

CENTRE UNIVERSITAIRE DE MILA
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT SCIENCES ET TECHNIQUE

Béton armé 2
(3ème Année G.C)

➡ **Responsible:** Dr. SOLTANE Mohamed Abdelali

➡ ANNEE UNIVERSITAIRE 2024- 2025

. PROGRAMME DU COURS :

1.Chapitre 01 :Flexion simple

Section rectangulaire et section en T: Etat limite ultime de résistance + état limite de service

2.Chapitre 02 : Effort tranchant

- ✓ Calcul des armatures transversales.
- ✓ Résistance du béton de la bielle
- ✓ Justifications aux appuis.

3. Chapitre 03 : Flexion composée

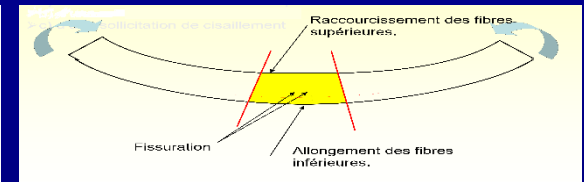
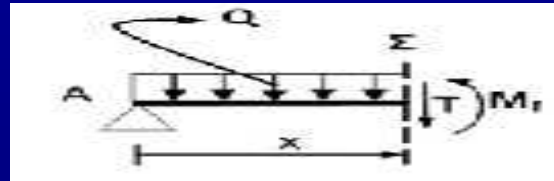
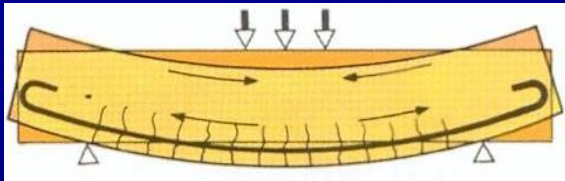
- ✓ Calcul des sections aux états limites section rectangulaire et en T
- ✓ Flambage des poteaux comprimés

4.Chapitre 4 : Torsion

- ✓ Aperçu général sur le phénomène de torsion et justification du béton et des armatures (Sections creuses et pleines).
- ✓ Justification des poutres sous sollicitation de torsion

**Calcul de sections en béton armé
soumises à la flexion simple**

Définition: Une poutre à plomb moyen est soumise à la flexion simple qu'elles soient isostatiques ou continues si les sollicitations se réduisent à un moment fléchissant M_f et un effort tranchant T (l'effort normal est zéro $N = 0$).



En béton armé, l'action du moment fléchissant conduit au dimensionnement des armatures longitudinales et l'action de l'effort tranchant concerne le dimensionnement des armatures transversaux (cadres, épingles ou étriers).

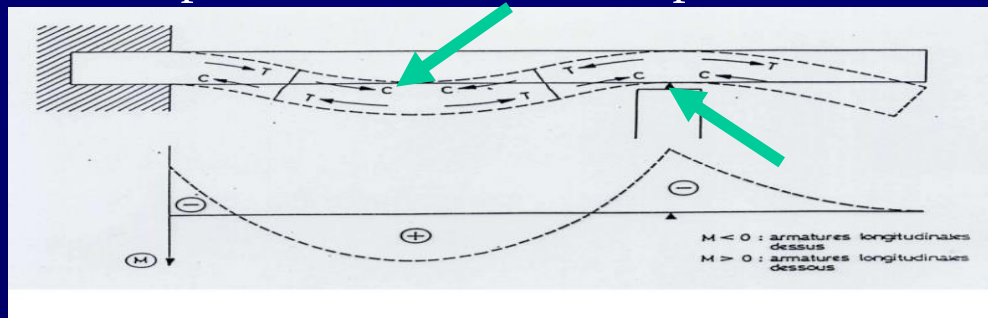
Ces deux calculs sont menés séparément, dans ce chapitre, on présente les calculs relatifs au moment fléchissant en considérant les deux états limites (l'E.L.U et l'E.L.S), et en étudiant les sections rectangulaires et en T avec ou sans armatures comprimées

I. Calcul des armatures longitudinales à l'E.L.U.

I.1. Hypothèses de calcul

- ✓ La résistance du béton tendu est négligée ou la résistance à la traction du béton non prise en compte dans les calculs, elle est reprise par l'acier ;
- ✓ Les sections droites restent planes et il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures et le béton (C'est-à-dire que le diagramme des déformations de la section est linéaire (La déformation de deux matériaux est la même)) ;
- ✓ La section d'acier est concentrée en son centre de gravité;
- ✓ Le béton prend les contraintes de compression et l'Acier prend les contraintes de traction et de compression;
- ✓ Les sections du béton comprimées dans une poutre continue:
 - ❖ Sur appuis, la nappe inférieure de la poutre travaille en compression;
 - ❖ En travée, la nappe supérieure de la poutre travaille en compression.

Parties tendues et comprimées



- ✓ Le diagramme contrainte-déformation du béton est donné par la loi rectangulaire simplifié

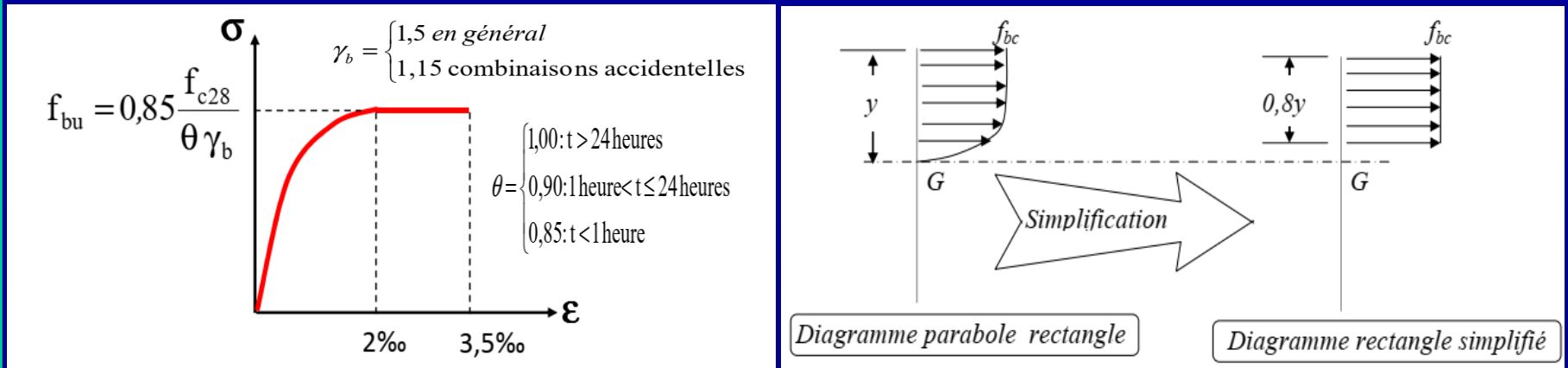


Diagramme parabolique - rectangle

Passage au diagramme rectangulaire simplifié

- ✓ Le diagramme contrainte-déformation de l'acier est donné par la loi de comportement élasto-plastique parfait

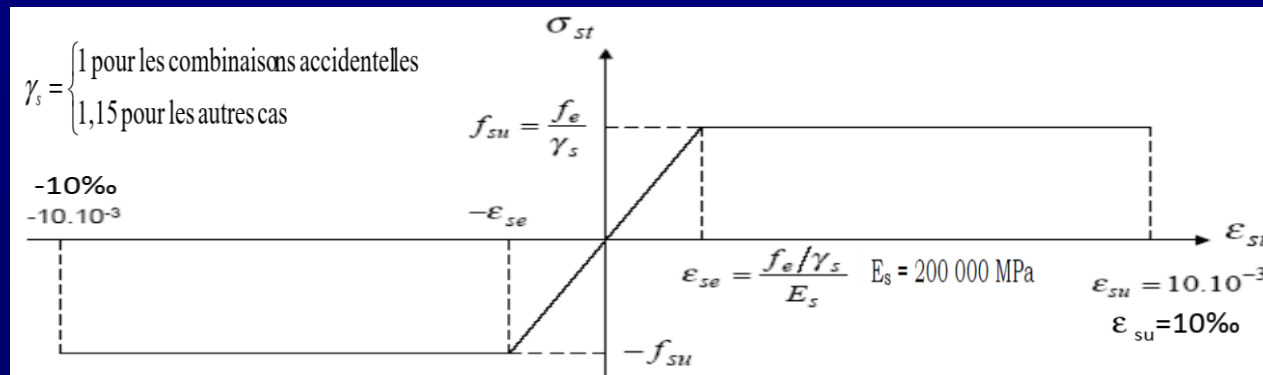


diagramme de contrainte- déformation de l'acier au ELU

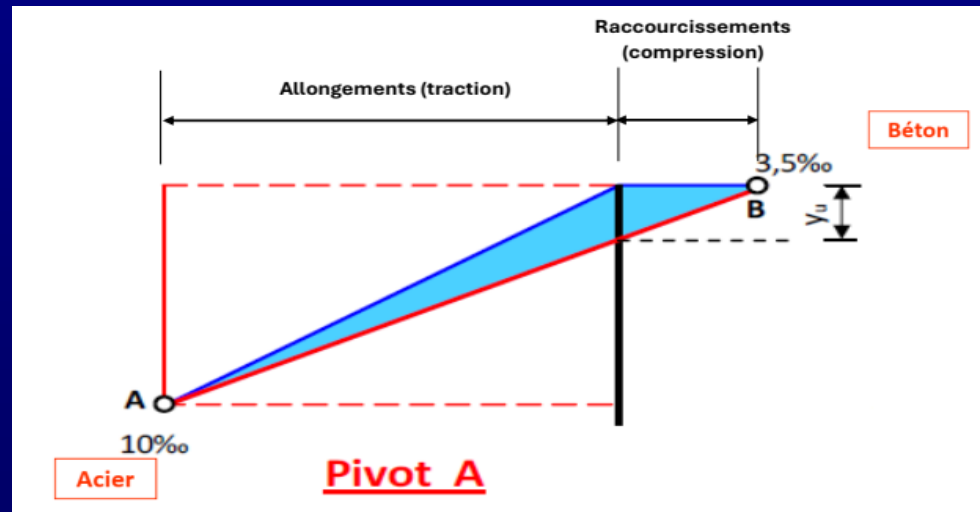
- ✓ Quelques soit les sollicitations agissantes sur une section droite, les déformations des sections sont limitées par:
- ❖ L'allongement relatif de l'acier le plus tendu sera limité à: $\epsilon_{st} = 10 \text{ ‰}$;
- ❖ Le raccourcissement relatif du béton en **flexion** sera limité à : $\epsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$;
- ❖ Le raccourcissement relatif du béton en **compression simple** sera limité à : $\epsilon_{bc} = 2 \text{ ‰}$.
- ✓ Suivant la règle des « **trois pivots** », le diagramme de déformation d'une section, sollicitée en flexion simple à l'état limite ultime de résistance, représenté par une droite passe obligatoirement par l'un des pivots: A ou B. Cette règle se fixe comme objectif pour utiliser au mieux le béton et l'acier à leurs maximum .

I.2 Diagrammes de déformation à l'état limite ultime

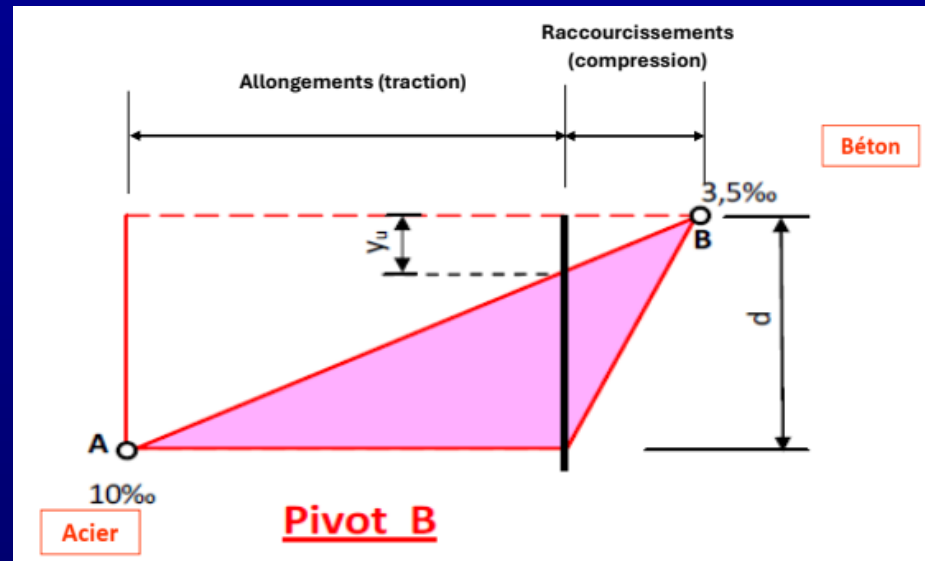
Le dimensionnement optimisé d'une section en béton armé exige un diagramme de déformations qui passe par une déformation limite, soit du béton, soit de l'acier. Ces déformations limites sont caractérisées par les pivots;

Deux pivots permettent de différencier le mode de fonctionnement de la section:

- ✓ **Etat limite ultime au pivot A:** Cet état limite est caractérisé par les déformations suivantes :
 - La déformation des aciers tendus correspond à la déformation maximale admissible de l'acier (Les diagrammes passent par le pivot A qui correspond à un allongement maximum de $\epsilon_{st} = 10\text{‰}$);
 - $0 \leq \epsilon_{bc} \leq 3,5\text{‰}$.



