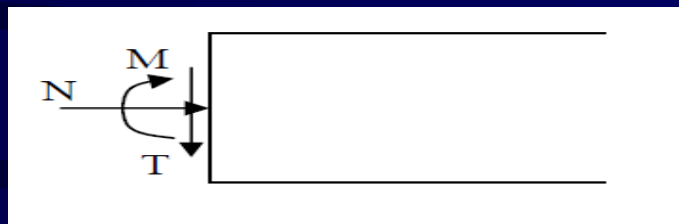


I. Définition:(Rappel RDM): La flexion composée provient de l'action conjuguée d'une flexion due à un chargement latéral (**flexion simple**) et d'un effort axial (**traction ou compression**) ou seulement de l'effet d'un **effort normal excentré** par rapport à l'axe moyen de l'élément. On considérera qu'une poutre est soumise à de la flexion composée lorsque les éléments de réduction du torseur des efforts internes de cohésion se réduisent à :

N : l'effort normal,
T : l'effort tranchant
M : le moment fléchissant

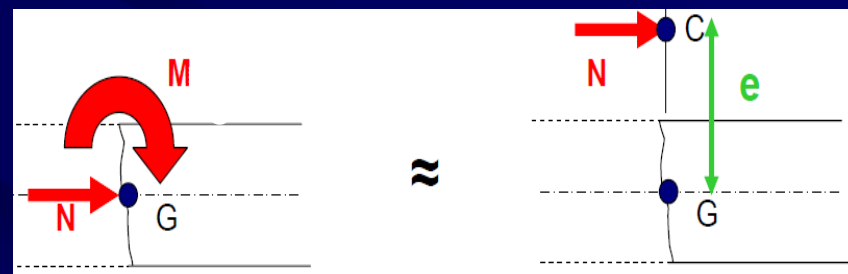


$N(x) \neq 0$	$T(x) = 0$
$V_y(x) \neq 0$	$M_y(x) = 0$
$V_z(x) = 0$	$M_z(x) \neq 0$

Le système formé par le moment fléchissant (M) et l'effort normal (N) peut être remplacé par une force unique équivalente à (N) et appliquée au point (**C**) appelé point d'application ou **centre de pression**. Donc on remplace $(M, N) \rightarrow N$ au centre de pression tel que la distance GC est l'excentricité e .

$$GC = e = \frac{M}{N}$$

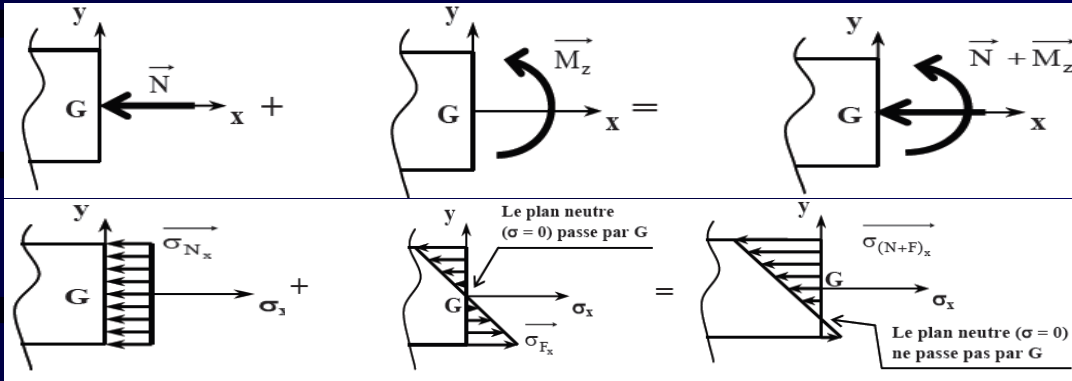
G : le centre de gravité



A noter que l'effort normal sera :

- « Positif » pour « la compression » ;
- « Négatif » pour « la traction ».

I.1° Expression de la contrainte normale σ_x : L'effort normal N crée des contraintes normales uniformes $\sigma_x = \frac{N}{S}$ qui sont des compressions ou des tractions selon le sens de N . Le moment de flexion M_Z crée des contraintes normales: $\sigma_{Fx} = \frac{M_Z}{I_{GZ}} y$ qui sont des compressions et des tractions en fonction de y .



$$\sigma_x = \frac{N}{S} + \sigma_{Fx} = -\frac{M_Z}{I_{GZ}} y$$

$$= \frac{N}{S} - \frac{M_Z}{I_{GZ}} y$$

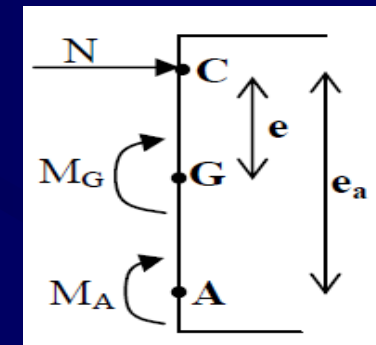
En flexion composée, il faut toujours préciser en quel point on effectue la réduction des forces car la valeur des moments est dépendante de ce point. Ce point sera normalement:

