Abdelhafid Boussouf University - Mila
Faculty of Science and Technology
Common Core ST Department
Module: Analysis 2

Academic Year: 2025/2026
1st Year Common Core ST
And 1st Year Engineering
Semester II

Analysis II: Tutorial Exercise Sheet 2

Exercise 01: Domain and Limits

1. Find and sketch D_f: (أوجد و أرسم D_f)
   (a) $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$
   (b) $f(x,y)=\ln(x+y-1)$
   (c) $f(x,y)=\arcsin\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)$
   (d) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x-y^2}}$
   (e) $f(x,y)=\arccos(x^2+y^2-2)$
   (f) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2}$
2. Prove the limit does not exist: (برهن أن النهاية غير موجودة)
   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ *(try $y=x^2$ and $y=x$)*
   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. Use polar coordinates to compute: (استعمل الإحداثيات القطبية من أجل حساب)
   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$
   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$
   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

Exercise 02: Partial Derivatives and Differentiability

1. Compute f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy} for: (أحسب f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy} من أجل)
   (a) $f(x,y)=\sin(xy)+e^{x^2y}$
   (b) $f(x,y)=\arctan(y/x)$
   (c) $f(x,y)=x^y$ $(x>0)$
2. Show $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ is harmonic: $f_{xx}+f_{yy}=0$. (بين أن $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ توافقية: $f_{xx}+f_{yy}=0$)
3. Find the tangent plane to $z=\sqrt{x^2+y^2}$ at $(3,4,5)$. (أوجد المستوي المماسي لـ $z=\sqrt{x^2+y^2}$ عند $(3,4,5)$)
4. Show $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ is not differentiable at $(0,0)$ despite $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.
   بين أن $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ ليست قابلة للتفاضل عند $(0,0)$ بالرغم من أن $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

Exercise 03: Chain Rule and Taylor

1. $z=e^{u-v}$, $u=x^2+y$, $v=x-y^2$. Find $\frac{\partial z}{\partial x}$ and $\frac{\partial z}{\partial y}$. (أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$)
2. **(Thermodynamics)** For ideal gas $P=nRT/V$, $T=T(t)$, $V=V(t)$: find dP/dt by chain rule.
   ((الديناميكا الحرارية) من أجل الغاز المثالي $P=nRT/V$ ، $T=T(t)$ ، $V=V(t)$: أوجد dP/dt بقاعدة السلسلة)
3. Write the Taylor expansion of $f(x,y)=\cos x\sin y$ to order 2 at $(0,0)$.
   (أكتب نشر تايلر لـ $f(x,y)=\cos x\sin y$ حتى الرتبة 2 عند النقطة $(0,0)$)
4. Write the Taylor expansion of $f(x,y)=e^x\cos y$ to order 2 at $(0,0)$.
5. Write the Taylor expansion of $f(x,y)=\ln(1+x+2y)$ to order 2 at $(0,0)$

Exercise 04: Optimization and Lagrange

1. Find and classify all critical points of: (أوجد وصنف كل النقاط الحرجة لـ)
   (a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$
   (b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$
2. **(Minimum surface area)** Closed box, volume $V_0 = 32m^3$. Minimize $S = 2(xy + xz + yz)$.
   (المساحة الاصغرية للسطح) صندوق مغلق، حجمه $V_0 = 32m^3$. صغر $S = 2(xy + xz + yz)$
3. Minimize $f(x, y) = x^2 + y^2$ subject to $2x + 3y = 12$. (صغر $f(x, y) = x^2 + y^2$ بشرط أن $2x + 3y = 12$)
4. **(Challenge)** Prove the square maximizes area among all rectangles with fixed perimeter, using Lagrange multipliers.
   (التحدي) أثبت أن المربع يحقق أقصى مساحة بين جميع المستطيلات ذات المحيط الثابت، باستخدام مضاعفات لاغرانج
5. When an electric current I flows through an electrical circuit with resistance R, the amount of heat generated per unit time is proportional to RI^2. Decompose the current I into currents I_1, I_2, I_3 using three conductors with resistances R_1, R_2, R_3 in such a way that the generated heat is minimized.
   عندما يمر تيار كهربائي I عبر دارة كهربائية ذات مقاومة R ، فإن كمية الحرارة المتولدة في وحدة الزمن تتناسب مع RI^2 . قم بتفكيك التيار I إلى التيارات I_1, I_2, I_3 باستعمال ثلاثة نواقل ذات المقاومات R_1, R_2, R_3 بحيث تكون الحرارة المتولدة أصغر ما يمكن.

Exercise 05: Miscellaneous Problems

1. **(Implicit relations and thermodynamics)** Let $F(P, V, T) = 0$ be a relation between pressure P, volume V, and temperature T of a physical system. Assuming the implicit function theorem applies, prove:
   (العلاقات الضمنية والديناميكا الحرارية) لتكن $F(P, V, T) = 0$ علاقة بين الضغط P ، الحجم V ، ودرجة الحرارة T لجملة فيزيائية. بافتراض صحة مبرهنة الدالة الضمنية، أثبت:
   (a) $\left.\dfrac{\partial P}{\partial T}\right|_V \left.\dfrac{\partial T}{\partial V}\right|_P = -\left.\dfrac{\partial P}{\partial V}\right|_T$
   (b) $\left.\dfrac{\partial P}{\partial T}\right|_V \left.\dfrac{\partial T}{\partial V}\right|_P \left.\dfrac{\partial V}{\partial P}\right|_T = -1$ *(cyclic rule)*
2. **(Laplace equation)** Show that $u(x, y) = e^x \cos y$ satisfies $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
   (معادلة لابلاس) بين أن $u(x, y) = e^x \cos y$ تحقق $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.
3. **(Error propagation)** The volume of a cylinder is $V = \pi r^2 h$. Using the total differential, estimate the maximum relative error $\dfrac{dV}{V}$ when r and h are each measured with a relative error of 1%.
   (انتشار الأخطاء) حجم الأسطوانة $V = \pi r^2 h$. باستخدام التفاضل الكلي، قدّر الخطأ النسبي الأقصى $\dfrac{dV}{V}$ إذا كان كل من r و h يُقاسان بخطأ نسبي قدره 1% .
4. **(Electrostatics)** Given $V = \dfrac{k}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $k = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}$. (الكهرباء الساكنة) لدينا)
   (a) Compute $\vec{E} = -\nabla V$ and show $\vec{E} = k\,\dfrac{\vec{r}}{r^3}$. (أحسب و بين)
   (b) Show $\Delta V = 0$ for $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.