

Université Abdelhafid Boussouf, Mila
Faculté de Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques

Programmation Linéaire

Cours et Exercices

Master Mathématiques Appliquées / Master Mathématiques
Fondamentales

Semestre 1

Programmation Linéaire

Boufelgha Ibrahim

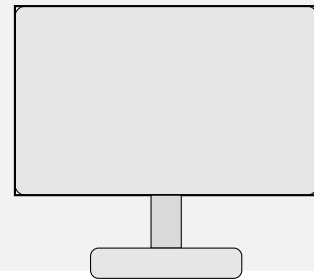
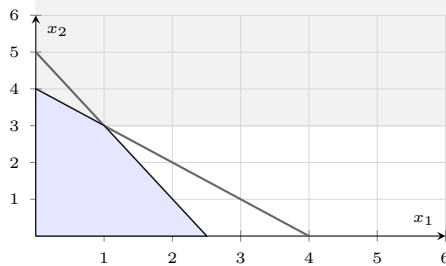
$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Base	x_1	x_2	b
s_1	1	1	4
s_2	2	1	5
z	-3	-2	0



Année universitaire : 2025–2026

Présentation de la matière

Intitulé du Master : Master Mathématiques Appliquées, Master Mathématiques Fondamentales

Semestre : S1

Intitulé de l'UE : UE F1.2

Intitulé de la matière : Programmation Linéaire

Crédits : 4

Coefficient : 2

Objectifs de l'enseignement Ce module a pour objectifs d'illustrer l'importance pratique des problèmes d'optimisation linéaire et de maîtriser l'ensemble théorique sous-jacent.

Connaissances préalables recommandées Optimisation sans contraintes et optimisation avec contraintes (semestres 5 et 6 de la licence académique en mathématiques).

Contenu de la matière

- **Chapitre 1 : Introduction à la programmation linéaire**
 - Notions fondamentales et définitions.
 - Techniques de la programmation linéaire.
 - Formulation et structure des modèles mathématiques linéaires.
 - Résolution graphique d'un programme linéaire.
- **Chapitre 2 : La méthode du simplexe**
 - Algorithme du simplexe : base et solution de base, critère d'optimalité, condition suffisante d'existence de solution non bornée.
 - Méthode du simplexe sous forme matricielle.
 - Illustration algébrique et géométrique de la méthode.
 - Tableaux du simplexe et procédures de calcul.
 - Recherche d'une solution réalisable de base initiale : méthodes des deux phases et du Big M.
- **Chapitre 3 : La dualité en programmation linéaire**
 - Exemple de programme linéaire dual.
 - Relations entre le programme primal et le dual.
 - Théorèmes et propriétés fondamentales de la dualité.
 - Algorithmes dual et primal-dual.

Mode d'évaluation Contrôle continu (33%) et examen final (67%).

Références

-
- M. Bazarra, H.D. Sherali, C.M. Shetty, *Nonlinear Programming : Theory and Algorithms*, Second Edition, 1993.
 - G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, 1985.
 - Y. Dodge, S.G. Weber, J.P. Renfer, *Optimisation appliquée*, Springer, France, 2005.

Table des matières

Présentation de la matière	1
Introduction	4
1 Introduction à la programmation linéaire	5
1.1 Notions fondamentales et définitions	5
1.1.1 Méthodologie d'approche d'un problème de recherche opérationnelle	5
1.1.2 Terminologies et définitions	7
1.2 Technique de la programmation linéaire	9
1.2.1 Rappel sur l'algèbre linéaire	9
1.3 Formulation et structure des modèles mathématiques linéaires	11
1.3.1 Éléments d'un modèle de programmation linéaire	11
1.3.2 Région réalisable et solution optimale	14
1.4 Résolution graphique d'un PL	16
1.4.1 Géométrie de la programmation linéaire	16
1.4.2 Principe général	19

Introduction

La programmation linéaire (PL) est l'une des branches les plus fondamentales et les plus utilisées de la recherche opérationnelle et de l'optimisation mathématique. Elle offre un cadre rigoureux pour modéliser et résoudre une grande variété de problèmes où l'on cherche à optimiser une fonction objectif linéaire, soumise à un ensemble de contraintes également linéaires.

Historiquement, la PL a connu un essor considérable à partir des années 1940, notamment grâce aux travaux de George Dantzig qui a introduit la méthode du simplexe. Depuis, elle est devenue un outil incontournable dans de nombreux domaines : économie, gestion, industrie, logistique, télécommunications, finance et ingénierie.

L'intérêt majeur de la programmation linéaire réside dans son double aspect :

- **Un aspect théorique**, qui met en évidence des propriétés fondamentales des systèmes d'inégalités et des polytopes convexes.
- **Un aspect pratique**, qui fournit des méthodes algorithmiques efficaces permettant de résoudre des problèmes de grande taille rencontrés dans le monde réel.

Ainsi, l'étude de la programmation linéaire constitue un passage incontournable dans la formation des étudiants en mathématiques appliquées et en optimisation, car elle combine rigueur théorique et pertinence pratique.