- ✓ Etat limite ultime au pivot B: Cet état limite est caractérisé par les déformations suivantes :
- $0 \leq \varepsilon_{st} \leq 10\text{‰}$;
 - La déformation de la fibre de béton la plus comprimée correspond à la déformation maximale admissible (Les diagrammes passent par le pivot B qui correspond à un raccourcissement de $\varepsilon_{bc} = 3,5\text{‰}$ de la fibre la plus comprimée).



On note y_u la distance de l'axe neutre à la fibre supérieure de la section (soit la profondeur de l'axe neutre); la valeur de y_u détermine celui des domaines dans lequel est situé le diagramme limite.

Positions particulières de l'axe neutre: L'hypothèse de continuité des déformations dans la section (pas de glissement des armatures par rapport au béton) conduit à l'équation suivante issues des triangles semblables :

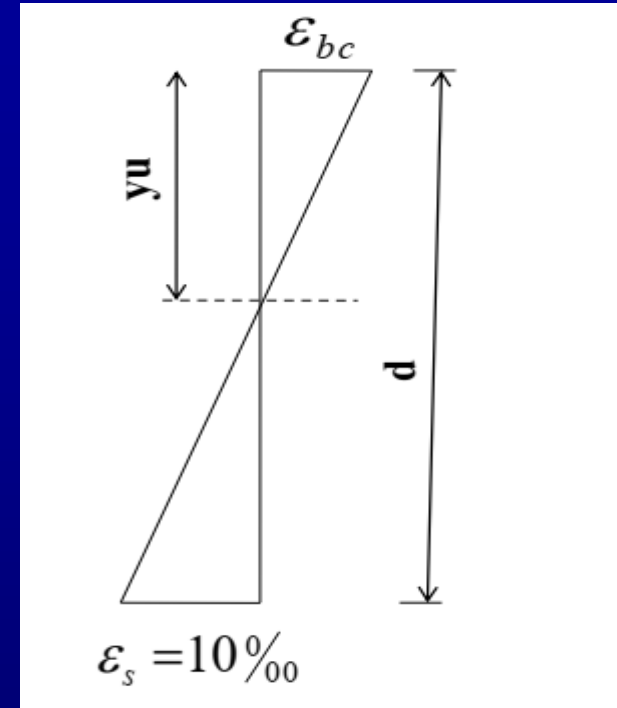
$$\frac{y_u}{\varepsilon_b} = \frac{d - y_u}{\varepsilon_s}$$

De cette relation on peut déduire l'équation suivante :

$$\frac{y_u}{d} = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_s}$$

En posant :

$$\alpha_u = \frac{y_u}{d}$$



α_u : position relative de la fibre neutre par rapport à la fibre la plus comprimée (profondeur relative de l'axe neutre), on peut écrire que :

$$\alpha_u = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b + \varepsilon_s}$$

NOTATION :

ϵ_{bc} : la déformation du béton à la compression.

ϵ_s : la déformation de l'acier tendue.

y_u : la distance de l'axe neutre à la fibre comprimée (la position de la axe neutre par rapport à la fibre le plus comprimé du béton).

d : la hauteur utile (la distance de la fibre la plus comprimée au centre de gravité des armatures tendues).

Valeurs particulières de α_u :

- Dans le cas particulier, pour un allongement de l'acier de 10 ‰ et un raccourcissement du béton de 3,5 ‰, la droite des déformations passe par les pivots A et B alors :

$$\alpha_u = \alpha_A = \frac{3.5}{3.5+10} = 0.2591$$

Pour déterminer le pivot, on compare la valeur de la profondeur relative de l'axe neutre α_u à la valeur 0.259. Dans ce cas particulier où $\alpha_u = 0.259$, l'état limite ultime est atteint simultanément dans les aciers tendus (pivot A) et dans le béton comprimé (pivot B).

A partir des diagrammes de déformations ci-dessous nous pouvons constater que :

- Si $\alpha_u < 0.259$; l'état limite est atteint sur l'acier à $\epsilon_{st} = 10 ‰$ ➡ **Pivot A**
- Si $\alpha_u > 0.259$; l'état limite est atteint sur le béton à $\epsilon_{bc} = 3,5 ‰$ ➡ **Pivot B**

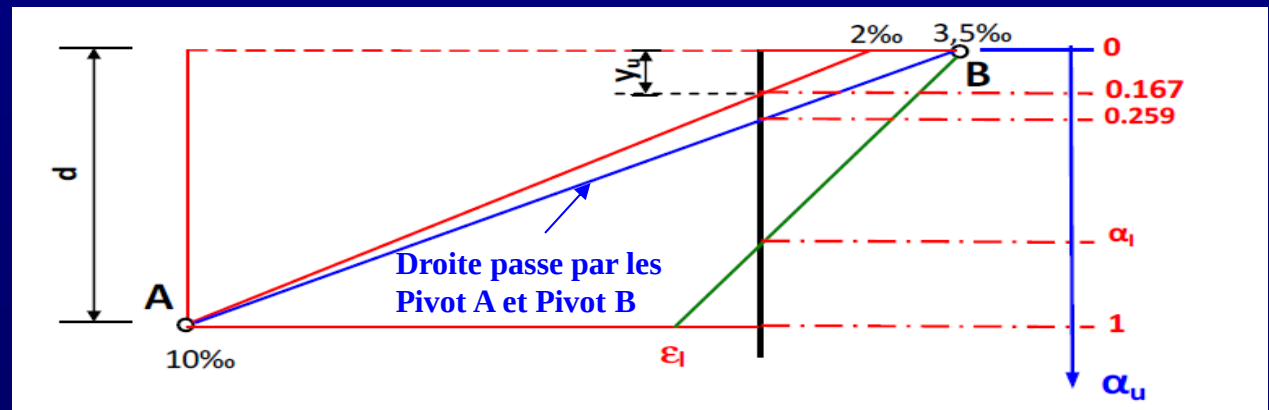


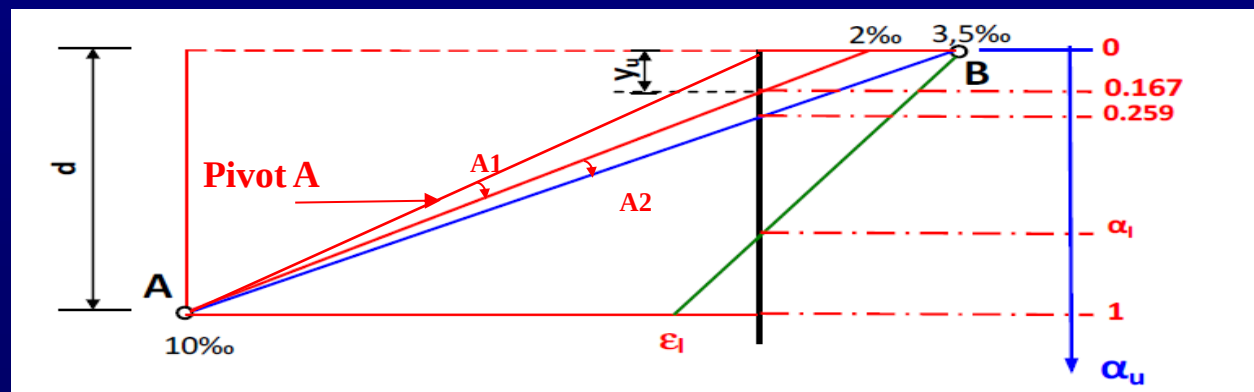
Diagramme de déformation

- Si $0 \leq \alpha_u < 0.167$ ➡ nous sommes dans le **sous-domaine A1** et le diagramme des déformations passe par le **pivot A** ($0 \leq \epsilon_{bc} < 2 \text{ ‰}$ et $\epsilon_{st} = 10 \text{ ‰}$) : on a ($\epsilon_{bc} < 2 \text{ ‰}$) le béton travaille mal c'est-à-dire que toute la résistance du béton n'a pas été utilisée ($\sigma_{bc} < f_{bu}$) et la section est surdimensionnée en béton (cela veut dire que la section de béton est grande pour équilibrer l'effort agissant).

➡ on redimensionne la section (ex : on diminue h)

- Si $0.167 \leq \alpha_u \leq 0.259$ ➡ nous sommes dans le **sous-domaine A2** et le diagramme des déformations passe par le **pivot A** ($2 \text{ ‰} \leq \epsilon_{bc} \leq 3.5 \text{ ‰}$ et $\epsilon_{st} = 10 \text{ ‰}$); on a ($\epsilon_{bc} \geq 2 \text{ ‰}$) le béton travaille dans le domaine plastique (toute la résistance du béton a été utilisée ($\sigma_{bc} = f_{bu}$))

➡ alors le béton travaille bien (bonne exploitation du béton).

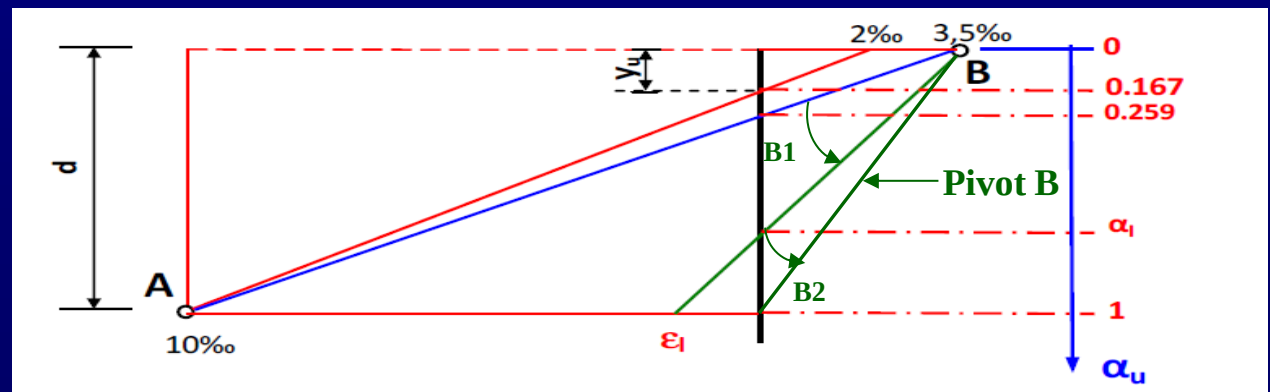


- Si $0.259 \leq \alpha_u \leq \alpha_{limite}$ nous sommes dans le sous-domaine B1 et le diagramme des déformations passe par le **pivot B** ($\epsilon_{bc} = 3.5 \text{ ‰}$ et $10 \text{ ‰} \geq \epsilon_{st} \geq \epsilon_{limite}$)

avec : $\epsilon_l = \epsilon_e = f_e / (\gamma_s \cdot E_s)$ et $\alpha_1 = \frac{3.5}{3.5 + (\epsilon_l \cdot 1000)}$, qui dépend de la nuance des armatures (la limite d'élasticité garantie f_e)

Il faut calculer ϵ_{st} , l'acier travaille bien seulement si $\epsilon_{st} > \epsilon_{limite}$ car l'acier travaille dans le domaine plastique (c'est-à-dire que toute la résistance des aciers a été utilisée ($\sigma_{st} = f_{su}$)).

