrement dit, elle existe pour tout

$$t \in \mathbb{R}.$$

Exemple 8.13 (Solution globale). *Considérons*

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

La solution est

$$x(t) = x_0 e^{-t}.$$

Cette fonction est définie pour tout

$$t \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent,

$$I_{\max} = \mathbb{R},$$

et la solution est globale.

$$x(t) = x_0 e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Résumé conceptuel

Pour un problème de Cauchy, la logique est la suivante :

$$\boxed{\text{solution locale} \longrightarrow \text{prolongement} \longrightarrow \text{solution maximale}}$$

Puis on étudie l'intervalle maximal

$$I_{\max} = (\alpha, \beta).$$

Si $\beta < +\infty$, le principe de continuation montre que la solution maximale ne peut pas rester dans un compact de Ω lorsque $t \rightarrow \beta^-$. Il y a donc nécessairement un phénomène empêchant la continuation, par exemple une explosion de la solution ou une approche de la frontière du domaine.

Enfin,

$$\boxed{I_{\max} = \mathbb{R} \iff \text{la solution maximale est globale.}}$$

Notion	Signification
Prolongement	Continuer une solution existante sur un intervalle plus grand.
Solution maximale	Solution qui n'admet aucun prolongement propre.
Solution globale	Solution dont l'intervalle maximal est $\mathbb{R}$.
Continuation	Étude des conditions permettant de prolonger une solution au-delà d'une extrémité finie.

9 Exemples de solutions maximales et globales

1. Une solution maximale qui n'est pas globale

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)^2, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

En séparant les variables, on obtient

$$\frac{dx}{x^2} = dt.$$

Après intégration,

$$-\frac{1}{x(t)} = t + C.$$

La condition initiale $x(0) = 1$ donne $C = -1$, d'où

$$x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Cette fonction est définie lorsque

$$t < 1.$$

Ainsi,

$$I_{\max} = (-\infty, 1).$$

Le solution

$$x(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in (-\infty, 1),$$

est une **solution maximale** : elle ne peut pas être prolongée au-delà de $t = 1$ comme solution classique, car

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = +\infty.$$

Cependant, elle n'est pas globale puisque

$$I_{\max} \neq \mathbb{R}.$$

Conclusion :

Une solution maximale n'est pas nécessairement globale.

2. Une solution globale

Considérons maintenant

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

La solution est

$$x(t) = e^t.$$

Cette fonction est définie pour tout

$$t \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent,

$$I_{\max} = \mathbb{R},$$

et la solution est à la fois **maximale et globale**.

Ainsi,

$$\boxed{x(t) = e^t, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

3. Exemple d'un prolongement

Considérons encore

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Supposons que l'on ait construit la solution seulement sur

$$I = (-1, 1).$$

On a alors

$$x(t) = e^t, \quad t \in (-1, 1).$$

Mais cette solution peut être prolongée à l'ensemble $\mathbb{R}$ en posant

$$\tilde{x}(t) = e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La solution définie sur $(-1, 1)$ n'est donc pas maximale, puisqu'elle admet un prolongement sur un intervalle strictement plus grand.

La solution

$$\tilde{x}(t) = e^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

est, quant à elle, maximale et globale.

4. Remarque importante

Il faut distinguer les deux notions :

- Une **solution maximale** est une solution qui ne peut pas être prolongée à un intervalle strictement plus grand tout en restant solution de l'équation différentielle.
- Une **solution globale** est une solution définie sur tout $\mathbb{R}$.

On a donc

$$\boxed{\text{Toute solution globale est maximale.}}$$

En revanche, la réciproque est fausse :

Une solution maximale peut ne pas être globale.

L'exemple

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1$$

le montre clairement :

$$x(t) = \frac{1}{1-t}, \quad I_{\max} = (-\infty, 1).$$

La solution est maximale, mais elle n'est pas globale.