Chapitre 1

Introduction à la programmation linéaire

Dans ce chapitre, nous introduisons les concepts de base de la programmation linéaire. L'objectif est de donner une vision claire de la nature des problèmes étudiés, de leur formulation mathématique et des premiers outils de résolution.

1.1 Notions fondamentales et définitions

Pour structurer efficacement la résolution d'un problème en recherche opérationnelle, il est indispensable de suivre une démarche rigoureuse composée de plusieurs phases successives.

1.1.1 Méthodologie d'approche d'un problème de recherche opérationnelle

Plusieurs étapes sont nécessaires pour aborder un problème de recherche opérationnelle. La figure suivante résume ces différentes étapes :

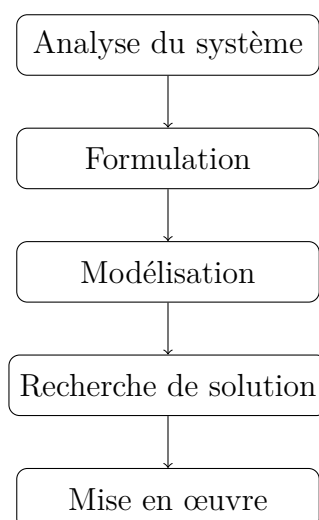


FIGURE 1.1 – Étapes de la démarche en recherche opérationnelle.

Analyse du système : C'est l'étape la plus difficile d'un problème de recherche opérationnelle. Son but est de comprendre l'environnement dans lequel le problème est posé afin d'en cerner les aspects les plus importants. Il faut consacrer suffisamment de temps et d'efforts à cette phase.

Formulation du problème (structuration) : Cette phase consiste à identifier tous les objectifs et les contraintes du problème. Elle dépend fortement de la qualité de l'analyse du système. Une mauvaise analyse influe considérablement sur la structuration du problème. Un *objectif* est un but à atteindre, qu'il ne faut pas confondre avec une *action*, qui est un moyen d'y parvenir.

Dans certains cas, le problème possède un objectif facilement identifiable et quantifiable, par exemple : maximiser un profit, minimiser un coût total ou minimiser une distance totale. Dans d'autres situations, il existe plusieurs objectifs, dont certains sont difficilement quantifiables. Par exemple : maximiser la satisfaction de la clientèle tout en maximisant le profit total.

Modélisation : Il s'agit, à cette étape, de construire une représentation fidèle de la réalité. Un modèle peut prendre différentes formes : mathématique (programme linéaire, non linéaire, graphe, modèle de régression...), ou de simulation. La construction d'un modèle passe par plusieurs phases : recueil des données, élaboration du modèle et validation du modèle.

Recherche de solution : La recherche de solution peut être réalisée à l'aide de plusieurs techniques complémentaires :

Techniques d'optimisation : Pour certaines classes de problèmes, il existe des algorithmes permettant d'obtenir des solutions optimales. Par exemple, en théorie des graphes, l'algorithme de Bellman permet de résoudre les problèmes de plus courts chemins.

Méthodes heuristiques et métaheuristiques : Dans de nombreux cas — notamment pour les problèmes appartenant à la classe NP — la recherche d'une solution optimale est difficile, voire impossible, en raison du temps de calcul ou de la mémoire disponibles. On fait alors appel à des méthodes approchées dites *heuristiques*. Par exemple, pour le problème du voyageur de commerce, l'heuristique du plus proche voisin permet d'obtenir une solution approchée simple mais souvent efficace.

De nos jours, les *métaheuristiques* jouent un rôle essentiel dans l'optimisation approchée et offrent des solutions de haute qualité. Parmi les plus utilisées, citons : les algorithmes génétiques, la recherche tabou, les colonies de fourmis, ou encore les algorithmes inspirés du recuit simulé.

Simulation : La simulation consiste à construire un modèle reproduisant fidèlement le comportement réel du système, puis à faire varier ses paramètres jusqu'à observer un comportement satisfaisant. Cette technique constitue une alternative précieuse lorsque les méthodes analytiques ou d'optimisation deviennent inapplicables.

Évaluation : Il s'agit de sélectionner, parmi un ensemble d'actions possibles, celle qui est jugée la plus avantageuse. L'approche consiste à évaluer scientifiquement les conséquences de chaque action, puis à effectuer un choix basé sur un ou plusieurs critères préalablement définis.

Mise en œuvre : La dernière étape consiste à implémenter la solution retenue à l'aide d'outils informatiques (programmation, bases de données, interfaces de décision, etc.) et à contrôler sa pertinence au regard du modèle établi. Souvent, cette étape fournit un *feed-back* précieux pour réviser ou améliorer les phases précédentes.

1.1.2 Terminologies et définitions

L'optimisation est une discipline des mathématiques appliquées qui consiste à rechercher, parmi toutes les solutions possibles d'un problème donné, celle (ou celles) qui satisfait le mieux un certain critère de performance. Ce critère, appelé *fonction objectif*, peut représenter un coût à minimiser, un profit à maximiser, ou toute autre mesure d'efficacité.

Définition 1.1 (Problème d'optimisation). On appelle **problème d'optimisation** la recherche d'un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ appartenant à un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^n$, appelé ensemble des contraintes, ensemble réalisable ou ensemble admissible, qui minimise (ou maximise) une fonction réelle $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ appelée fonction objectif.