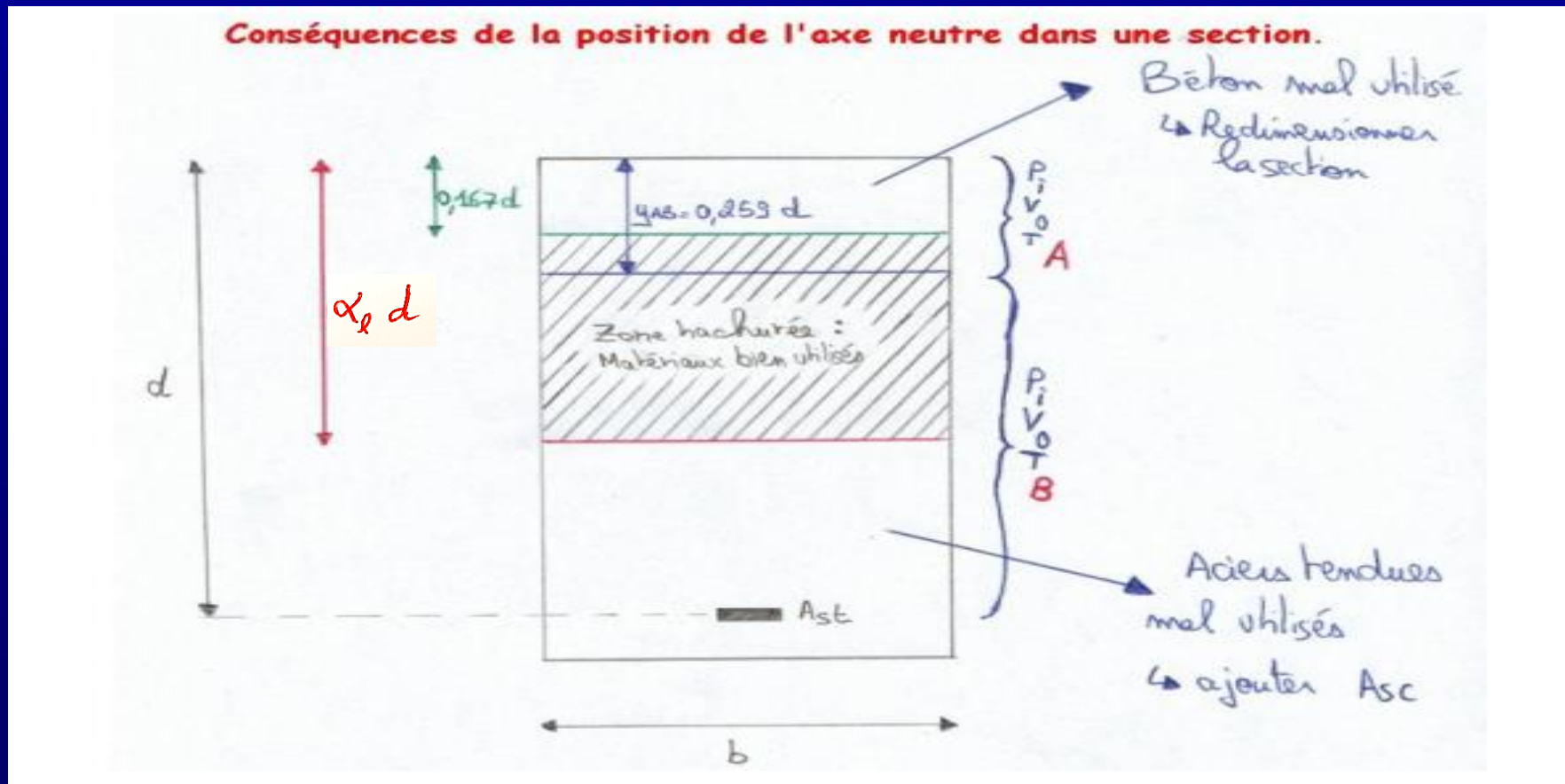
- Si $\alpha_{limite} \leq \alpha_u \leq 1$ nous sommes dans le sous-domaine B2 et le diagramme des déformations passe par le **pivot B** ($\epsilon_{bc} = 3.5 \text{ ‰}$ et $0 \leq \epsilon_{st} < \epsilon_{limite}$): l'acier travaille insuffisamment ou l'acier travaille dans le domaine élastique (c'est-à-dire que toute la résistance des aciers n'a pas été utilisée ($\sigma_{st} < f_{su}$)), ce qui conduit à de grandes sections d'armatures.

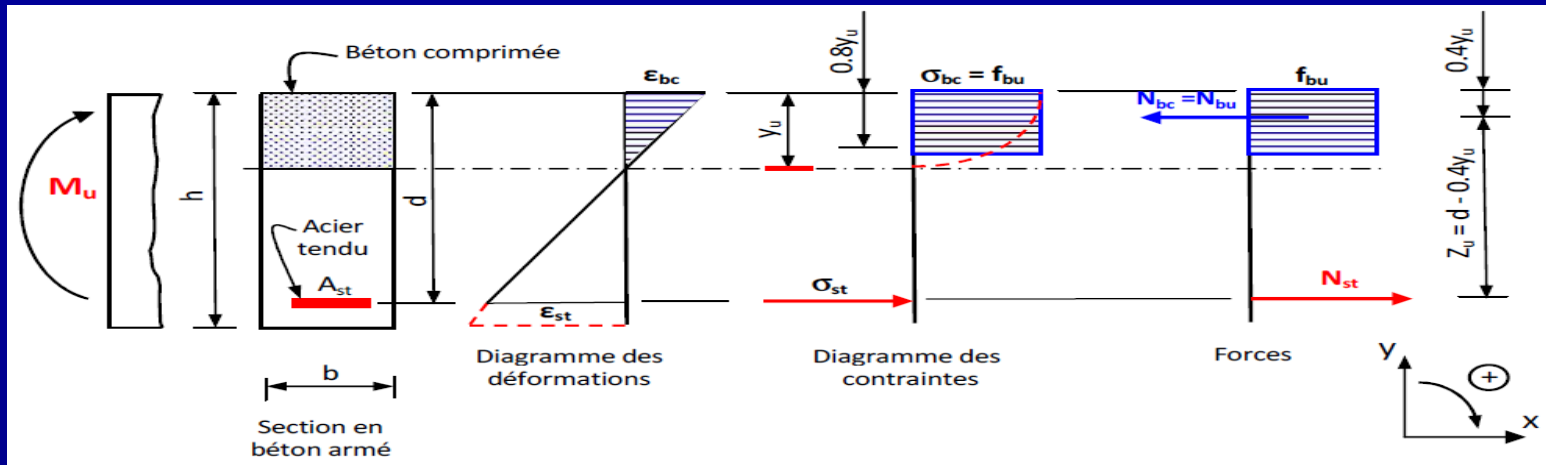


Conclusion : pour utiliser au mieux les caractéristiques du béton et de l'acier (le domaine le plus économique), il correspond à:

$$0.167 \leq \alpha_u \leq \alpha_l$$

- ❖ Si α_u tend vers α_{limite} : on aura une petite section de béton avec beaucoup d'armatures;
- ❖ Si α_u tend vers **0.167** : on aura une grande section de béton avec peu d'armatures





2/. Equation d'équilibre des moments

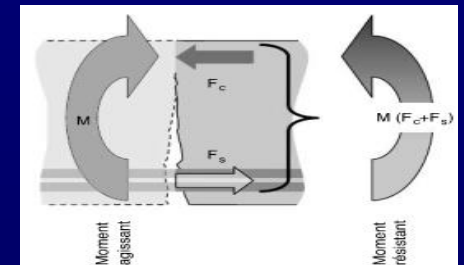
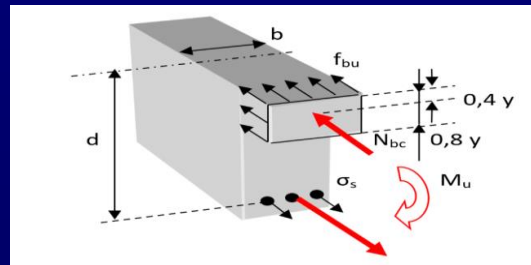
On a 1 moment externe M_u et les 2 forces internes engendrées par la section du béton comprimé et la section de l'acier tendue.

$\Sigma M_A = 0$ (la somme des moments est calculée par rapport au C.d.G. des aciers tendus pour nous permet de supprimer l'inconnue A_{st})

1) $M_u - N_{bu} \cdot Z_u = 0$ où : 2) $Z_u = d - 0.4y_u$ (bras de levier)

3) $M_u - (0.8 y_u \cdot b \cdot f_{bu}) \cdot (d - 0.4 y_u) = 0$ $\rightarrow$ 4) $M_u = (0.8 y_u \cdot b \cdot f_{bu}) \cdot (d - 0.4 y_u)$

Répartition des contraintes



En remplaçant y_u par sa valeur ($y_u = \alpha_u d$), on obtient : $Z_u = d(1 - 0.4 \alpha_u)$.

Et l'équation (4) devient: 5) $M_u = 0.8 \alpha_u \cdot (1 - 0.4 \alpha_u) \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{bu}$

ou encore:

$$\frac{M_u}{bd^2 f_{bc}} = 0,8 \alpha (1 - 0,4 \alpha)$$

Le moment réduit est défini par la formule:

$$\mu_{bu} = M_u / (b \cdot d^2 \cdot f_{bu})$$

μ_{bu} : s'appelle le moment relatif du béton ou « moment ultime réduit »

Et on obtient l'équation:

$$\mu_{bu} = 0.8 \alpha_u \cdot (1 - 0.4 \alpha_u)$$

En développant cette équation, on obtient un polynôme du second degré en α_u :

Ce qui nous donne comme solution :

$$\alpha_u = 1.25 \cdot (1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_{bu}})$$

$$0,32 \cdot \alpha_u^2 - 0,8 \cdot \alpha_u + \mu_b = 0$$

on a: $0.8 y_u \cdot b \cdot f_{bu} = A_{st} \cdot \sigma_{st}$, et $Z_u = d - 0.4 y_u$

Donc on remplace dans l'équation (4), on trouve que: $M_u = A_{st} \cdot \sigma_{st} Z_u$

$$A_{st} = M_u / (\sigma_{st} \cdot Z_u)$$

On a : $Z_u = d(1 - 0.4 \alpha_u)$.

Soit $\beta_u = 1 - 0.4 \alpha_u$ (bras de levier réduit); Donc: $Z_u = d \cdot \beta_u$

On trouve :

$$A_{st} = M_u / (\sigma_{st} \cdot \beta_u \cdot d)$$

En considérant :

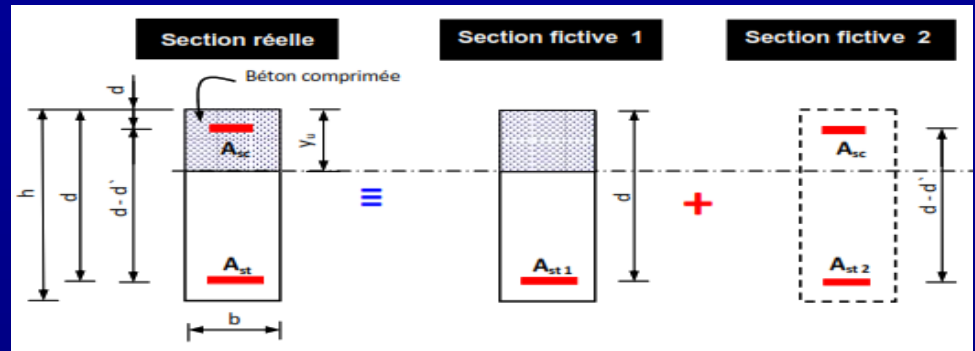
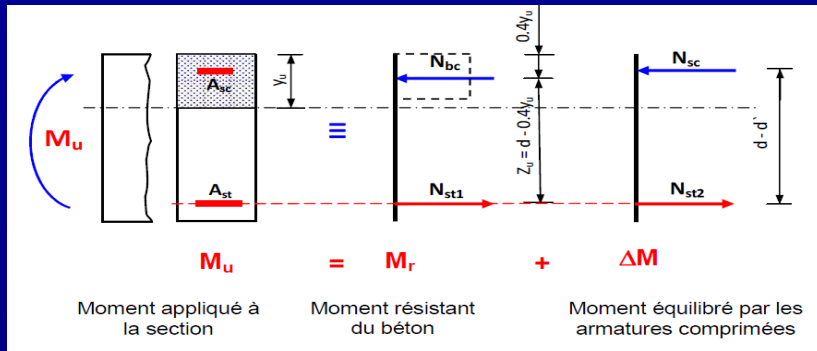
$$\sigma_{st} = \frac{f_e}{\gamma_s}$$

Cet équilibre est valable tant que le moment réduit μ_{bu} est inférieur à une limite notée μ_{limite}

Dans ce cas, la section sera armée uniquement avec des armatures tendues.

avec μ_{limite} : le moment ultime réduit limite

I.2.2. Section avec aciers comprimés: Dans une section rectangulaire aux dimensions fixées, si l'on constate que $\mu_{bu} > \mu_{limite}$, le moment M_u peut être équilibré en renforçant la partie comprimée de la section au moyen d'armatures de section A_{sc} (Le béton comprimé seul ne suffit pas pour reprendre l'effort de compression. On aura donc besoin d'aciers comprimés qui vont reprendre la différence $(M_u - M_r)$); **Donc** A_{st} (armatures tendues) = $A_{st1} + A_{st2}$



Dans ce cas, lorsqu'une section est soumise à un moment total M_u , elle peut être décomposée en deux sections :

- Une **section fictive 1** dans laquelle le béton comprimé et les armatures supportent un moment M_r correspondant à la valeur limite du moment réduit $\mu_{bu} = \mu_{limite}$.
- Une **section fictive 2** qui équilibre le moment restant, à savoir $M_u - M_r$, cette différence est reprise par des armatures comprimées.
- ✓ **M_r (Le moment résistant du béton)** : c'est le moment ultime que peut équilibrer la section sans lui ajouter d'aciers comprimés..
- ✓ **ΔM (Le moment résiduel)** : C'est la différence entre le moment ultime sollicitant la section et le moment résistant du béton, que la section peut équilibrer grâce à des aciers comprimés.