- soit au centre de gravité G de la section du béton (sans armatures): Moment M_G , excentricité

$$e = \frac{M_G}{N}$$

- soit au centre de gravité A des armatures tendues : Moment M_A , excentricité

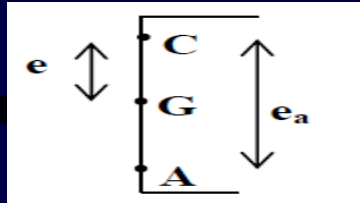
$$e_a = \frac{M_A}{N}$$



Points de réduction des forces en flexion composée

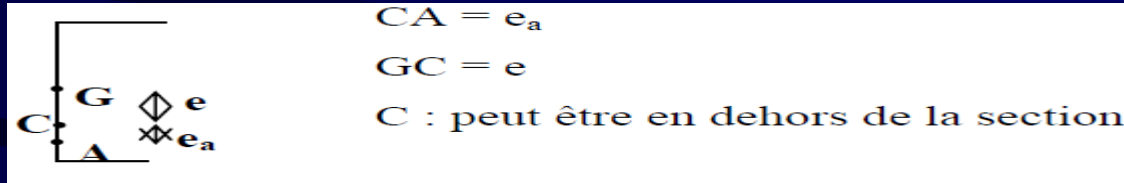
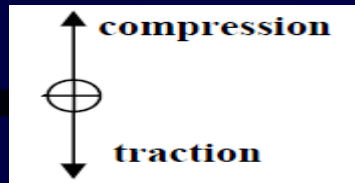
I.2°/ Position de l'axe neutre : En flexion composée, la première chose à faire est de chercher la position du centre de pression (C)

- Si (N) est un **effort de compression** (C) sera posé au dessus de (G).



$e_a > e$

- Le point (C) peut se situer en dehors de la section donc: $e > h/2$.
- Si (N) est un **effort de traction** (C) sera posé au dessous de (G). ((C) est du même côté que (A) par rapport à (G)).

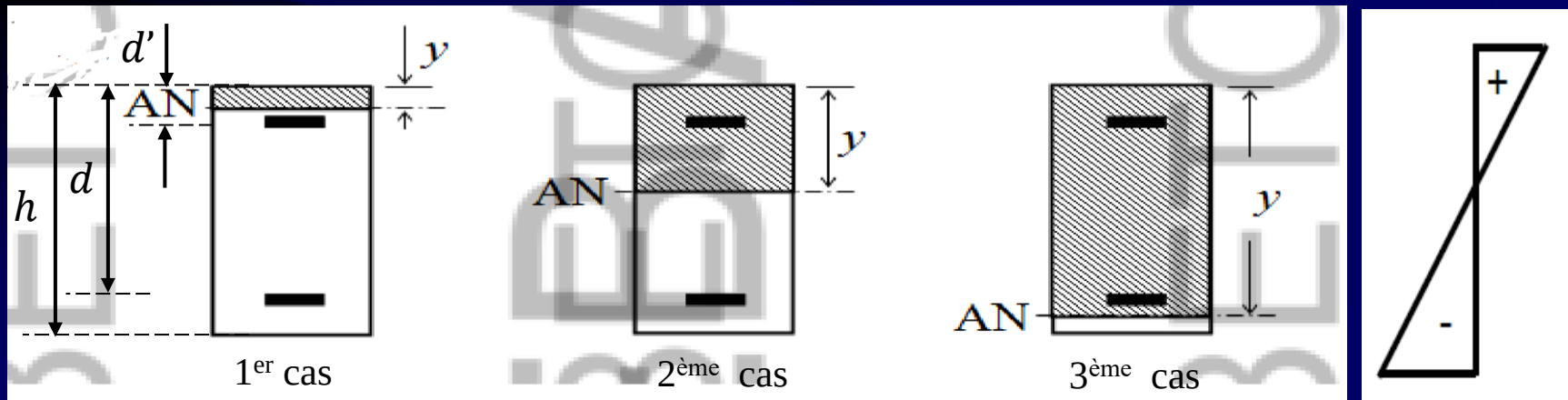


Les équations d'équilibre en flexion composée s'établissent de la même manière que la flexion simple avec 3 différences :

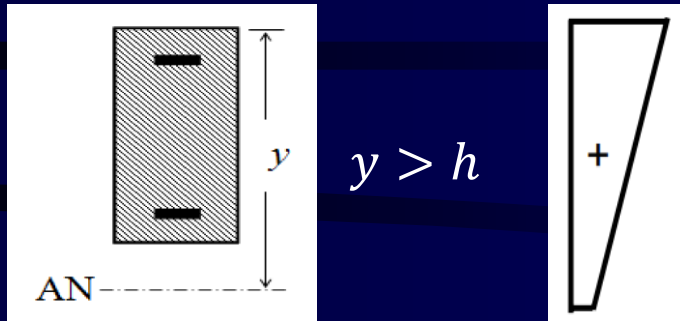
- $N \neq 0$.
- La section peut être totalement comprimée.
- Les sollicitations doivent être calculées à l'origine, que nous prendrons le point (A).

Ainsi, en fonction de la position de l'axe neutre, on peut distinguer trois cas possibles en flexion composée :