On écrit généralement :

$$\min_{x \in E} f(x) \quad \text{ou} \quad \max_{x \in E} f(x).$$

Définition 1.2 (Programmation mathématique). On appelle **programmation mathématique** l'ensemble des méthodes et techniques permettant de formuler et de résoudre des problèmes d'optimisation dans lesquels la fonction objectif et les contraintes sont exprimées par des relations mathématiques.

Le terme « programmation » est historique : il remonte à l'époque où ces méthodes étaient utilisées pour planifier (« programmer ») les activités économiques et industrielles.

Définition 1.3 (Composantes d'un modèle de programmation mathématique). Tout modèle de programmation mathématique comporte généralement les éléments suivants :

- un ensemble de variables de décision $x_1, x_2, \dots, x_n$ représentant les quantités inconnues à déterminer ;
- une fonction objectif $f(x)$ à minimiser ou maximiser ;
- un ensemble de contraintes décrivant les relations (égalités ou inégalités) que les variables doivent satisfaire ;
- éventuellement, des **contraintes de signe** imposant par exemple $x_i \geq 0$ pour certaines variables.

Définition 1.4 (Classification des programmes mathématiques). Selon la nature de la fonction objectif et des contraintes, on distingue :

- la **programmation linéaire (PL)** : la fonction objectif et les contraintes sont linéaires ;
- la **programmation non linéaire (PNL)** : la fonction objectif et/ou certaines contraintes sont non linéaires ;
- la **programmation entière (PI)** : certaines variables doivent prendre des valeurs entières ;
- la **programmation mixte (PLNE)** : une partie des variables est continue, l'autre entière ;
- la **programmation dynamique, stochastique, ou multiobjectif**, selon la structure du problème.

Remarque 1.1. La programmation linéaire constitue un cas particulier mais très important de la programmation mathématique. Elle se distingue par le fait que les relations sont linéaires, ce qui permet d'utiliser des méthodes algorithmiques puissantes et bien établies, telles que la méthode du simplexe.

Exemple 1.1 (Exemple général d'un problème d'optimisation). On cherche à déterminer $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ qui minimise le coût

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème de programmation linéaire.

Origine et importance

La programmation linéaire a été développée au cours des années 1940, principalement par GEORGE DANTZIG, dans le cadre de problèmes d'allocation de ressources pendant la Seconde Guerre mondiale. Depuis, elle est devenue une méthode incontournable pour la modélisation et la résolution de nombreux problèmes réels d'aide à la décision.

Principe général

Un problème de programmation linéaire consiste à :

1. Déterminer des variables de décision, représentant les grandeurs à choisir (quantités à produire, ressources à affecter, flux à transporter, etc.) ;
2. Exprimer un objectif à optimiser, généralement un profit à maximiser ou un coût à minimiser ;
3. Formuler des contraintes linéaires qui traduisent les limites imposées par le contexte (capacités de production, disponibilité de ressources, temps, budget, etc.).

Exemple illustratif

Considérons une entreprise qui fabrique deux produits A et B . Chaque unité de A nécessite :

- 2 heures de travail ;
- 3 unités de matière première ;

tandis que chaque unité de B nécessite :

- 4 heures de travail ;
- 2 unités de matière première.

L'entreprise dispose au total de 40 heures de travail et de 60 unités de matière première. Le bénéfice est de 30 DA pour chaque produit A et 20 DA pour chaque produit B .

On note :

x_1 = nombre d'unités du produit A à fabriquer, x_2 = nombre d'unités du produit B à fabriquer.

Le problème consiste à **maximiser le bénéfice total** :

$$z = 30x_1 + 20x_2$$

sous les **contraintes de disponibilité** :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 40 & \text{(heures de travail),} \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 60 & \text{(matière première),} \\ x_1, x_2 \geq 0 & \text{(non-négativité).} \end{cases}$$

Ce modèle est un *programme linéaire* : la fonction objectif et les contraintes sont des expressions linéaires des variables x_1 et x_2 .

Terminologie de base

- Les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont appelées *variables de décision*.
- La fonction à optimiser $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ est la *fonction objectif*.
- Les équations ou inégalités représentant les restrictions sont les *contraintes*.
- L'ensemble de toutes les solutions qui satisfont les contraintes constitue la *région réalisable*.
- Une solution réalisable qui optimise la fonction objectif est appelée *solution optimale*.

Applications typiques

1. **Planification de production** : déterminer les quantités à produire pour maximiser le profit ou minimiser le coût.
2. **Problème de transport** : trouver la répartition optimale de produits entre plusieurs entrepôts et clients pour minimiser le coût de transport.
3. **Affectation** : assigner des tâches à des agents de manière optimale.
4. **Mélange** : déterminer les proportions d'ingrédients pour obtenir un produit au coût minimal respectant des contraintes de qualité.