➤ Calcul du moment résistant du béton M_r :

Pour ce moment, on pose : $\mu_{bu} = \mu_{limite}$, avec μ_{limite} : le moment ultime réduit limite

Donc : $\mu_l = M_r / (b \cdot d^2 \cdot f_{bu})$, on obtient : $M_r = \mu_l \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{bu}$

Calcul des armatures tendues de la section fictive 1 (A_{st1}):

$$A_{st1} = M_r / (\sigma_{st} \cdot \beta_l \cdot d)$$

On a : $\epsilon_{st} = \epsilon_l$, on obtient : $\sigma_{st} = f_{su}$ donc : $A_{st1} = M_r / (f_{su} \cdot \beta_l \cdot d)$

➤ Calcul du moment résiduel ΔM :

$$\Delta M = M_u - M_r$$

Calcul des armatures tendues de la section fictive 2 (A_{st2}):

Equilibre des moments/ A_{sc} : $\Delta M = N_{st2} \cdot (d - d')$

$$N_{st2} = f_{su} \cdot A_{st2}$$

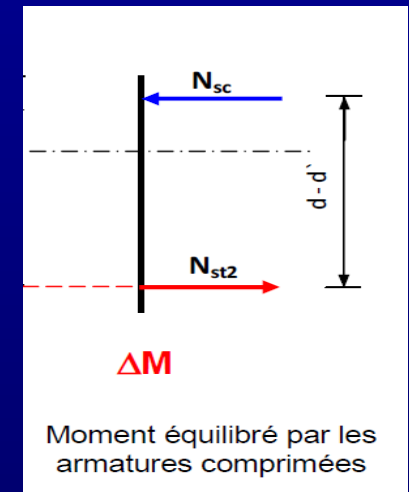
L'effort de traction des aciers de la section fictive 2:

On obtient donc : $\Delta M = f_{su} \cdot A_{st2} \cdot (d - d') \Rightarrow A_{st2} = \Delta M / (f_{su} \cdot (d - d'))$

Calcul des armatures comprimées de la section fictive 2 (A_{sc}):

Equilibre des forces : $N_{sc} = N_{st2}$ et Equilibre des moments/ A_{st2} : $\Delta M = N_{sc} \cdot (d - d')$

$N_{sc} = \sigma_{sc} \cdot A_{sc}$ donc $\Delta M = \sigma_{sc} \cdot A_{sc} \cdot (d - d')$, on obtient : $A_{sc} = \Delta M / (\sigma_{sc} \cdot (d - d'))$



- Détermination de la contrainte de l'acier comprimé (σ_{sc}) :

En se basant sur le principe des triangles semblables (théorème de Thalès), appliqué au diagramme des déformations donne:

$$\frac{\varepsilon_{sc}}{3.5 \cdot 10^{-3}} = \frac{y_u - d'}{y_u}$$



$$\varepsilon_{sc} = 3.5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{\alpha_l \cdot d - d'}{\alpha_l \cdot d} \right)$$

Avec:

$$\alpha_l = 1.25 \cdot (1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \mu_l})$$

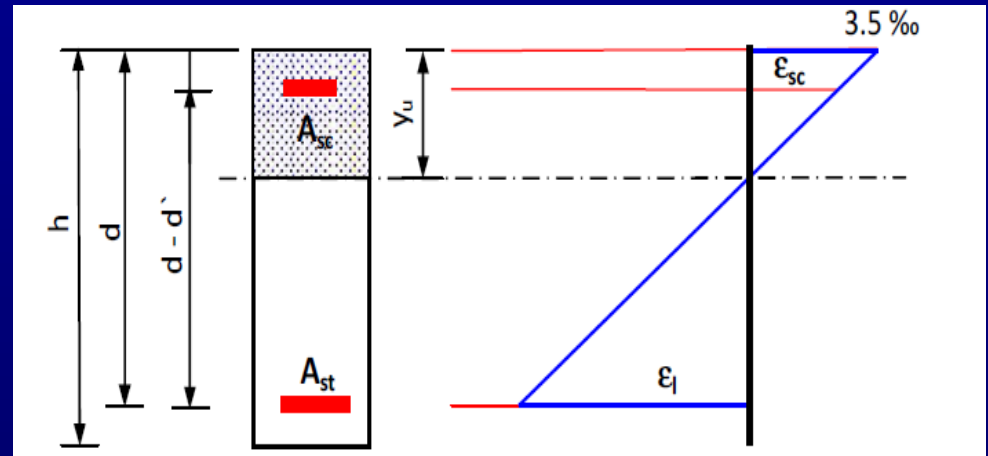
- En connaissant ε_{sc} , on peut déterminer σ_{sc} (donc la contrainte σ_{sc} est en fonction de son raccourcissement ε_{sc}):

Si $\varepsilon_{sc} < \varepsilon_l$ donc:

$$\sigma_{sc} = \varepsilon_{sc} \cdot E_{sc}$$

Si $\varepsilon_{sc} > \varepsilon_l$ donc :

$$\sigma_{sc} = f_{su}$$



Finalement, on remplace la valeur de σ_{sc} dans la relation pour déterminer la section des armatures A_{sc} .

➤ La section totale des armatures tendues A_{st} :

$$A_{st} = A_{st1} + A_{st2}$$

Application :

Soit une section (25×50) sollicitée par un moment de flexion $M_u = 0.153 \text{ MN.M}$
avec $f_{c28} = 25 \text{ MPA}$ et un ferrailage de FeE400

- Calculer la section des armatures AS en ELU

Conversion des unités :

$$1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2 = 1 \text{ MN/m}^2$$

$$1 \text{ KN} = 1000 \text{ N}; \quad 1 \text{ MN} = 1000 \text{ KN}; \quad 1 \text{ MN} = 10^6 \text{ N}$$

Tableau des sections d'acier

diamètre	section (cm ²)									
(mm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	0,28	0,57	0,85	1,13	1,41	1,70	1,98	2,26	2,54	2,83
8	0,50	1,01	1,51	2,01	2,51	3,02	3,52	4,02	4,52	5,03
10	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28	7,07	7,85
12	1,13	2,26	3,39	4,52	5,65	6,79	7,92	9,05	10,18	11,31
14	1,54	3,08	4,62	6,16	7,70	9,24	10,78	12,32	13,85	15,39
16	2,01	4,02	6,03	8,04	10,05	12,06	14,07	16,08	18,10	20,11
20	3,14	6,28	9,42	12,57	15,71	18,85	21,99	25,13	28,27	31,42
25	4,91	9,82	14,73	19,64	24,54	29,45	34,36	39,27	44,18	49,09
32	8,04	16,08	24,13	32,17	40,21	48,25	56,30	64,34	72,38	80,42
40	12,57	25,13	37,70	50,27	62,83	75,40	87,96	100,53	113,10	125,66

	Nuance	f_e (MPa)	$1000\xi_l$	α_L	μ_L	β_L
Ronds lisses	fe E215	215	0.935	0.789	0.432	0.684
	fe E235	235	1.022	0.774	0.427	0.690
Barres HA	fe E400	400	1.739	0.668	0.392	0.733
	fe E500	500	2.174	0.617	0.372	0.753

➤ Condition de Non Fragilité (CNF) A_{min} :

La section d'armature de calcul doit satisfaire la condition suivante :

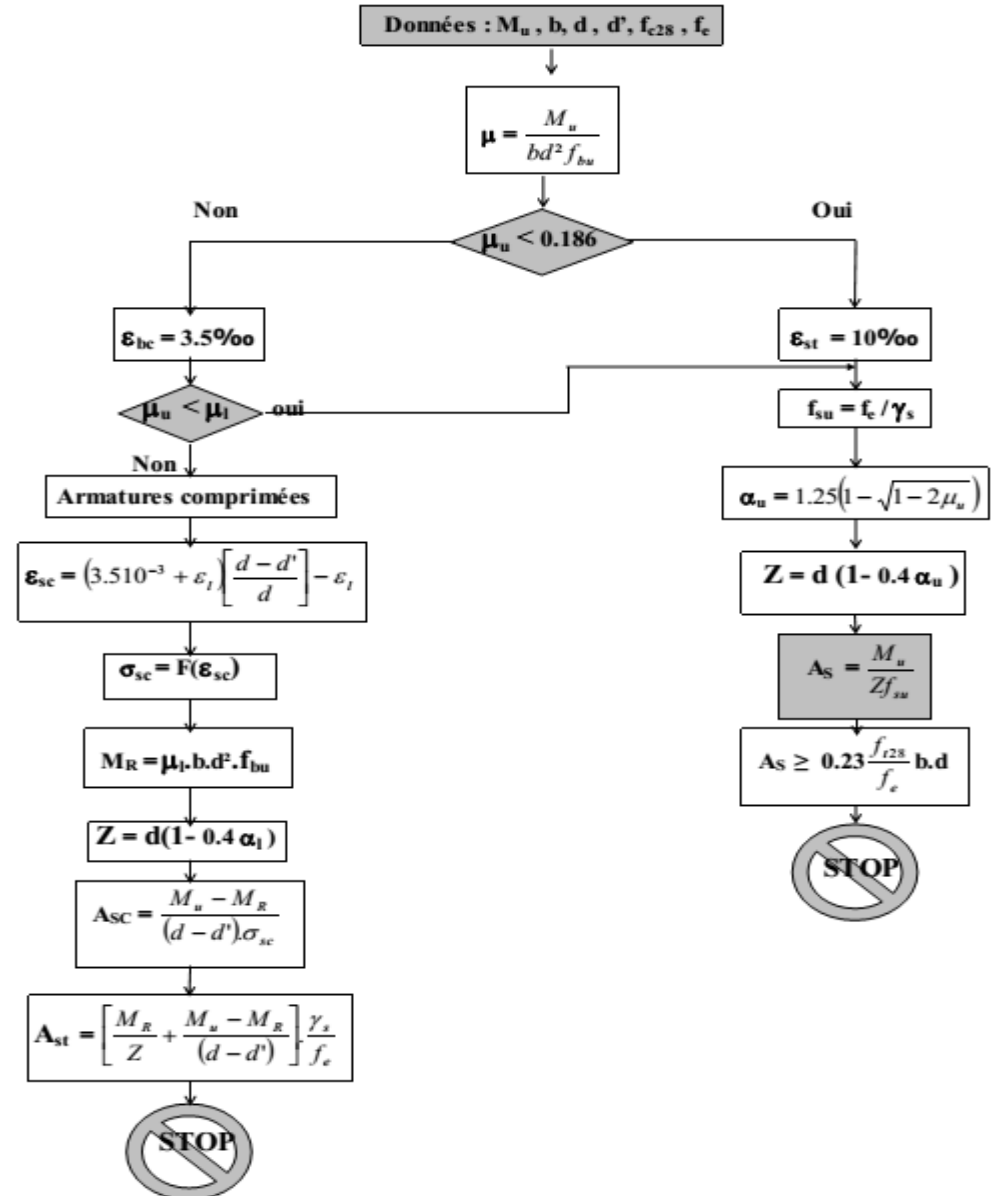
$$A_s \geq A_{smin}$$

On a:

$$A_{smin} = 0,23bd \frac{f_{t28}}{f_e}$$

FLEXION SIMPLE (E.L.U)

SECTION RECTANGULAIRE



II. Vérification des sections rectangulaires à l'E.L.S:

Les éléments de structure en béton armé, soumis à un moment de flexion simple sont généralement calculés à l'état limite de service dans les cas suivants : fissuration préjudiciable et fissuration très préjudiciable.

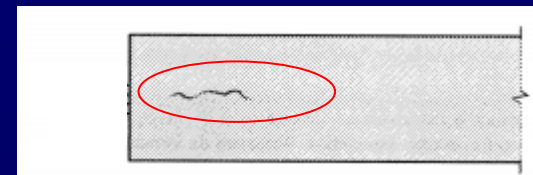
Les vérifications à effectuer concernant les états limites de service vis à vis de la durabilité de la structure conduit à s'assurer du non dépassement des contraintes limites de calcul à l'E.L.S :

- Compression du béton
- Traction des aciers suivant le cas de fissuration envisagé (état limite d'ouverture des fissures).