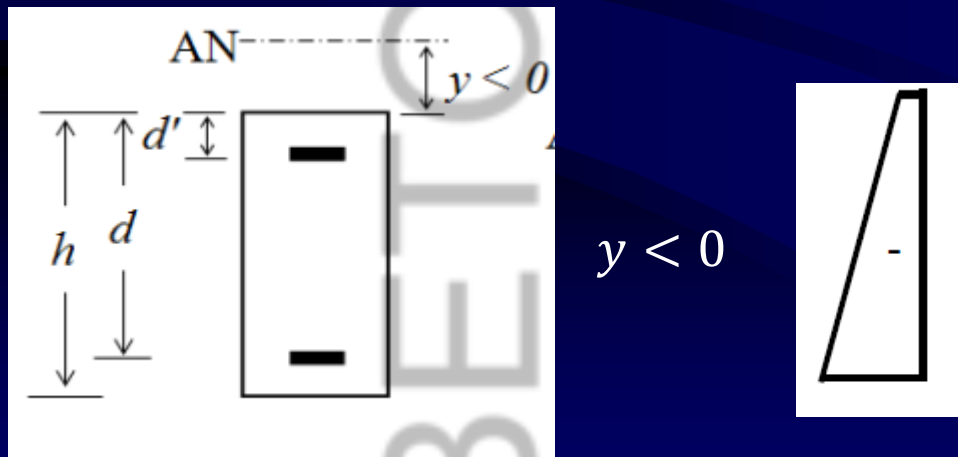
- a. La section peut être **partiellement comprimée** sous un effort de traction ou compression, dans ce cas, l'axe neutre traverse la section droite ($0 < y < h$, où h est la hauteur totale de la section) : Nous avons 3 cas de position de l'axe neutre :
- ✓ si $0 < y < d'$ (1^{er} cas), seules les fibres supérieures du béton (enrobage) sont comprimées et les armatures A_s et A_s' sont toutes tendues : A_s sont les plus tendues et A_s' sont les moins tendues (Les deux nappes d'armatures sont tendues);
 - ✓ si $d' \leq y < d$ (2^{ème} cas), une partie du béton et les armatures A_s' sont comprimées comme en flexion simple et les armatures A_s sont tendues (une seule nappe d'armatures est tendue);
 - ✓ si $d \leq y < h$ (3^{ème} cas), seule une toute petite partie des fibres inférieures (enrobage) est tendue; les armatures A_s' et A_s sont toutes comprimées: les armatures A_s' sont les plus comprimées et les armatures A_s sont les moins comprimées (Les deux nappes d'armatures sont comprimées).



b .La section peut être **entièrement comprimée** sous un effort de compression, dans ce cas, l'axe neutre est en dehors de la section ($y > h$); le béton, de même que les armatures A_s et A_s' sont comprimés : les armatures A_s' sont les plus comprimées et les armatures A_s sont les moins comprimées:



C . La section peut être entièrement tendue sous un effort de traction, dans ce cas, l'axe neutre est en dehors de la section ($y < 0$); les armatures A_s sont les plus tendues et les armatures A_s' sont les moins tendues:



$y < 0$	$0 \leq y < d'$	$d' \leq y < d$	$d \leq y < h$	$y \geq h$
Section entièrement tendue	Section avec deux nappes d'aciers tendus	Section avec une seule nappe d'acier tendu	Section avec deux nappes d'aciers comprimés	Section entièrement comprimée
	$0 \leq y \leq h \rightarrow$ section partiellement tendue			

Différents cas de position de l'axe neutre en flexion composée

II- Excentricité:

II.1- Cas d'un effort normal de traction ($N < 0$) : les Sollicitations à considérer:

- **E.L.S :**
$$\begin{cases} N_{ser} = \sum_i N_i \\ M_{ser} = \sum_j M_j \end{cases} \Rightarrow e_{ser} = \frac{M_{ser}}{N_{ser}}$$

- **E.L.U:**
$$\begin{cases} N_u = \sum_i \gamma_i N_i \\ M_u = \sum_j \gamma_j M_j \end{cases} \Rightarrow e_u = \frac{M_u}{N_u}$$

γ : coefficient multiplicateur (coefficient partiel de sécurité)

II.2- Cas d'un effort normal de compression ($N > 0$) : les Sollicitations à considérer:

- **E.L.S:**
$$\begin{cases} N_{ser} = \sum_i N_i \\ M_{ser} = \sum_j M_j \end{cases} \Rightarrow e_{ser} = \frac{M_{ser}}{N_{ser}}$$

- **E.L.U:** Dans ce cas où les sections en BA soumises à un effort normal de compression, il y a un risque de flambement. Ces sections doivent être justifiées vis-à-vis de l'état limite ultime de stabilité de forme, par mesure de sécurité, en remplaçant la valeur de l'excentricité réelle de l'effort normal appliqué par la valeur d'une excentricité totale de calcul: $e = e_1 + e_2$ tel que:

Excentricité du 1^{er} ordre à l'ELU à pour valeur: $e_1 = e_0 + e_a$ **tel que:**

e_1 : excentricité du premier ordre résultant des efforts appliqués

$$e_1 = \frac{\sum_j \gamma_j M_j}{\sum_i \gamma_i N_i} + e_a$$

e_0 : excentricité (dite du premier ordre) de la résultante des contraintes normales, avant application des excentricités additionnelles:

$$e_0 = \frac{\sum_j \gamma_j M_j}{\sum_i \gamma_i N_i}$$

e_a : excentricité additionnelle traduisant les imperfections géométriques initiales (après exécution):

$$e_a = \max \left\{ \frac{2cm}{l} \right. = \text{excentricité additionnelle}$$

avec l : longueur de la pièce exprimée en cm.

Excentricité du second ordre: L'excentricité du deuxième ordre (e_2) liée à la déformation de la structure. Pour déterminer l'excentricité du second ordre, on distingue 2 cas de figure:

Si: $\frac{l_f}{h} > \text{Max} \left[15, 20 \frac{e_1}{h} \right]$ on doit vérifier la pièce à l'état limite ultime de stabilité de forme (vis-à-vis au flambement).

Si: $\frac{l_f}{h} \leq \text{Max} \left[15, 20 \frac{e_1}{h} \right]$ on détermine l'excentricité e_2 de façon forfaitaire : $e_2 = \frac{3l_f^2}{10^4 h} (2 + \alpha \phi)$

l_f : Longueur de flambement de la pièce, h : hauteur totale de la section dans la direction du flambement.