1.2 Technique de la programmation linéaire

1.2.1 Rappel sur l'algèbre linéaire

Espace vectoriel

Un *espace vectoriel* V sur le corps $\mathbb{R}$ est un ensemble d'éléments appelés *vecteurs*, muni de deux opérations :

- l'**addition** : $+$ qui, à deux vecteurs x et y de V , associe un troisième vecteur $x + y$ dans V ;
- la **multiplication par un scalaire** : qui, à tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et à tout $x \in V$, associe le vecteur λx dans V .

Ces deux opérations doivent satisfaire les propriétés classiques de compatibilité, de distributivité et d'existence d'un vecteur nul et d'opposés.

Exemple 1.2. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ muni des opérations usuelles est un espace vectoriel de dimension n . Par exemple, $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ est l'espace vectoriel des triplets réels.

Combinaison linéaire et indépendance linéaire

Étant donnés des vecteurs $x^1, x^2, \dots, x^n \in V$ et des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, le vecteur

$$x = \sum_{j=1}^n \lambda_j x^j$$

est appelé *combinaison linéaire* des vecteurs $x^1, \dots, x^n$. Une combinaison linéaire est dite *convexe* si de plus $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ et $\lambda_j \geq 0$ pour tout j .

Les vecteurs $x^1, \dots, x^n$ sont dits *linéairement indépendants* si la relation

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x^j = 0$$

implique nécessairement que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exemple 1.3. Les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$. En revanche, les vecteurs $(1, 2)$ et $(2, 4)$ ne le sont pas, car $(2, 4) = 2(1, 2)$.

Base et dimension

Une *base* d'un espace vectoriel V est une famille de vecteurs de V linéairement indépendants et qui engendrent V . La *dimension* de V , notée $\dim(V)$, est le nombre d'éléments d'une base de V .

Exemple 1.4. Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ forment une base, et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Rang d'une matrice

Soit une matrice $A = (a_{ij})$ de dimension $m \times n$. Le *rang* de A , noté $\text{rg}(A)$, est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants parmi ses lignes ou ses colonnes.

Exemple 1.5. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

a un rang égal à 1, car la deuxième ligne est un multiple de la première.

Une matrice carrée B de dimension $n \times n$ est dite *régulière* (ou *inversible*) si $\text{rg}(B) = n$. Dans ce cas, il existe une matrice inverse B^{-1} telle que :

$$B^{-1}B = BB^{-1} = I_n$$

où I_n est la matrice identité.

Système d'équations linéaires

Considérons un système de m équations linéaires à n inconnues :

$$AX = b, \quad \text{où } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, X \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m.$$

Ce système peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Les résultats de l'algèbre linéaire donnent :

- Si $\text{rg}(A) < \text{rg}(A, b)$, le système est **impossible** (aucune solution).
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A, b) = n$, le système admet une **solution unique**.
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A, b) < n$, le système possède une **infinité de solutions**.

Exemple 1.6. Résolvons le système :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Les deux équations sont équivalentes, donc le rang est 1. On a donc une infinité de solutions : $x = 2 - y$, avec y libre.

Remarque : Si M est une matrice régulière de dimension m , les systèmes $AX = B$ et $MAX = MB$ sont équivalents et possèdent le même ensemble de solutions.

Exemple 1.7. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(A) = 2 \times 3 - 5 \times 1 = 1 \neq 0$, A est inversible et la solution unique est :

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Formulation et structure des modèles mathématiques linéaires

Dans cette section, nous présentons la formulation générale d'un modèle de programmation linéaire ainsi que la structure mathématique qui le caractérise.

Définition 1.5. Un **modèle mathématique linéaire** est une représentation simplifiée d'un problème réel dans laquelle :

- les relations entre les variables sont linéaires ;
- l'objectif à atteindre (profit, coût, rendement, etc.) est exprimé par une fonction linéaire à optimiser ;
- les contraintes traduisent les limitations ou ressources disponibles.

1.3.1 Éléments d'un modèle de programmation linéaire

Un modèle de PL est constitué de quatre composantes essentielles :

1. **Les variables de décision :** Ce sont les inconnues du modèle. Elles représentent les quantités à déterminer (par exemple : la quantité produite, le nombre d'unités à transporter, la quantité de ressources à affecter, etc.).
2. **La fonction objectif :** Elle exprime le critère de performance à optimiser. Elle peut être de la forme :

$$\text{Maximiser } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad \text{ou} \quad \text{Minimiser } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

3. **Les contraintes :** Ce sont les relations linéaires qui traduisent les limitations du système (ressources disponibles, capacités, exigences minimales, etc.). Elles ont généralement la forme :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i.$$

4. **Les conditions de non-négativité** : Dans la majorité des cas pratiques, les variables ne peuvent pas être négatives : $x_j \geq 0$.

Un problème de programmation linéaire s'écrit sous la forme générale :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser (ou minimiser)} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sous les contraintes} & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{array}$$

Les coefficients c_j , a_{ij} et b_i sont des réels donnés, et les variables x_j sont les *variables de décision* à déterminer.