II.1- Détermination des contraintes :

Hypothèses à l'E .L .S de compression du béton

- La contrainte de compression dans le béton est limitée à $0,6.f_{c28}$: $\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc}$ où: $\bar{\sigma}_{bc} = 0,6 . f_{c28}$
- La limitation de la compression du béton est destinée à éviter la formation des fissures parallèles à la direction des contraintes de compression.



Hypothèses à l'ELS d'ouverture de fissures

- La contrainte de traction dans les aciers: $\sigma_{st} \leq \bar{\sigma}_{st}$:

1- Si la fissuration est non préjudiciable : Pas de limite, c'est-à-dire Aucune vérification n'est demandée pour les aciers et la contrainte dans les aciers n'est pas limitée. La fissuration est considérée comme peu préjudiciable, lorsque l'élément à vérifier est situé dans les locaux couverts.

2- Si la fissuration est préjudiciable: La fissuration considérée comme préjudiciable si les éléments sont exposés aux intempéries (pluie, neige, vent...) ou bien en contact avec l'eau. La contrainte de traction dans les armatures tendues sera limitée à la valeur suivante :

$$\bar{\sigma}_{st} \leq \min\left(\frac{2}{3} \cdot f_e ; 110 \sqrt{\eta \cdot f_{t28}}\right)$$

3- Si la fissuration est très préjudiciable: La fissuration sera considérée comme très préjudiciable si l'élément est soumis à un milieu agressif (eau de mer, sols corrosifs....). La contrainte de traction des armatures tendues sera limitée par la valeur suivante :

$$\bar{\sigma}_{st} \leq \min\left(\frac{1}{2} \cdot f_e ; 90 \sqrt{\eta \cdot f_{t28}}\right)$$

f_e : limite élastique acier et f_{t28} : la contrainte du béton à la traction à 28j.

η : coefficient de fissuration.

$\eta = 1$ pour les R.L. y compris les TS formés de fils tréfilés lisses.

$\eta = 1,6$ pour les H.A.

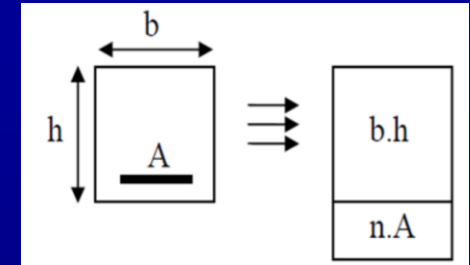
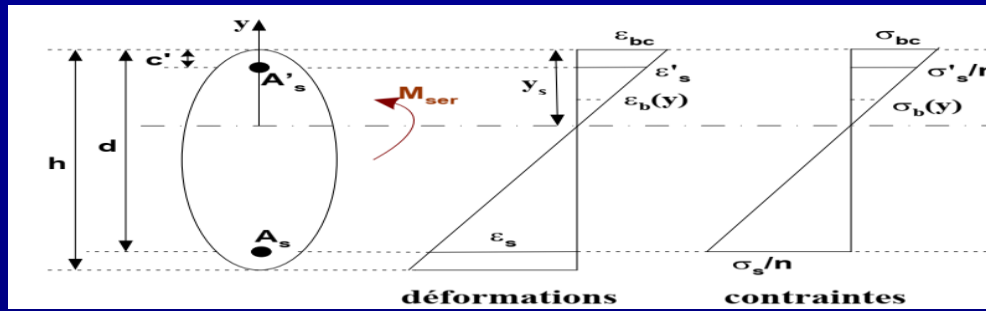
$\eta = 1,3$ pour les H.A. en fils de diamètre inférieur à 6 mm.



II.2- Principe de calcul des contraintes :

Dans la réalité, le béton armé est un matériau hétérogène. Pour pouvoir utiliser les règles de la RDM, nous allons "homogénéiser" la section de béton armé, on remplace la section d'acier A_{st} ou A_{sc} par une section de béton dite équivalente $n \cdot A_{st}$ ou $n \cdot A_{sc}$. (une section d'acier A_s est représentée par une section de béton égale à $n \cdot A_s$).

Soit une section droite d'une poutre sollicitée en flexion simple:



La déformation de l'acier est la même que la déformation du béton du fait de l'adhérence. Donc on peut écrire: $\varepsilon_s = \varepsilon_{bc}$.

Le béton et l'acier sont considérés comme des matériaux linéairement élastiques : c'est-à-dire que les contraintes sont proportionnelles aux déformations, donc d'après la loi de Hooke:

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} = \varepsilon_{bc} = \frac{\sigma_{bc}}{E_b} \Leftrightarrow \sigma_s = \sigma_{bc} \frac{E_s}{E_b}$$

Si l'on pose:

$$n = \frac{E_s}{E_b} \Rightarrow \sigma_{bc} = \frac{\sigma_s}{n} \Leftrightarrow \sigma_s = n \cdot \sigma_{bc}$$

n : est appelé coefficient d'équivalence et a pour valeur 15, ce qui signifie qu'une section d'acier "travaille" 15 fois plus que la même section de béton.

L'effort normal dans les armatures est donc :

$$\begin{cases} N_{sc} = A'_s \cdot \sigma_{sc} = A'_s \cdot n \cdot \sigma_{bc} & \text{dans les aciers comprimés} \\ N_{st} = A_s \cdot \sigma_{st} = A_s \cdot n \cdot \sigma_{bc} & \text{dans les aciers tendus} \end{cases}$$

Les deux inconnues fondamentales qui doivent être déterminées pour la vérification sont y et I .

II.3- détermination de l'axe neutre :

Pour déterminer y , il suffit d'écrire que le moment statique de la section homogène par rapport l'axe neutre est égal à zéro:

$$M_{s/GX} = 0 \Rightarrow b \frac{y^2}{2} + nA_{sc} (y - d') - nA_{st}(d - y) = 0$$

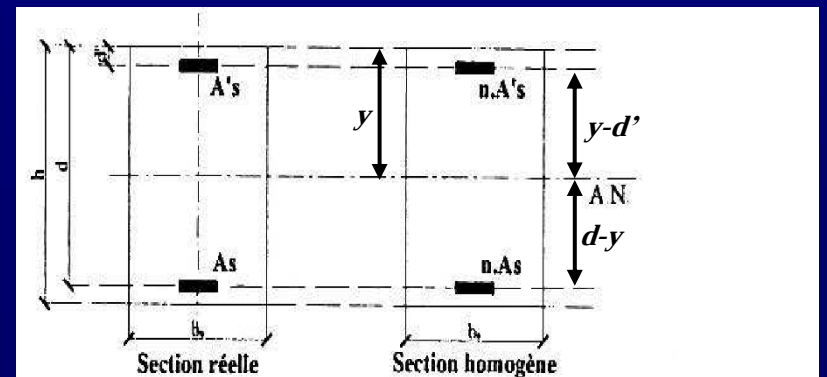
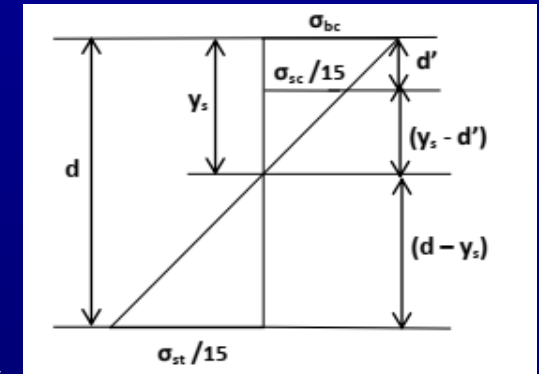
Les valeurs de y sont obtenues en résolvant cette équation de deuxième degré à une inconnue.

y : la distance entre la fibre la plus comprimée de la section et l'axe neutre.

S'il n'y a pas d'armatures comprimées, $A_{sc}=0$,

l'équation devient :

$$b \frac{y^2}{2} - nA_{st}(d - y) = 0$$



II.4- détermination du moment quadratique I: Moment quadratique du béton comprimé + moment quadratique des aciers tendus + moment quadratique des aciers comprimés.
Par l'application du théorème de Huygens on trouve:

Béton comprimé:

$$I_b = \frac{by^3}{12} + by \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{by^3}{3}$$

aciers tendus:

$$I_{st} = \text{nbre de barres} \cdot \frac{\pi D_{st}^4}{64} + nA_{st}(d - y)^2 \approx nA_{st}(d - y)^2$$

aciers comprimés:

$$I_{sc} = \text{nbre de barres} \cdot \frac{\pi D_{sc}^4}{64} + nA_{sc}(y - d')^2 \approx nA_{sc}(y - d')^2$$

Il vient alors:

$$I = \frac{by^3}{3} + nA_{st}(d - y)^2 + nA_{sc}(y - d')^2$$

II.5- Calcul des contraintes du béton et de l'acier:

Maintenant que l'on connaît la position de la fibre neutre y et l'inertie de la section homogénéisée, on peut appliquer la formule de Navier pour la flexion, les contraintes normales maximales dans la section sont comme suit :

a. Contrainte de compression du béton :

$$\sigma_{bc} = \frac{M_{ser}}{I} y$$

b. Contrainte de compression des aciers:

$$\sigma_{sc} = n \frac{M_{ser}}{I} (y - d')$$

c. Contrainte de traction des aciers:

$$\sigma_{st} = n \frac{M_{ser}}{I} (d - y)$$

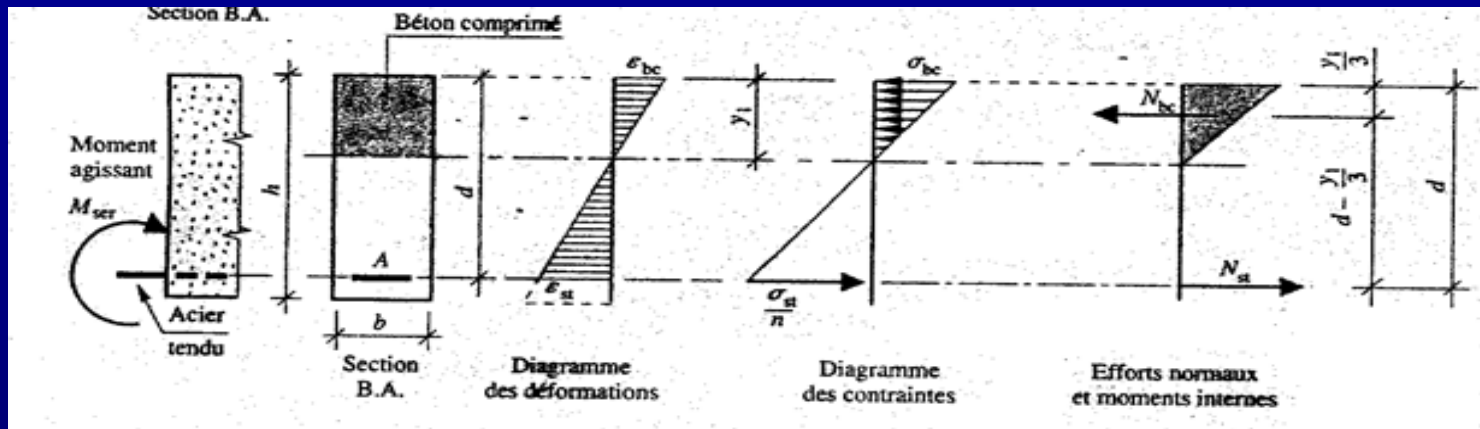
Les valeurs de σ_{bc} , σ_{sc} et σ_{st} sont comparées avec les contraintes limites :

$\overline{\sigma}_{bc}$, $\overline{\sigma}_{sc}$ et $\overline{\sigma}_{st}$

II.6- Détermination des armatures:

On a calculé, pour l'E.L.S, les contraintes dans une section pour laquelle les armatures ont été déterminées lors des calculs à l'E.L.U. Si les contraintes obtenues sont supérieures aux contraintes limites, il faut déterminer les nouvelles valeurs des armatures.

a- Condition de compression du béton vérifiée, la condition de fissuration non vérifiée:



Si $\sigma_{st} > \overline{\sigma}_{st}$, il faut recalculer la section d'aciers tendus A_{st} en admettant que ces armatures travaillent au maximum possible, c'est-à-dire $\sigma_{st} = \overline{\sigma}_{st}$

Equations d'équilibre (statique) :

Les équations d'équilibre des efforts normaux sont alors: $N_{bc} = N_{st}$



$$\frac{b \cdot y \cdot \sigma_{bc}}{2} = A_s \cdot \overline{\sigma}_s \quad (1)$$