α : Le rapport du moment du premier ordre, dû aux charges permanentes et quasi-permanentes, au moment total du premier ordre, ces moments étant pris avant application des coefficients γ :

$$\alpha = \frac{M_{\text{perm}}}{M_{\text{perm}} + M_{\text{expl}}}$$

ϕ : c'est le rapport de la déformation finale due au fluage, à la déformation instantanée sous la charge considérée; ce rapport est généralement pris égal à 2 ($\phi = 2$).

Les sollicitations de calcul corrigées deviennent ainsi:

$$\begin{cases} N_u = \sum_i \gamma_i N_i \\ M_u = N_u (e_1 + e_2) \end{cases}$$

N_u : Reste inchangé.

III. Détermination des armatures :

III.1- Section entièrement tendue : Comme nous l'avons vu précédemment, la section est considérée entièrement tendue (à l'ELU comme à l'ELS) si:

- ✓ N est un effort normal de traction ($N < 0$).
- ✓ le centre de traction (C) est situé entre les nappes d'armatures.
- ✓ Le béton entièrement tendu n'intervient pas dans la résistance de la section => seul l'acier tendu résiste et le calcul sera autour du Pivot A: $\varepsilon_{st} = 10\text{‰}$, la contrainte vaut alors

$$\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

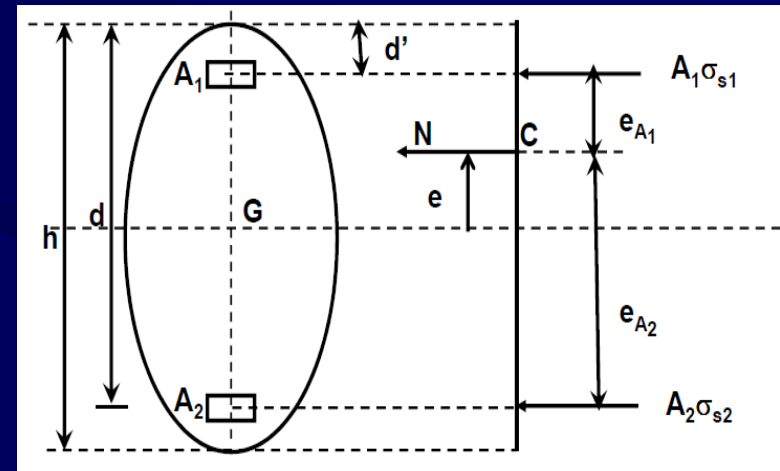
III.1-1. Calcul des armatures:

Le dimensionnement de la section se fait à partir du schéma suivant:

Dans ce cas, N_u peut être décomposé en deux efforts de traction des acier N_1 et N_2 passant par les centres de gravité des armatures supérieures et des armatures inférieures.

On a : A_1 la section des armatures supérieures et A_2 la section des armatures inférieures, Donc :

$$N_1 = A_1 \cdot \sigma_{s1} \text{ et } N_2 = A_2 \cdot \sigma_{s2}$$



On écrit l'équilibre de la section par rapport au centre de poussée:

L'équilibre des forces donne: $-N_u + N_1 + N_2 = 0$

Donc: $A_1 \sigma_{s1} + A_2 \sigma_{s2} = N$

La somme des moments par rapport à C : $\sum M/C = N_2 \cdot e_{A2} - N_1 \cdot e_{A1} = 0$

$$(A_2 \sigma_{s2}) e_{A2} = (A_1 \sigma_{s1}) e_{A1}$$

On a donc: $A_1 \sigma_{s1} + (A_1 \sigma_{s1}) \frac{e_{A1}}{e_{A2}} = N$

$$(A_1 \sigma_{s1}) e_{A2} + (A_1 \sigma_{s1}) e_{A1} = N e_{A2}$$

donc :

$$A_1 = \frac{N \times e_{A2}}{(e_{A1} + e_{A2}) \sigma_{s1}}$$

On remplace A_1 de l'équation d'équilibre des forces, on en déduit la valeur de A_2 :

$$A_2 = \frac{N \times e_{A1}}{(e_{A1} + e_{A2}) \sigma_{s2}}$$

Ce principe de dimensionnement est valable aussi bien à l'ELU qu'à l'ELS. Seule la contrainte maximale sur les aciers tendus change:

$$\begin{cases} \text{ELU} \Rightarrow N = N_u ; \sigma_{s1} = \sigma_{s2} = f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s} \\ \text{ELS} \Rightarrow N = N_{ser} ; \sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \overline{\sigma_s} \end{cases}$$

III.1-2 Section minimale : Dans le cas d'une section entièrement tendue, la section minimale d'armature à mettre en œuvre vaut:

$$A_1 + A_2 = A \geq A_{\min} = B \frac{F_{t28}}{F_e}$$

avec : $B = bh$

Exemple 1:

Considérons la poutre suivante :

Charges:

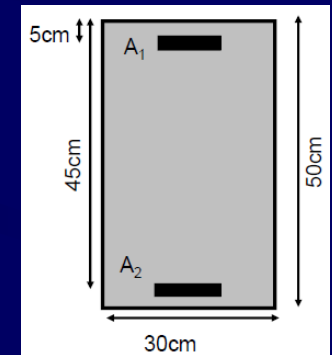
ELS: $N_{ser} = -0,322\text{MN}$; $M_{ser} = 0,0385\text{MN.m}$

ELU: $N_u = -0,460\text{MN}$; $M_u = 0,055\text{MN.m}$

Caractéristiques des matériaux : $f_{c28} = 25\text{MPa}$, FeE400

Fissuration préjudiciable.