Définitions des formes usuelles :

- La **forme standard** d'un programme linéaire est :

$$\max z = c^\top x \quad \text{s.c.} \quad Ax = b, \quad x \geq 0,$$

où :

- le problème est de *maximisation* ;
- toutes les contraintes sont des *égalités* ;
- toutes les composantes de b sont *positives* ($b_i \geq 0$) ;
- les variables de décision x_j sont *non négatives*.
- La **forme canonique** (ou forme de base) est souvent adoptée pour un problème de *minimisation* :

$$\min z = c^\top x \quad \text{s.c.} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0,$$

où :

- les contraintes sont exprimées sous forme d'inégalités $\leq$;
- les variables x_j sont *non négatives*.

Tout problème linéaire peut être transformé en une de ces formes par des manipulations algébriques simples (introduction de variables d'écart, de surplus ou artificielles).

Proposition 1.1. *Tout programme linéaire peut être transformé en une forme canonique ou en une forme standard. Les principales règles de transformation sont les suivantes :*

1. **Changement du sens de l'objectif**

$$\min f(x) \iff \max(-f(x)) \quad \text{et} \quad \min f(x) = -\max(-f(x)).$$

2. **Transformation des inégalités en égalités (ajout de variables d'écart)**

- Si la contrainte est de la forme

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

on ajoute une variable d'écart $s_i \geq 0$ telle que

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s_i = b_i.$$

— Si la contrainte est de la forme

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

on introduit une variable d'excès $e_i \geq 0$ telle que

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - e_i = b_i.$$

3. Transformation d'une égalité en deux inégalités

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \iff \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i. \end{cases}$$

4. Second membre négatif

Si $b_i < 0$ dans une contrainte

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i,$$

on multiplie les deux membres par -1 :

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n = -b_i,$$

afin d'obtenir un second membre positif.

5. Variable libre

Si une variable x_j est quelconque ($x_j \in \mathbb{R}$), on effectue le changement de variable :

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+ \geq 0, \quad x_j^- \geq 0.$$

Exemple 1.8. Mettre sous forme standard et canonique le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min Z &= 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ \text{s.c.} \quad &\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 5, \\ x_1 + 3x_4 \leq 8, \\ 2x_1 - x_3 \geq 1, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_3, x_4 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Étape 1 : Remplacer les variables libres x_1, x_2 par des différences de variables positives :

$$x_1 = x_1^+ - x_1^-, \quad x_2 = x_2^+ - x_2^-, \quad x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^- \geq 0.$$

Étape 2 : Forme canonique (Min avec contraintes $\leq$)

On transforme les contraintes $\geq$ en $\leq$:

$$\begin{cases} -3x_1^+ + 3x_1^- + x_2^+ - x_2^- \leq -5, \\ x_1^+ - x_1^- + 3x_4 \leq 8, \\ -2x_1^+ + 2x_1^- + x_3 \leq -1. \end{cases}$$

Objectif :

$$\min Z = 2x_1^+ - 2x_1^- + x_2^+ - x_2^- - x_3 + x_4,$$

avec $x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4 \geq 0$.

Étape 3 : Forme standard (Max avec égalités)

On transforme le problème en maximisation et remplace les inégalités par des égalités en introduisant des variables d'écart (s_i) ou d'excès (e_i).

Objectif :

$$\max Z' = -2x_1^+ + 2x_1^- - x_2^+ + x_2^- + x_3 - x_4.$$

Contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1^+ - 3x_1^- - x_2^+ + x_2^- - e_1 = 5, \\ x_1^+ - x_1^- + 3x_4 + s_2 = 8, \\ 2x_1^+ - 2x_1^- - x_3 - e_3 = 1, \\ x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, e_1, e_3, s_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi, tout programme linéaire peut être mis sous forme standard ou canonique par application successive de ces transformations élémentaires.

1.3.2 Région réalisable et solution optimale

Définition : L'ensemble des solutions $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui satisfont simultanément toutes les contraintes du problème est appelé *région réalisable* (ou *ensemble des solutions réalisables*). C'est un polyèdre convexe défini par l'intersection d'un ensemble fini de *demi-espaces*.

Définition : Une *solution réalisable* est un vecteur x appartenant à la région réalisable. Une *solution optimale* est une solution réalisable qui maximise (ou minimise) la valeur de la fonction objectif.

Remarque : Dans un problème de PL, si une solution optimale existe, elle se trouve toujours à un sommet (ou extrémité) du polyèdre réalisable.

Exemple simple de formulation

Considérons une entreprise qui fabrique deux produits A et B . Chaque unité de A rapporte un bénéfice de 3 DA, et chaque unité de B rapporte 5 DA. La production nécessite deux types de ressources : le temps-machine et la main-d'œuvre.

	A	B	Disponibilité
Temps-machine (h)	1	2	8
Main-d'œuvre (h)	2	1	6

On note x_1 et x_2 le nombre d'unités produites de A et B . Le problème de maximisation du profit s'écrit alors :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sous les contraintes} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

Cet exemple illustre la structure typique d'un modèle de programmation linéaire.

Conditions d'existence de solutions

Trois cas peuvent se présenter pour un problème de PL :

1. **Problème réalisable et borné** : L'ensemble des solutions réalisables est non vide et borné ; une solution optimale existe.
2. **Problème irréalisable** : Aucune solution ne satisfait simultanément toutes les contraintes.
3. **Problème non borné** : La fonction objectif peut croître indéfiniment dans la région réalisable (absence de solution optimale finie).