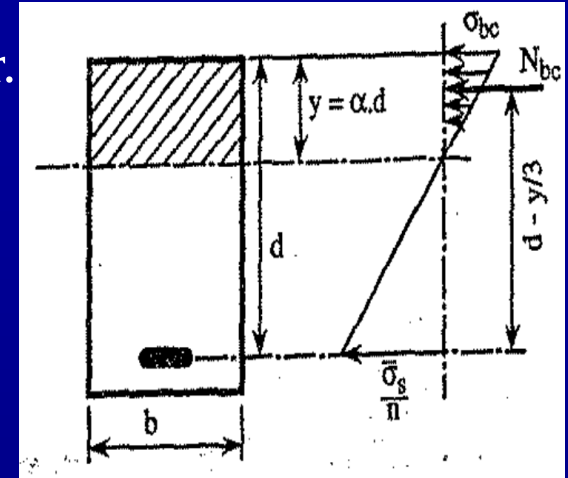
-Equilibre des moments par rapport au C.d.G des aciers tendus:

Moment de flexion = effort de compression $\times$ bras de levier.

$$M_{ser} = N_{bc} \times Z \quad \rightarrow \quad M_{ser} = N_{bc} \times Z = N_{st} \times Z$$

Bras de levier des efforts de compression du béton par rapport au CDG des aciers. (symbole Z):

$$Z = d - \frac{y}{3}$$



En remplaçant Z dans l'expression de M_{ser} par sa valeur, on obtient:

$$M_{ser} = b y \frac{\sigma_{bc}}{2} (d - y/3) = A_{st} \bar{\sigma}_{st} (d - y/3) \quad , \text{ donc: } A_{st} = \frac{M_{ser}}{\bar{\sigma}_{st} (d - y/3)}$$

Le théorème de Thalès sur les triangles semblables, appliqué au diagramme des contraintes donne :

$$\frac{\sigma_{bc}}{y} = \frac{\bar{\sigma}_{st} / n}{d - y} \quad \text{soit: } \sigma_{bc} = \frac{\bar{\sigma}_{st} / n}{(d - y)} y$$

En remplaçant les valeurs de A_{st} et σ_{bc} dans l'équation (1) avec $\alpha = \frac{y}{d}$, on obtient une équation du 3ème degré où l'inconnue est la profondeur relative de l'AN, α :

$$\bar{\sigma}_{st} \alpha^3 - 3 \bar{\sigma}_{st} \alpha^2 - (6n M_{ser} / b d^2) \alpha + (6n M_{ser} / b d^2) = 0$$

La résolution de cette équation est complexe, une technique simplifiée permet d'aboutir à la solution pour $0 \leq \alpha \leq 1$:

On calcule $\lambda = 1 + (30 M_{ser} / (bd^2 \overline{\sigma}_{st}))$ puis $\varphi = \lambda^{-3/2}$ d'où φ en degré ;

On trouve : $\alpha = 1 + 2\sqrt{\lambda} \cdot \cos(240^\circ + \varphi / 3)$

ayant obtenu α , on calcule et on vérifie que:

$$\sigma_{bc} = \frac{\overline{\sigma}_{st}/n}{(1-\alpha)} \alpha \leq 0,6 f_{c28}$$

Puis on obtient: $A_{st} = \frac{M_{ser}}{\overline{\sigma}_{st} \cdot d(1-\alpha/3)}$

b- Condition de compression du béton n'est pas vérifiée:

On choisit d'exploiter les deux matériaux, (le béton et l'acier), à leur capacité maximale. Pour cela, on pose donc :

1. $\sigma_{st} = \overline{\sigma}_{st}$ contrainte admissible de l'acier,
2. $\sigma_{bc} = \overline{\sigma}_{bc}$ contrainte admissible du béton.

Les contraintes sont alors égales à leurs valeurs admissibles.

- Pour déterminer la position de l'axe neutre, on utilise le théorème de Thalès sur les triangles dans le diagramme des contraintes de section homogénéisée:

$$\frac{\overline{\sigma}_{bc}}{\frac{\overline{\sigma}_{st}}{n}} = \frac{y}{d - y}$$

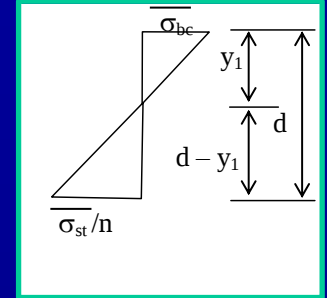
soit

$$\frac{y}{d} = \frac{n \cdot \overline{\sigma}_{bc}}{n \cdot \overline{\sigma}_{bc} + \overline{\sigma}_{st}}$$

$$\overline{\alpha} = \frac{y}{d}$$

Donc la position de l'axe neutre:

$$\overline{\alpha} = \frac{n \overline{\sigma}_{bc}}{n \overline{\sigma}_{bc} + \overline{\sigma}_{st}}$$



Le moment résistant béton, M_{rsb} , qui est le moment que peut reprendre le béton comprimé seul:

$$M_{rsb} = b \cdot \overline{y} \cdot \frac{\overline{\sigma}_{bc}}{2} \left(d - \frac{\overline{y}}{3} \right)$$

La comparaison de ce moment résistant avec le moment de service doit nous permettre de choisir entre un système **d'armature simple**, ou **d'armatures doubles**.

Calcul de la section d'acier :

Si: $M_{ser} \leq M_{rsb}$: armature simple (Calcul des aciers tendus):

Dans ce cas nous pouvons fixer : $\alpha = \overline{\alpha}$

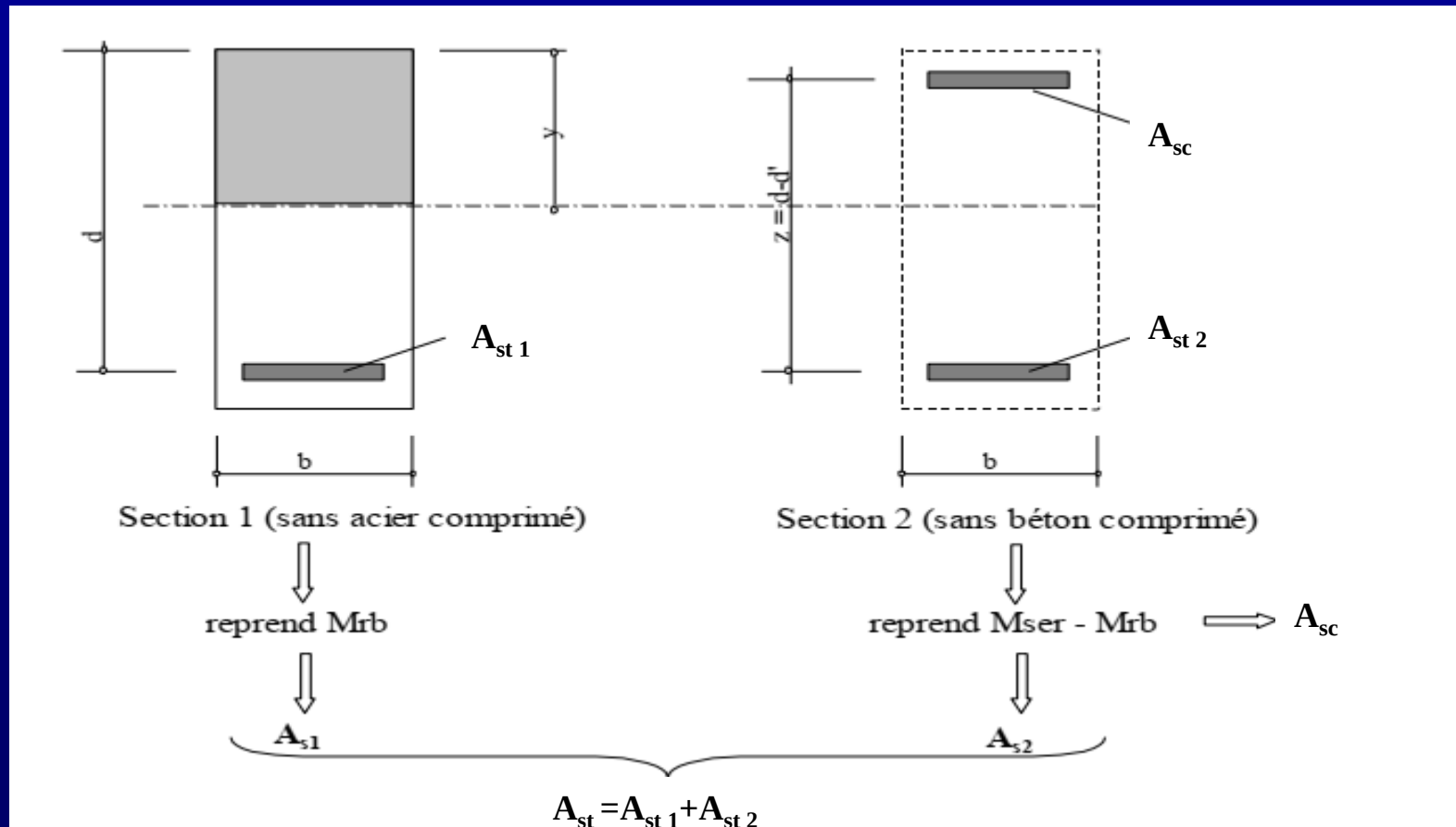
Nous obtenons des résultats approximatifs satisfaisants:

D'où : $A_{ser} = \frac{M_{ser}}{z_1 \cdot \overline{\sigma}_{st}}$ avec: $Z = d (1 - \overline{\alpha} / 3)$

N.B: S'assurer du respect de la condition de non fragilité : $A_{ser} \geq A_{min}$

Si: $M_{ser} > M_{rsb}$: armature double (calcul des aciers tendus et comprimés) :

Dans ce cas nous déterminons une section d'acier tendu A_{st1} capable d'équilibrer le moment résistant du béton, puis une section d'acier tendu A_{st2} et une section d'acier comprimé A_{sc} capables d'équilibrer le complément de moment pour atteindre M_{ser} . Pour simplifier les calculs, on décompose la section initiale en 2 sections fictives :



1. Etude de la section fictive 1, sans aciers comprimés :

$$A_{st1} = \frac{M_{rsb}}{Z \times \bar{\sigma}_{st}}$$

Nous connaissons : $\bar{\alpha} = \frac{n\bar{\sigma}_{bc}}{n\bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_{st}}$ et $y = \bar{\alpha} \cdot d$ et $Z = d (1 - \bar{\alpha} / 3)$

2. Etude de la section fictive 2, sans béton :

Calcul de A_{st2} :

L'équilibre des moments par rapport au CDG des aciers comprimés donne:

$$M_{ser} - M_{rsb} = A_{st2} \cdot \bar{\sigma}_{st} \cdot (d - d')$$

on obtient:

$$A_{st2} = \frac{M_{ser} - M_{rsb}}{(d - d') \times \bar{\sigma}_{st}}$$

Calcul de la section d'acier comprimé A_{sc} :

L'équilibre des moments par rapport au CDG des aciers tendus donne :

$$M_{ser} - M_{rsb} = A_{sc} \cdot \sigma_{sc} \cdot (d - d')$$

La valeur de σ_{sc} est obtenue à l'aide des triangles semblables dans le diagramme des contraintes :

$$\frac{\bar{\sigma}_{bc}}{y} = \frac{\sigma_{sc} / n}{y - d'}$$

on obtient

$$\sigma_{sc} = \frac{n\bar{\sigma}_{bc}(y - d')}{y}$$

σ_{sc} : est la contrainte de travail de la section d'acier comprimé. Elle dépend de la position des armatures dans la section.

d' : enrobage supérieur

$$\text{D'où : } A_{sc} = \frac{M_{ser} - M_{rsb}}{(d - d') \sigma_{sc}}$$

Avec : $y = \bar{\alpha} \cdot d$

Section totale d'acier tendue:

Et la section totale d'armature tendue aura l'expression :

$$A_{st} = A_{st1} + A_{st2} = \frac{1}{\bar{\sigma}_{st}} \left[\frac{M_{rsb}}{Z} + \frac{M_{ser} - M_{rsb}}{(d - d')} \right]$$

Application :

Considérons une poutre de section 30x60 l'enrobage est de 5 cm. Elle est soumise à un moment $M_{ser} = 0.2 \text{ MN.m}$.

Le béton a une résistance caractéristique $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$. L'acier a une limite élastique $f_e = 400 \text{ MPa}$.

La fissuration est préjudiciable. Calculer les armatures à l' E.L.S.