- Calculer la section d'acier ($A_1 + A_2$)?



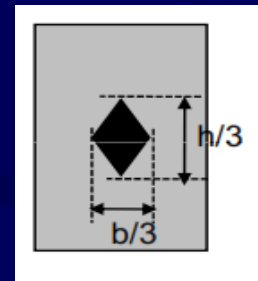
III.2- Section Partiellement Comprimée/Tendue (section rectangulaire):

Une section est considérée partiellement comprimée soit avec un effort normal de compression ou un effort normal de traction. On suppose qu'il existe une nappe d'armature comprimée: $d' \leq y \leq d$

Les critères de détermination d'une section partiellement tendue s'expriment différemment selon que l'on est en dimensionnement E.L.U ou E.L.S.

A l'E.L.S: Une section sera partiellement comprimée si M et N vérifient les deux conditions suivantes :

- Si $N_{ser} < 0$ (l'effort normal N_{ser} est un effort de traction) et le C (centre de traction) se trouve en dehors des armatures;
- Si $N_{ser} > 0$ (l'effort normal N_{ser} est un effort de compression) et le centre de pression C se trouve en dehors du noyau central ($e_0 \leq \frac{h}{6}$).



Noyau central

A l'E.L.U:

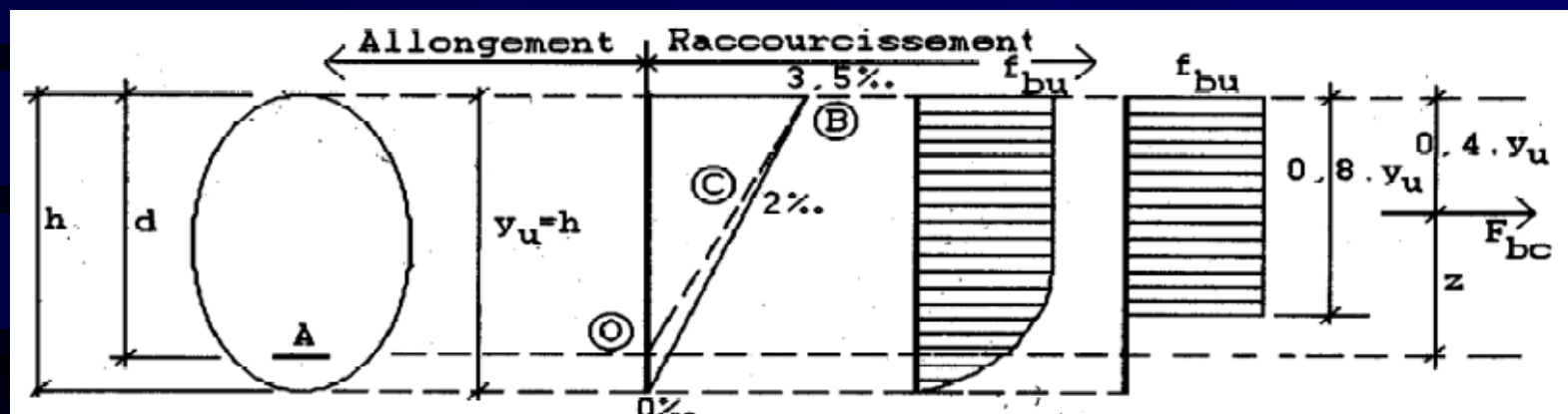
- $N_u < 0$ (N_u est un effort de traction) et le C (centre de traction) se trouve en dehors des armatures;
- $N_u > 0$ (N_u est un effort de compression), si la hauteur du béton comprime est de $y < h$.

III.2.1. Assimilation à la flexion simple:

Les moments étant calculés par rapport au centre de gravité des aciers tendus, l'équation qui exprime leur équilibre est identique à celle de la flexion simple, on vérifie ensuite l'équilibre des efforts normaux ce qui détermine les sections A_s et A'_s

Si N_u est un effort de compression ($N_u > 0$), si $y < h$

M_{uA} : Moment ultime calculé par rapport au centre de gravité des aciers tendus.



$$F_{bc} = 0,8 \times b_0 \times h \times F_{bu}$$

et

$$z = d - 0,4h$$

$$M_{BC} = F_{bc} \times z$$

F_{bc} : l'effort de compression centré maximale supportable par le béton.

soit, en considérant les moments par rapport aux aciers tendus :

M_{BC} : Le moment M_{BC} correspond au moment de flexion qu'il faut appliquer à la section pour qu'elle soit **entièrement comprimée (Pivot C)**.

On a donc: $M_{BC} = 0,8 \cdot \frac{h}{d} \cdot \left(1 - 0,4 \cdot \frac{h}{d}\right) \cdot b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}$ d'où: $\mu_{BC} = \frac{M_{BC}}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}} = 0,8 \cdot \frac{h}{d} \cdot \left(1 - 0,4 \cdot \frac{h}{d}\right)$

En pratique, il suffit donc de calculer le moment réduit de la section et de le comparer à la valeur de μ_{BC} , pour savoir si la section est entièrement ou partiellement comprimée, ce qui se traduit par:

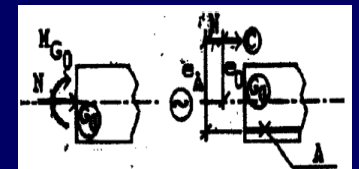
$$\mu_{bu} = \frac{M_{uA}}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}} \leq \mu_{BC} = 0,8 \cdot \frac{h}{d} \cdot \left(1 - 0,4 \cdot \frac{h}{d}\right) \approx 0.493$$

Non oui

SEC SPC

Dans les formules que nous venons d'appliquer, le moment M_{uA} est calculé par rapport au **C.D.G des aciers tendus**. Or, lorsque l'on détermine le moment $M_u = (e_1 + e_2)N_u$, il s'agit d'un moment par rapport au **CDG de la section de béton seul**. Il est donc impératif de calculer M_{uA} , moment fléchissant ultime par rapport au **CDG des aciers**.