—

Propriétés fondamentales de la programmation linéaire

- La région réalisable d'un problème de PL est toujours un ensemble convexe.
- Si une solution optimale existe, il en existe toujours une au moins à un sommet du polyèdre réalisable.
- La combinaison convexe de solutions réalisables est encore réalisable.
- La linéarité des contraintes et de la fonction objectif permet l'application de méthodes algorithmiques efficaces, notamment la méthode du simplexe.

Exemple : problème de répartition de ressources

Une usine fabrique trois sortes de pièces (P_1 , P_2 , P_3) à l'aide de deux machines (M_1 , M_2). Chaque pièce doit passer successivement sur les deux machines pendant les temps indiqués dans le tableau suivant (en minutes) :

Machines / Pièces	P_1	P_2	P_3	Disponibilité (en heures)
M_1	$t_{1,1}$	$t_{1,2}$	$t_{1,3}$	t_1
M_2	$t_{2,1}$	$t_{2,2}$	$t_{2,3}$	t_2
Profit unitaire	Π_1	Π_2	Π_3	—

Question : combien doit-on fabriquer de pièces P_1 , P_2 et P_3 afin de maximiser le profit total, tout en respectant la disponibilité des machines ?

A. Étape 1 : Compréhension et formulation du problème

L'objectif est ici de *maximiser le profit total*. Chaque type de pièce génère un certain profit et consomme un certain temps machine. Les ressources limitées sont les temps de disponibilité des machines M_1 et M_2 .

Les *variables de décision* représentent les choix à effectuer. Ici, on définit :

$$x_j = \text{le nombre de pièces de type } P_j \text{ à fabriquer, } j = 1, 2, 3.$$

Fonction objectif :

$$\max Z = \Pi_1 x_1 + \Pi_2 x_2 + \Pi_3 x_3.$$

Contraintes de disponibilité des machines :

$$\begin{cases} t_{1,1}x_1 + t_{1,2}x_2 + t_{1,3}x_3 \leq 60t_1 & (\text{machine } M_1) \\ t_{2,1}x_1 + t_{2,2}x_2 + t_{2,3}x_3 \leq 60t_2 & (\text{machine } M_2) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 & (\text{non-négativité}) \end{cases}$$

Remarque 1.2. *Les coefficients numériques $(t_{i,j}, \Pi_j, t_i)$ peuvent provenir de données techniques ou économiques réelles. Le modèle obtenu permet de simuler différentes politiques de production avant de passer à la phase de décision effective.*

Exemple 1.9. *Si les temps d'usinage et les profits unitaires sont donnés par :*

$$t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad t_1 = 40, t_2 = 50, \quad \Pi = (3, 5, 4),$$

le modèle devient :

$$\begin{aligned} \max Z &= 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 2400 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 3000 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Rappel méthodologique : étapes de formulation d'un modèle linéaire

1. **Analyse du problème réel** : identifier l'objectif (minimiser un coût, maximiser un profit, etc.) et les contraintes (ressources, capacités, temps...).
2. **Définition des variables de décision** : préciser les quantités inconnues à déterminer.
3. **Écriture de la fonction objectif** : exprimer mathématiquement le critère à optimiser.
4. **Établissement des contraintes** : traduire les limitations du problème sous forme d'équations ou d'inégalités linéaires.
5. **Ajout des conditions de non-négativité** : souvent $x_j \geq 0$.
6. **Validation du modèle** : vérifier que les unités, les signes et les dépendances sont cohérents.

Remarque 1.3. *La qualité d'un modèle ne dépend pas seulement de la précision des données, mais aussi de la pertinence des hypothèses de linéarité et de la clarté de la formulation mathématique.*

1.4 Résolution graphique d'un programme linéaire

La méthode graphique constitue une approche géométrique et visuelle de la programmation linéaire. Elle permet de comprendre la structure du problème et d'identifier le rôle fondamental joué par les *points extrêmes* (ou sommets) de la région réalisable.

1.4.1 Géométrie de la programmation linéaire

La programmation linéaire repose sur des objets géométriques fondamentaux issus de la géométrie convexe. Dans cette sous-section, nous introduisons les notions de demi-espace, cône, convexité, polyèdre et polytope, qui sont essentielles pour comprendre la

structure géométrique des problèmes linéaires.

Convexité et ensembles convexes

Un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit **convexe** si, pour tout couple de points $x, y \in S$, le segment qui les relie est entièrement contenu dans S :

$$\forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in S.$$

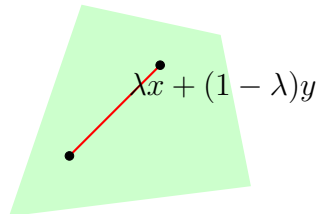


FIGURE 1.2 – Illustration de la convexité : tout segment entre deux points de S reste dans S .

Demi-espaces et demi-plans

Soit une inégalité linéaire du type :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b.$$

L'ensemble des points $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfont cette inégalité définit un **demi-espace fermé** de $\mathbb{R}^n$. L'hyperplan

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

constitue la **frontière** du demi-espace. Si l'inégalité est stricte ($<$ au lieu de $\leq$), on obtient un **demi-espace ouvert**.