FLEXION SIMPLE (E.L.S)

SECTION RECTANGULAIRE

Données : M_{ser} , b , d , d' , f_{c28} , f_e

$$\overline{\alpha} = \frac{n \overline{\sigma}_{bc}}{n \overline{\sigma}_{bc} + \overline{\sigma}_{st}}$$

$$y_1 = \overline{\alpha} \cdot d$$

$$Z = d \left(1 - \frac{\overline{\alpha}}{3} \right)$$

$$M_{rsb} = \frac{1}{2} b y_1 \overline{\sigma}_{bc} Z$$



Non

$$\sigma_{sc} = \frac{n \overline{\sigma}_{bc} (y_1 - d')}{y_1}$$

$$A_{sc} = \frac{M_{ser} - M_{rsb}}{(d - d') \sigma_{sc}}$$

$$A_{st} = \left[\frac{M_{rsb}}{Z} + \frac{M_{ser} - M_{rsb}}{(d - d')} \right] \cdot \frac{1}{\overline{\sigma}_{st}}$$



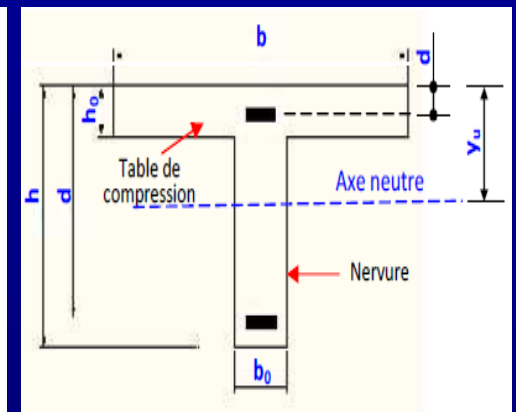
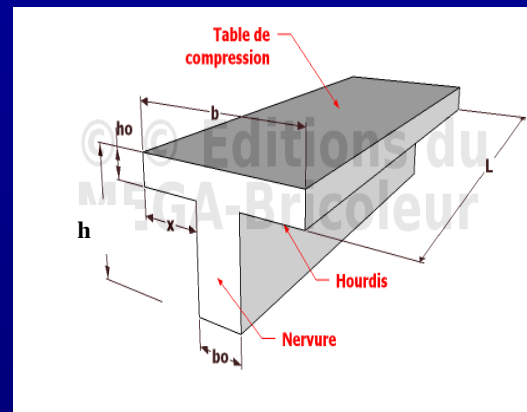
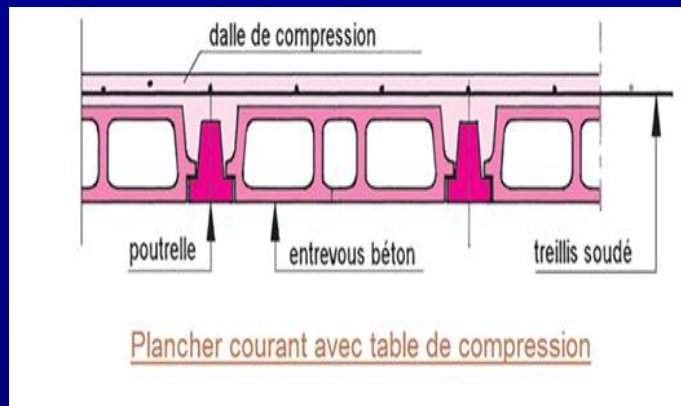
Oui

$$A_{ser} = \frac{M_{ser}}{Z \overline{\sigma}_{st}}$$

$$A_s \geq 0.23 \frac{f_{t28}}{f_e} b \cdot d$$



III. Section en T: Les poutres en béton armé d'un bâtiment ou d'un pont supportent souvent des dalles, le règlement BAEL autorise de considérer qu'une certaine largeur du hourdis fasse partie intégrante des poutres, alors la section droite de la poutre a la forme d'un T.



III.1. Largeurs des tables de compression des poutres en T: La largeur de hourdis à prendre en compte de chaque côté d'une nervure, à partir de son parement, ne doit pas dépasser la plus faible des valeurs ci-après:

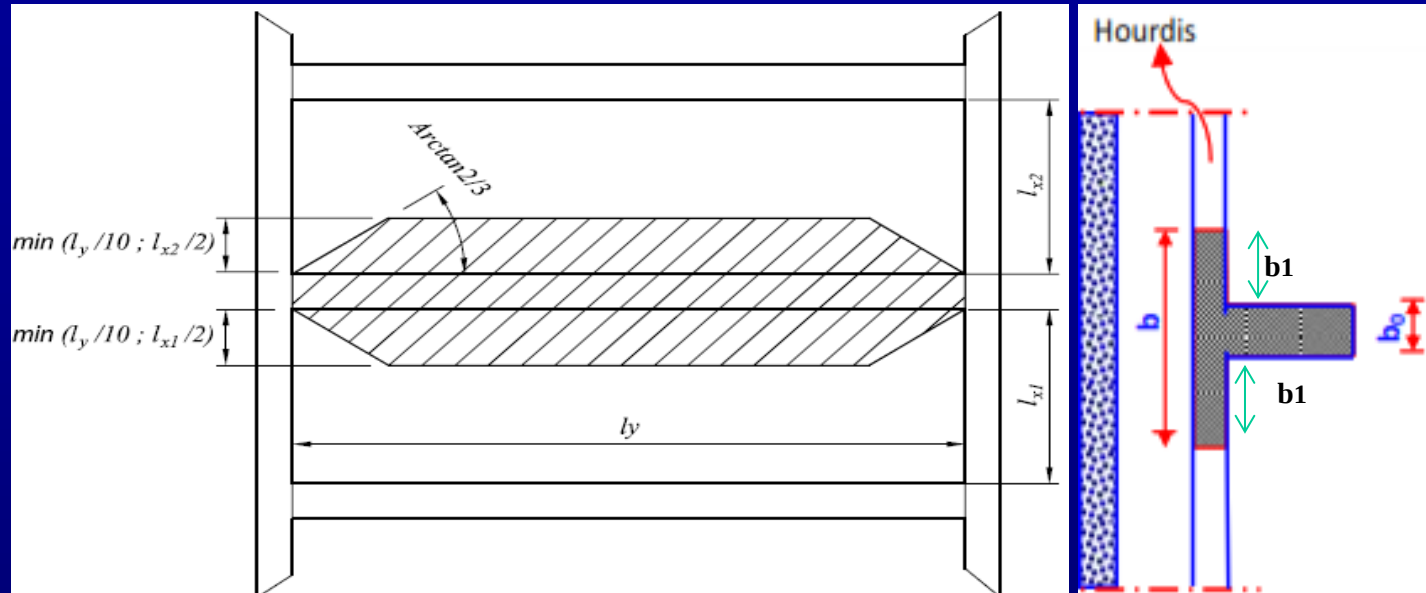
$$b = b_0 + 2b_1$$

avec b_1 égale:

$$b_1 = \min \left\{ \frac{L_x}{2}; \frac{L_y}{10} \right\}$$

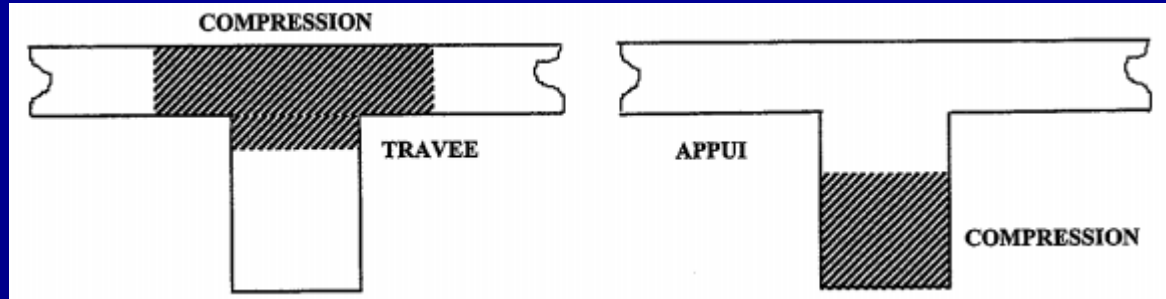
et $b = b_0 + 2b_1$

- la moitié de la distance entre les faces voisines de deux nervures consécutives ($L_x/2$)
- le dixième de la portée de la travée ($L_y/10$)



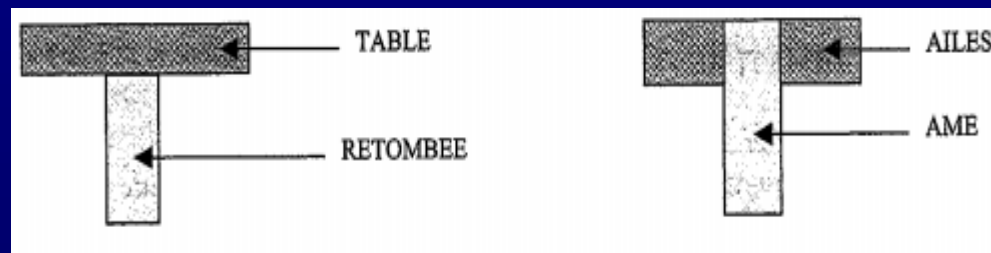
Dans l'étude d'une section en T, il est nécessaire de savoir si la partie comprimée n'intéresse que la table (sollicitation faible), ou si elle intéresse également la nervure (sollicitation forte), c'est à-dire on doit chercher la position de la l'axe neutre. Pour cela on calculera le moment M_t équilibré par la table.

Une poutre est le plus souvent associé à un plancher; **en travée**, une partie de ce plancher reprends **des efforts de compression**. L'ensemble poutre-plancher est donc capable de supporter des efforts supérieurs à ceux que reprendrait la poutre seule.



Sur appuis, seule la retombée de la poutre travaille en compression, donc le calcul d'une poutre en T n'est applicable qu'en travée.

- Terminologie:



III.2. Calcul des sections en T: Pour calculer les sections en T, il est nécessaire de savoir si l'axe neutre est dans la table de compression ou dans la nervure car le calcul s'effectue différemment selon chaque cas.

➤ **1^{er} cas : (L'axe neutre est dans la table de compression) :**

On a donc ($y \leq h_0$), le béton tendu étant négligé, la poutre en T se calcule exactement comme une poutre rectangulaire de largeur b et de hauteur utile d , à l'ELU ou à l'ELS

➤ **2^{ème} cas : (L'axe neutre est sous la table de compression) :**

On a donc ($y > h_0$), une partie de la contrainte normale est reprise par la table de compression de largeur b , l'autre par une partie de l'âme (nervure) de largeur b_0 et de hauteur ($0,8 y - h_0$) à l'ELU et ($y - h_0$) à l'ELS.

En effet, dans la majeure partie des cas, une poutre en T se calcule comme une poutre rectangulaire de largeur b et si ($y < h_0$) n'est pas vérifiée, il faut refaire le calcul avec les hypothèses d'une poutre en T.

Pour cela, on calculera le moment résistant de la table (à l'ELU et à l'ELS) défini comme le moment que peut reprendre la table si elle est entièrement comprimée (l'axe neutre est situé au raccord entre la nervure et la table de compression).

Les moments résistants M_t à l'ELU et à l'ELS sont donnés comme suit :

$$\begin{cases} M_{tu} = b h_0 f_{bu} \left(d - \frac{h_0}{2} \right) & \text{à l'ELU} \\ M_{tser} = b \frac{h_0}{2} \bar{\sigma}_{bc} \left(d - \frac{h_0}{3} \right) & \text{à l'ELS} \end{cases}$$

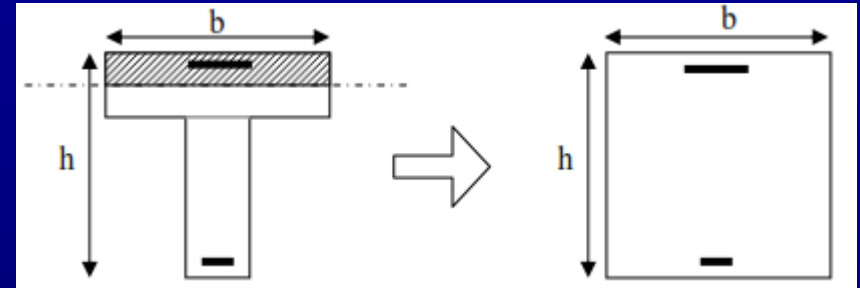
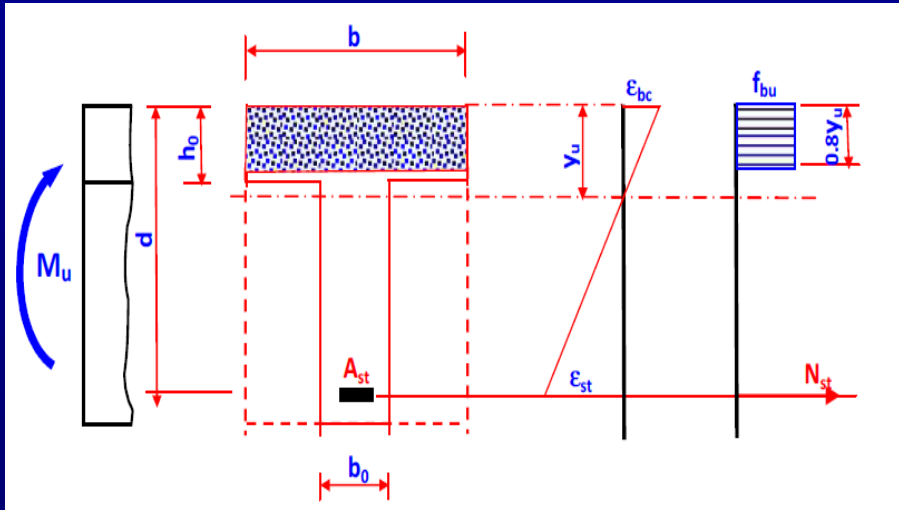
III.2.1. Calcul des sections en T à l'ELU:

A l'ELU le moment résistant de la table de compression (le moment équilibré par la table seule M_{tu}) est:

$$M_t = b h_o f_{bu} \left(d - \frac{h_o}{2} \right)$$

Soit M_u le moment à l'ELU, on distingue alors deux cas :

➤ **1^{er} cas si $M_u \leq M_{tu}$ (L'axe neutre est dans la table de compression) :** C.a.d $0,8 y \leq h_o$
la section se calcule comme une section rectangulaire de largeur b et de hauteur utile d sollicitée par le moment ultime M_u .