Dans le cas d'une section rectangulaire, on a: $M_{uA} = M_u + N_u (d - h/2)$
 N_u étant pris avec son signe.

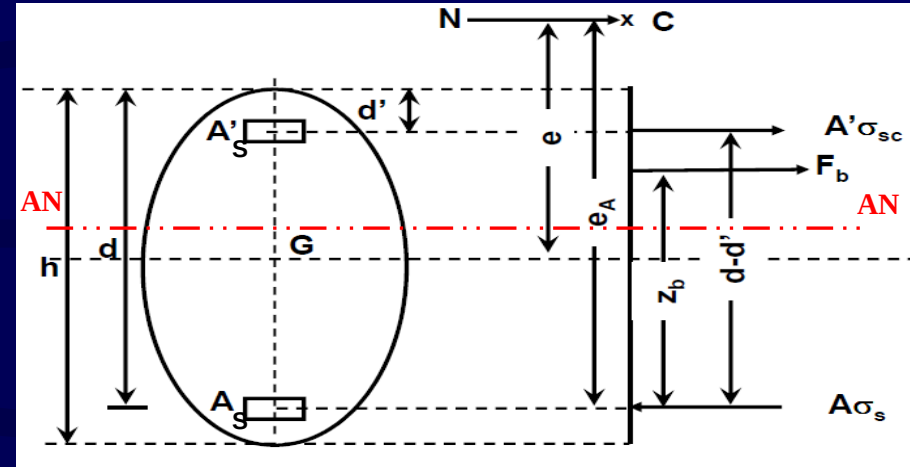


En prenant des moments par rapport aux aciers tendus, les équations d'équilibre s'écrivent:

$$\begin{cases} N e_A = F_b z_b + A' \sigma_{sc} (d - d') \\ N = F_b + A' \sigma_{sc} - A \sigma_s \Rightarrow F_b + A' \sigma_{sc} - \sigma_s \left(A + \frac{N}{\sigma_s} \right) = 0 \end{cases}$$

On pose :

$$\begin{cases} S' = A'_s \\ S = A_s + \frac{N}{\sigma_s} \Rightarrow \begin{cases} M_A = F_b z_b + S' \sigma_{sc} (d - d') \\ F_b + S' \sigma_{sc} - S \sigma_s = 0 \end{cases} \end{cases}$$



Ces équations sont des Equations d'équilibre d'une section sollicitée en flexion simple par un moment de flexion M_A

III.2.2.Calcul des armatures:

- Calculer le moment M_A (M_{uA} ou M_{serA}) par rapport aux armatures tendues
- Calculer en flexion simple les sections d'armatures S et S'
- Revenir a la flexion composée avec les armatures A_s et A'_s
- compression ($N > 0$) => diminution de la section d'aciers tendus trouvée en flexion simple.
- traction ($N < 0$) => augmentation de la section d'aciers tendus trouvée en flexion simple

$$\begin{cases} A'_s = S' \\ A_s = S - \frac{N}{\sigma_s} \end{cases}$$

III.2.3. Technique du calcul:

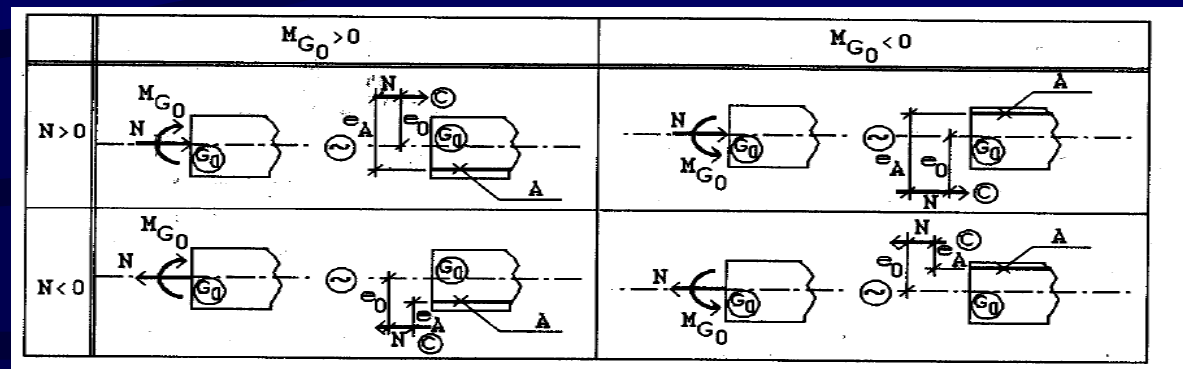
La technique de dimensionnement d'une section partiellement tendue (comprimé) en flexion composée est la suivante:

- ✓ On calcul le moment M_A (à l'ELU ou ELS) par rapport aux aciers tendus.
- ✓ On en déduit les sections A_s et A'_s par un dimensionnement en flexion simple.
- ✓ On détermine les aciers de flexion composée à partir de: $A'_s = S'$ et : $A_s = S - N/\sigma_s$.
- ✓ **ATTENTION**, l'effort normal N doit être considéré avec sa valeur algébrique:
 - Si N est une compression ($N > 0$) => on a **une diminution de la section d'aciers** trouvée en **flexion simple**, car la compression est favorable.
 - Si N est une traction ($N < 0$) => on a **une augmentation de la section d'aciers** trouvée en **flexion simple**, car la traction est défavorable.