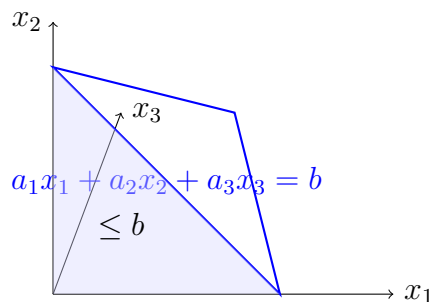


FIGURE 1.3 – Représentation d'un demi-espace dans $\mathbb{R}^3$ (approximation).

Dans le cas particulier où $n = 2$, l'inégalité linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

définit un **demi-plan fermé** du plan $\mathbb{R}^2$, limité par la droite $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Cette droite représente la **frontière** du demi-plan.

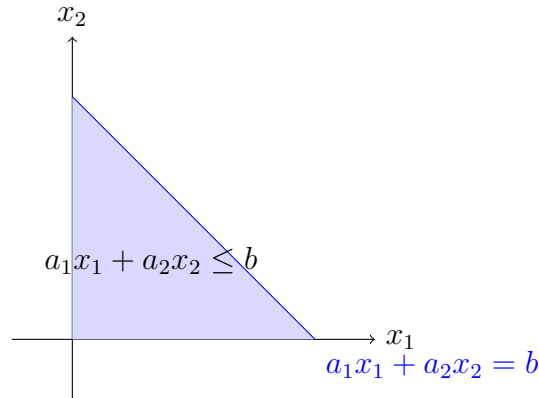


FIGURE 1.4 – Représentation d'un demi-plan défini par une inégalité linéaire.

Cônes convexes

Un ensemble $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est un **cône convexe** si, pour tout $x, y \in C$ et tout $\alpha, \beta \geq 0$,

$$\alpha x + \beta y \in C.$$

Autrement dit, tout multiple positif d'un point de C appartient encore à C .

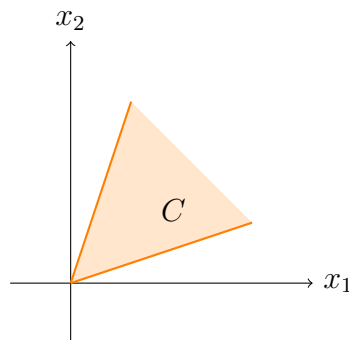


FIGURE 1.5 – Exemple d'un cône convexe.

Les cônes jouent un rôle essentiel dans l'analyse des directions admissibles et dans la formulation du cône dual en programmation linéaire.

— Polyèdres et polytopes

Un **polyèdre** est un ensemble convexe défini comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}.$$

Si le polyèdre P est borné, il est appelé **polytope**. Les sommets du polytope correspondent aux solutions de base réalisables d'un programme linéaire.

Voici deux exemples illustratifs en $\mathbb{R}^2$ et en $\mathbb{R}^3$:

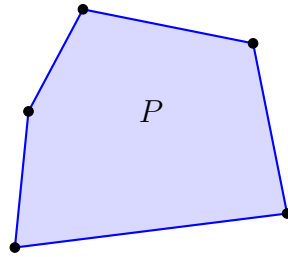
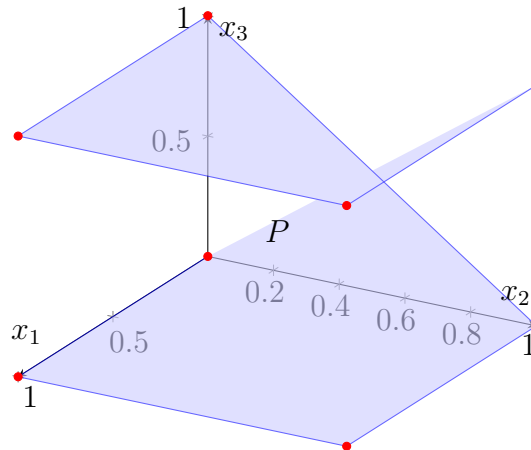


FIGURE 1.6 – Exemple de polytope défini par l'intersection de plusieurs demi-espaces.

FIGURE 1.7 – Exemple de polyèdre et polytope dans $\mathbb{R}^3$.

Lien avec la programmation linéaire

La région réalisable d'un programme linéaire est toujours un polyèdre convexe :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

La fonction objectif $Z = c^T x$ étant linéaire, ses niveaux d'égalité (*isoprofits*) sont des hyperplans parallèles. Le point optimal est alors l'un des sommets (points extrêmes) du polyèdre S , conformément au théorème fondamental de la programmation linéaire.

1.4.2 Principe général

Considérons un programme linéaire sous la forme standard :

$$\text{Maximiser } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad \text{sous les contraintes} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \vdots \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Chaque contrainte définit un *demi-espace fermé* du plan, et la région réalisable S est l'intersection de ces demi-espaces. Géométriquement, S est un *polytope convexe* (ou polygone) éventuellement non borné.

La fonction objectif $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$ est représentée par une famille de droites parallèles (*droites d'isoprofit*) de direction donnée par le vecteur normal $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$. Le problème consiste à déplacer cette droite dans la direction du gradient $\mathbf{c}$ jusqu'à son dernier contact avec la région réalisable : ce point de contact est la solution optimale.