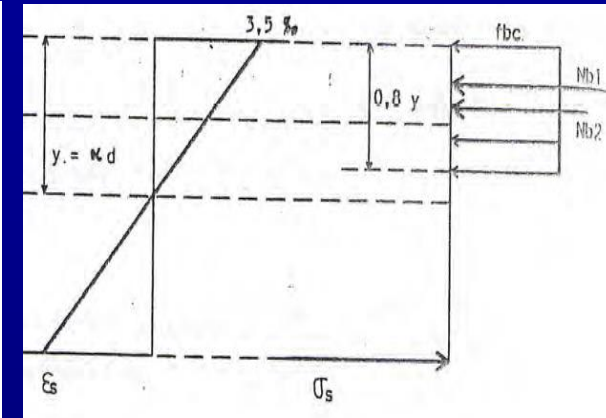
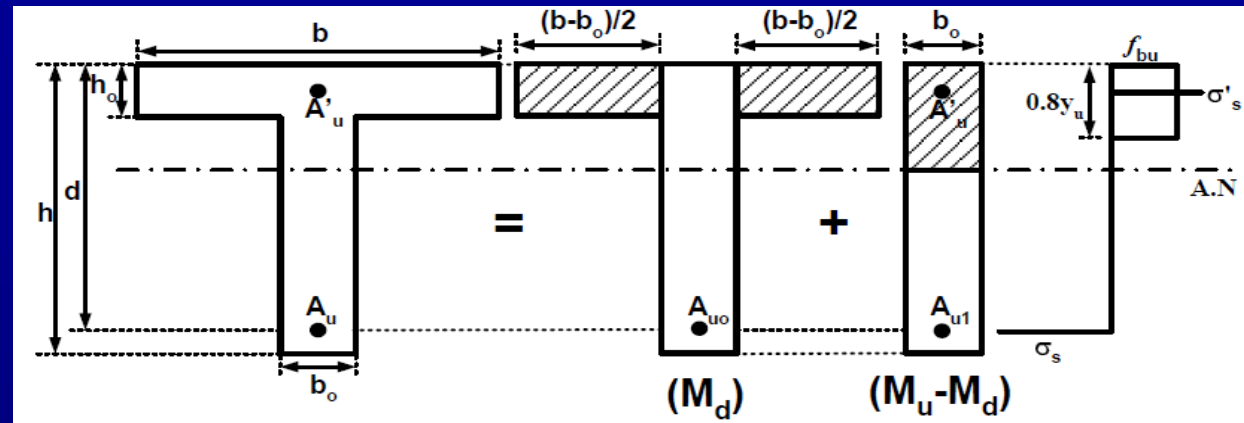


Principe de calcul a l'ELU d'une section en Té, avec : $M_u \leq M_{tu}$

➤ 2^{ème} cas si $M_u > M_{tu}$ (l'axe neutre est dans la nervure, la section se calcule comme une section en T):

Dans ce cas on considère que les débords de la table de compression reprennent une partie du moment à l'ELU noté M_d et le reste $M_{Ame} = M_u - M_d$, est repris par l'âme.

On se ramène donc au calcul de deux sections rectangulaires, l'une de largeur $(b - b_0)$ et l'autre de largeur b_0 .



Principe du calcul de la section d'acier pour une poutre en T à l'ELU, avec $M_u > M_{tu}$

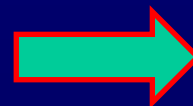
- Les efforts équilibrés valent:

(débords): $N_{b1} = (b - b_0)h_0f_{bu}$; **(âme):** $N_{b2} = 0,8\alpha \cdot d \cdot b_0 \cdot f_{bu}$; **A_s :** $N_s = A_s \cdot \sigma_s$

- Les moments équilibrés par les débords de la table est :

$$M_d = (b - b_0) h_0 f_{bu} \left(d - \frac{h_0}{2} \right) = \frac{b - b_0}{b} \cdot M_t$$

Donc la section d'acier nécessaire (A_{u0}) pour reprendre le moment M_d de la table :



$$A_{u0} = \frac{M_d}{\left(d - \frac{h_0}{2} \right) \sigma_s}$$

- Les moments équilibrés par l'âme de la poutre est :

$$M_{\text{âme}} = M_u - M_d$$

On calcule :

$$\mu_u = \frac{M_u - M_d}{b_o d^2 f_{bu}}$$

- $\mu_{bu} \leq \mu_l \rightarrow$ Asc = 0 (section sans armatures comprimée)

$$A_{u1} = \frac{M_u - M_d}{z_u \frac{f_e}{\gamma_s}}$$

avec

$$z_u = d(1 - 0.4\alpha_u)$$

et

$$\alpha_u = 1.25(1 - \sqrt{1 - 2\mu_u})$$

La section totale d'acier est alors:

$$A_u = A_{u0} + A_{u1} = \frac{M_d}{(d - \frac{h_o}{2}) \frac{f_e}{\gamma_s}} + \frac{M_u - M_d}{d(1 - 0.4\alpha_u) \frac{f_e}{\gamma_s}}$$

- $\mu_{bu} > \mu_l$ (section avec armatures comprimée $A_{sc} \neq 0$)

Si $0.8y_l > h_o$ alors: $M_{bl} = \mu_l b_o d^2 f_{bu}$ le moment repris par le béton comprimé de l'âme.

Avec

$$z_l = d(1 - 0.4\alpha_l)$$

$$A_u = \frac{M_d}{(d - \frac{h_o}{2}) \frac{f_e}{\gamma_s}} + \frac{M_{bl}}{d(1 - 0.4\alpha_l) \frac{f_e}{\gamma_s}} + \frac{M_u - M_d - M_{bl}}{(d - d') \frac{f_e}{\gamma_s}}$$

et :

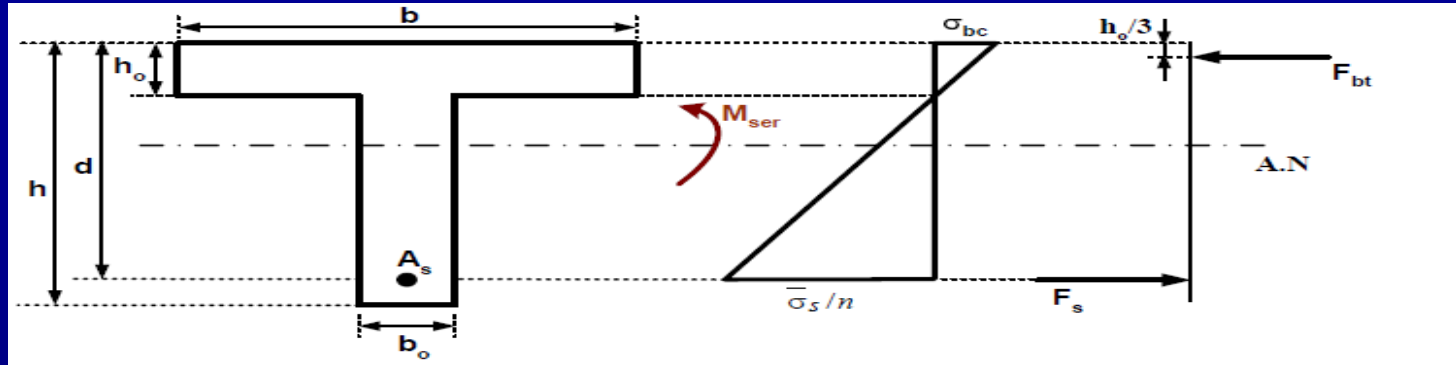
$$A_{sc} = \frac{M_u - M_d - M_{bl}}{(d - d') \sigma_{sc}}$$

$$\text{avec : } \sigma_{sc} = f(\epsilon_{sc})$$

- Si $0.8y_l \leq h_o$: on se ramène à une section rectangulaire (bxh) avec $A_{sc} \neq 0$

III.2.2 Vérification des sections en T à l'E.L.S: Le principe est le même que pour le cas d'une section simplement rectangulaire. Les deux inconnues fondamentales qui doivent être déterminées pour la vérification sont y et I .

III.2.2.1. Position de l'axe neutre et l'inertie: Le moment statique par rapport à un axe passant par le centre de gravité de la section (l'axe neutre) est nul



Pour savoir où se situera l'axe neutre y , il est nécessaire d'effectuer un premier calcul arbitraire pour déterminer le signe de : $\frac{by^2}{2} + nA_{sc}(y - d') - nA_{st}(d - y)$ En remplaçant y par h_o .
(cas 1) Si le signe est positif, ($y \leq h_o$): l'axe neutre est dans la table de compression les calculs sont identiques au cas d'une section rectangulaire (les équations ne changent pas).

(cas 2): Si le signe est négatif, ($y > h_o$): l'axe neutre est dans la nervure (section en T)

L'équation pour déterminer y devient : $\frac{by^2}{2} - \frac{(b - b_o)(y - h_o)^2}{2} + nA_{sc}(y - d') - nA_{st}(d - y) = 0$

Donc l'équation de moment d'inertie quadratique sera :

$$I = \frac{by^3}{3} - \frac{(b - b_o)(y - h_o)^3}{3} + nA_{st}(d - y)^2 + nA_{sc}(y - d')^2$$

$\sum \mathbf{M}_i = M_s$ (moment de service)

Nous avons : $M_b + M_{ASC} + M_{AST} = M_{ser}$

$I = I_b + n \cdot I_{st} + n \cdot I_{sc}$

Alors les contraintes sont : $\sigma_{bc} = \frac{M_{ser} \cdot y}{I_{GZ}}$ et $\sigma_{st} = \frac{n \cdot M_{ser} \cdot (d - y)}{I}$

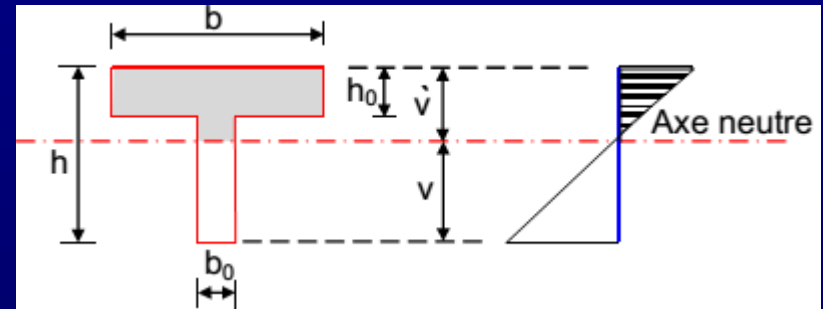
Les vérifications sont :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{bc} < \overline{\sigma_{bc}} \\ \sigma_{st} < \overline{\sigma_{st}} \end{array} \right\} E.L.S$$

vérifié

III.2.2.2 Condition de non-fragilité: La condition de non fragilité conduit à placer une section minimale d'armatures tendues pour une dimension de coffrage donnée.

$$A_{min} = \frac{I}{0,01 \cdot h \cdot v} \cdot \frac{f_{t28}}{f_e}$$



$$I_{GZ} = b_0 \frac{h^3}{3} + (b - b_0) \frac{h_0^3}{3} - [b_0 h + (b - b_0) h_0] v'^2$$

$$v' = \frac{b_0 h^2 + (b - b_0) h_0^2}{2[b_0 h + (b - b_0) h_0]}$$

$$v = h - v'$$

$$A_{min} = \frac{I_{GZ}}{(d - \frac{h_0}{3})v} \cdot \frac{f_{t28}}{f_e}$$

-Application : Soit une section en "Té" sollicitée par un moment de flexion à l'E.L.U
: $M_u = 0,8 \text{ MN.m}$ et à l'E.L.S $M_{ser} = 0,4 \text{ MN.m}$
Si : $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$; FeE400 ;
 $d = 65 \text{ cm}$; $d' = 4 \text{ cm}$.
La fissuration est préjudiciable