Note:

- Si N est une compression C est à l'opposée (centre de gravité des aciers tendus) par rapport à G_0
- Si N est une traction, C et A sont du même coté par rapport à G_0

c.Position des aciers tendus:



d.Pourcentage minimal d'armatures: Pour une section rectangulaire en flexion composée partiellement tendue (comprimé), le pourcentage minimal d'armatures vaut:

$$A_{\min} = 0,23 \frac{F_{t28}}{F_e} b_0 d \frac{e - 0,45d}{e - 0,185d}$$

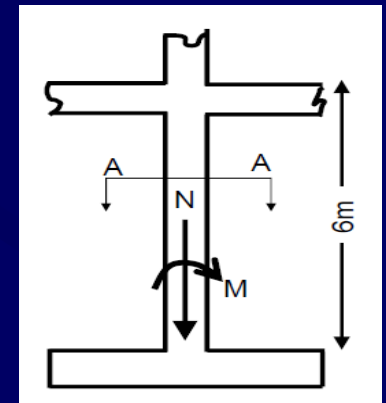
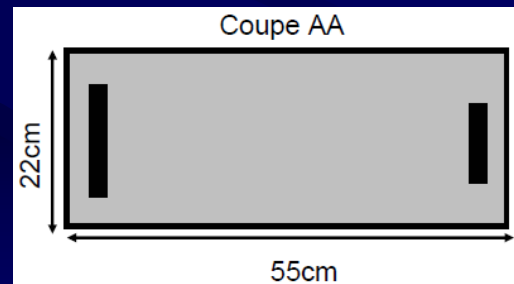
On remarque que si e tend vers l'infini, en flexion composé, on retrouve le pourcentage minimum de la flexion simple. **ATTENTION**, l'excentricité e doit être prise en compte à l'ELS et avec le même signe que l'effort normal N .

Exemple d'application:

$N_g = 85\text{kN}$; $N_q = 75\text{kN}$

- $M_g = 90\text{kN.m}$; $M_q = 80\text{kN.m}$
- $f_{c28} = 25\text{MPa}$, FeE500
- Fissurations peu préjudiciables

$\mu_{lu} = 0.372$



III.3. Sections en T partiellement tendues : On a deux cas de figure possibles:

$M_{uA} < M_{tu} \Rightarrow$ on se ramène au dimensionnement d'une section rectangulaire de largeur b , en flexion composée, et soumise à $(M_{uA}$ et $N_u)$.

donc le moment équilibré par la table seule est :

$$M_{tu} = b \cdot h_0 \cdot f_{bu} \cdot \left(d - \frac{h_0}{2} \right)$$

$M_{uA} > M_{tu} \Rightarrow$ calcul en section en T.

a. Dimensionnement des armatures si $M_{uA} > M_{tu}$:

Equilibre des moments:

$$M_{uA} = N \times e_A = F_{bc1} z_{b1} + F_{bc2} z_{b2}$$

Equilibre des efforts:

$$N = F_{bc1} + F_{bc2} - F_s$$

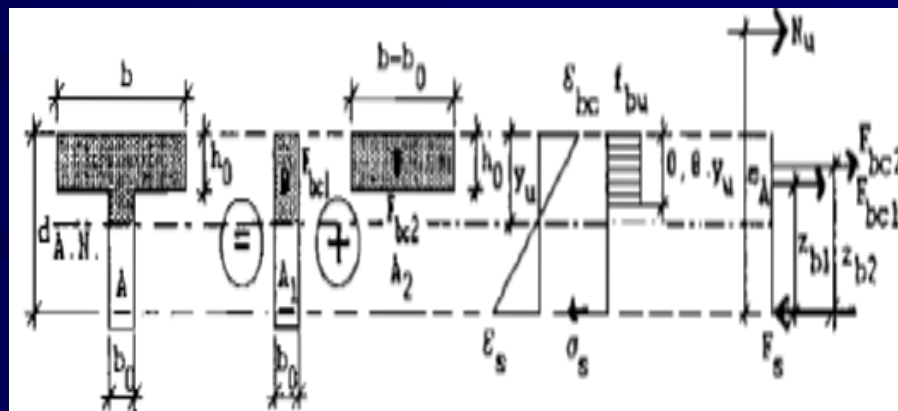
avec:

$$F_{bc1} = 0,8 b_0 y_u F_{bu} \text{ et } z_{b1} = d - 0,4 y_u$$

d'où:

$$M_{uA} = 0,8 b_0 y_u F_{bu} (d - 0,4 y_u) + (b - b_0) h_0 F_{bu} \left(d - \frac{h_0}{2} \right)$$

$$N_u = 0,8 b_0 y_u F_{bu} + (b - b_0) h_0 F_{bu} - A \sigma_s$$



On se rend compte que ces équations intègrent les termes liés à un dimensionnement en flexion simple. Pour les mettre en évidence, on pose:

$$N_{uR} = 0,8 b_0 y_u F_{bu} - A \sigma_s$$

Et: $M_{uR} = 0,8 b_0 y_u F_{bu} (d - 0,4 y_u)$ Ce qui nous donne:

$$M_{uR} = 0,8 b_0 y_u F_{bu} (d - 0,4 y_u)$$

$$N_{uR} = 0,8 b_0 y_u F_{bu} - A \sigma_s$$

Par identification, on obtient les relations suivantes:

$$A'_s = S'$$

$$A_s = S - \frac{N_{ur}}{\sigma_s}$$

b. Technique du calcul:

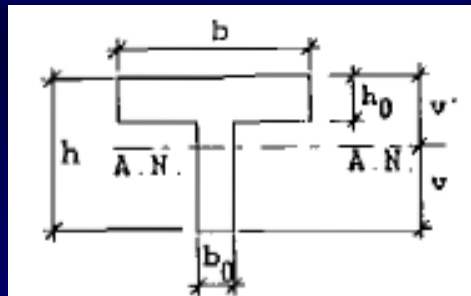
La technique de dimensionnement d'une section en Té partiellement tendue en flexion composée est la suivante:

- ✓ On calcul le moment MA (à l'ELU ou ELS) par rapport aux aciers tendus.
- ✓ On détermine si la table de compression est surabondante.
- ✓ Si non, calcul en section rectangulaire => voir paragraphe précédent.
- ✓ Si oui, on en déduit les sections S et S' par un dimensionnement en flexion simple, avec Mur et Nur.
- ✓ On détermine les aciers de flexion composée à partir de:

$$\begin{cases} A'_s = S' \\ A_s = S - \frac{N_{ur}}{\sigma_s} \end{cases}$$

C. Pourcentage minimal d'armatures: Pour une section en T en flexion composée partiellement tendue, le pourcentage minimal d'armatures vaut:

$$A_{\min} = B \frac{F_{t28}}{F_e} \times \frac{I}{d - \frac{h_0}{3}} \times \frac{e - v' + \frac{h_0}{3}}{B e v - I}$$



$$B = b_0 \cdot h + (b - b_0) \cdot h_0$$

$$v = \frac{b_0 \cdot h^2 + (b - b_0) \cdot h_0^2}{2 \cdot B} \quad v' = h - v$$

$$I = \frac{b_0 \cdot h^3}{3} + \frac{(b - b_0) \cdot h_0^3}{3} - B \cdot v^2$$

III.4- Sections entièrement comprimées: Nous avons vu précédemment qu'une section rectangulaire peut être considérée partiellement tendue (ou partiellement comprimée) si le point C se trouvait à l'extérieur des armatures.

ELU: => Calcul autour de pivot C; Ou => Ramener le calcul autour de pivot B

Ou => Utiliser diagramme d'interaction (N, M)

Il est recommandé d'adopter un ferrailage symétrique ($A_{1u}=A_{2u}$) pour réduire le risque de flambement => le plus souvent on ramène le calcul autour du pivot B.

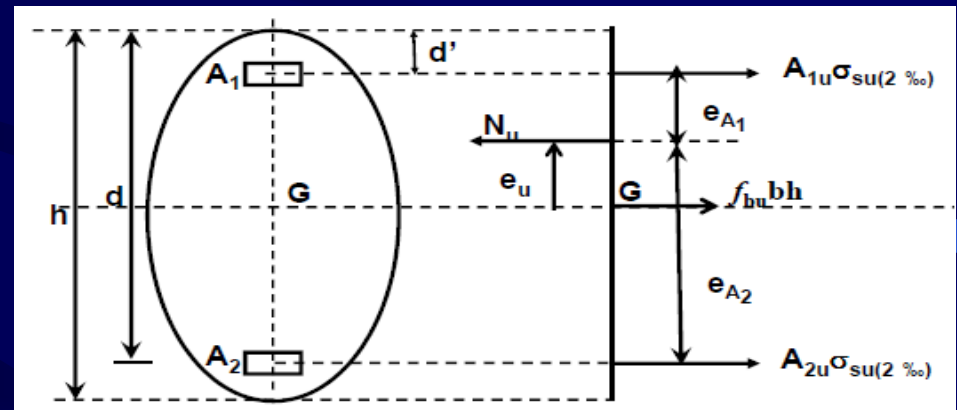
Calcul à l'ELU autour de Pivot C: • : déformation uniforme sur la section égale à

2‰:
$$\sigma_{su(2\text{‰})} = \begin{cases} f_{su} & \text{si Acier HA400} \\ 2\text{‰} E_s & \text{si Acier HA500} \end{cases}$$

Équilibre de la section:

$$\begin{cases} N_u = A_{1u} \sigma_{su(2\text{‰})} + A_{2u} \sigma_{su(2\text{‰})} + f_{bu} b h \\ N_u e_{A2} = A_{1u} \sigma_{su(2\text{‰})} (d - d') + f_{bu} b h (e_{A2} - e_u) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_{1u} = \frac{N_u e_{A2} - f_{bu} b h (e_{A2} - e_u)}{(d - d') \sigma_{su(2\text{‰})}} \\ A_{2u} = \frac{N_u - f_{bu} b h}{\sigma_{su(2\text{‰})}} - A_{1u} \end{cases}$$



Pour une section rectangulaire:

$$e_{A1} = \left(\frac{h}{2} - d' - e_u \right)$$

$$e_{A2} = \left(e_u + d - \frac{h}{2} \right)$$

Exemple d'application:

- $f_{c28} = 25\text{MPa}$, FeE400
- Fissurations peu prejudiciables
- $N_u = 1,045\text{MN}$
- $M_{uG} = 0,1463\text{ MN.m}$
- $l_0 = 4\text{m}$
- $\alpha = 0,5$