Justification théorique

Selon le *théorème fondamental de la programmation linéaire*, si un programme linéaire admet une solution optimale, alors celle-ci est atteinte en un **point extrême** du polyèdre réalisable :

$$Z^* = \max_{x \in S} (c_1 x_1 + c_2 x_2) = \max_{x \in \text{extr}(S)} (c_1 x_1 + c_2 x_2),$$

où $\text{extr}(S)$ désigne l'ensemble des points extrêmes de S .

Ainsi, la méthode graphique consiste simplement à :

1. tracer la région réalisable dans le plan,
2. identifier ses sommets (points extrêmes),
3. calculer la valeur de Z à chacun d'eux,
4. et retenir celui donnant la plus grande (ou la plus petite) valeur selon le type de problème.

Cas particulier et dégénérescence

Une solution de base réalisable est dite *dégénérée* lorsque certaines variables de base sont nulles, ce qui correspond à un sommet où plusieurs contraintes actives se rencontrent. Il peut également exister plusieurs sommets donnant la même valeur optimale Z^* — la fonction objectif est alors parallèle à une arête du polygone réalisable, et tout point de cette arête est solution optimale.

Cas à plus de deux variables

La méthode graphique s'applique directement aux programmes à *deux variables de décision*. Cependant, elle reste utile pour les problèmes de dimension supérieure :

- **Visualisation partielle** : en étudiant des projections sur des plans (x_i, x_j) .
- **Réduction dimensionnelle** : lorsqu'on peut exprimer certaines variables en fonction des autres à partir des contraintes d'égalité.
- **Analyse paramétrique** : pour observer la sensibilité du modèle aux variations des coefficients.

Ainsi, bien que limitée en dimension, la méthode graphique constitue un outil de compréhension géométrique essentiel.

Exemple d'application

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } Z = 6x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

La forme standard s'écrit :

$$\text{Maximiser } Z = 6x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + e_1 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 + e_2 = 6, \\ x_1 - x_2 + e_3 = 2, \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0. \end{cases}$$

La matrice associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le point $X_0 = (0, 0, 8, 6, 2)$ est une solution de base réalisable, avec $Z(X_0) = 0$.

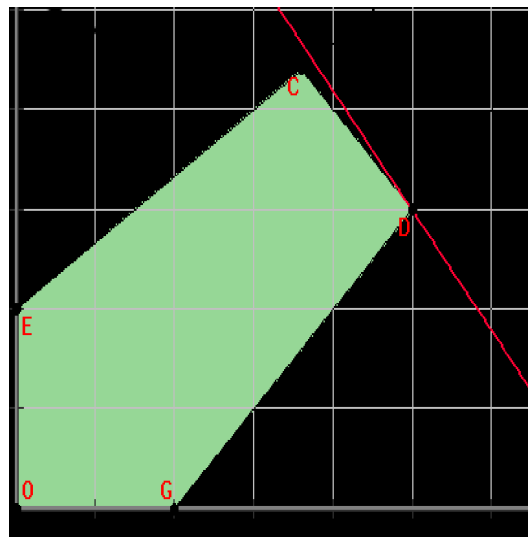


FIGURE 1.8 – Représentation graphique de la région réalisable.

Les droites de contraintes délimitent un polygone convexe dont les sommets sont :

$$O(0,0), \quad G(2,0), \quad D(5,3), \quad C\left(\frac{18}{5}, \frac{22}{5}\right), \quad E(0,2).$$

On calcule :

$$Z(O) = 0, \quad Z(G) = 12, \quad Z(D) = 45, \quad Z(C) = \frac{218}{5}, \quad Z(E) = 10.$$

La valeur maximale $Z^* = 45$ est atteinte en $D(5,3)$.

Interprétation géométrique

Le vecteur $\mathbf{c} = (6, 5)$ est normal aux droites d'isoprofit. Dans le cas d'une maximisation, le déplacement dans la direction de $\mathbf{c}$ augmente la valeur de Z . Ainsi, la recherche de l'optimum revient à traduire la droite d'isoprofit dans cette direction jusqu'à son dernier point de contact avec la région réalisable.

Si la région réalisable est non bornée et que la direction de $\mathbf{c}$ appartient au cône des directions admissibles, le problème est non *borné* (la fonction objectif croît indéfiniment).

Portée scientifique et pédagogique

Bien que la méthode graphique ne soit directement applicable que pour les problèmes à deux variables, elle :

- illustre le lien fondamental entre la convexité de la région réalisable et la linéarité de la fonction objectif ;
- met en évidence la correspondance entre *solution de base réalisable* et *point extrême* ;
- permet de visualiser les phénomènes de dégénérescence et de multiplicité de solutions ;
- sert de support intuitif pour comprendre les méthodes algorithmiques telles que le *simplexe* ou la *dualité*.

Ainsi, la résolution graphique n'est pas seulement une méthode de résolution élémentaire, mais un outil géométrique et conceptuel fondamental pour l'analyse et la compréhension de la programmation linéaire.