العلاقات

تعريف أول للعلاقة بين مجموعتين :

نعتبر مجموعتين غير خاليتين E,F .

نسمي علاقة بين المجموعتين E,F كل خاصية تسمح بأن نرفق عناصر من E بعناصر من F .

نرمز للعلاقات بالأحرف $\mathcal{R}\ ,\ \mathcal{S}\ ,\ \mathcal{T},.....$

وإذا كان العنصر $a\in E$ مرتبطا مع العنصر $b\in F$ نكتب $a\mathcal{R}b$

بيان علاقة : لتكن $\mathcal{R}$ علاقة بين المجموعتين E,F

نسمي بيان العلاقة $\mathcal{R}$ المجموعة الجزئية من $E\times F$ والمعرفة بـــــ

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}}=\{(a,b)\in E\times F\ /\ a\mathcal{R}b\}$$

أمثلـــة :

1. لتكن $E=\{2,3,5\}$ و $F=\{3,4,6,9\}$. نعرف العلاقة $\mathcal{R}$ كالتالي:

من أجل $a\in E,b\in F\ :\ a\mathcal{R}b$ إذا وفقط إذا كان a يقسم b

لدينا: $2\mathcal{R}4\ ,2\mathcal{R}6\ ,3\mathcal{R}3\ ,3\mathcal{R}6,3\mathcal{R}9$

ومنه بيان العلاقة هو $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}=\{(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(3,9)\}$

2. لتكن $E=\{2,3,5\}$ و $F=\{3,4,6,9\}$ نعرف العلاقة $\mathcal{S}$ كالتالي:

من أجل $a\in E, b\in F$: $a\mathcal{S}b$ إذا وفقط إذا كان a أكبر تماما من b

لدينا: $5\,\mathcal{S}\,3$, $5\,\mathcal{S}\,4$

ومنه بيان العلاقة هو $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}=\{(5,3),(5,4)\}$

3. لتكن $E=\{2,3,5\}$ و $F=\{3,4,6,9\}$ نعرف العلاقة $\mathcal{T}$ كالتالي:

من أجل $a\in E, b\in F$: $a\mathcal{T}b$ إذا وفقط إذا كان $a+b$ عددا زوجيا

لدينا: $2\,\mathcal{T}\,4$, $2\,\mathcal{T}\,6$, $3\,\mathcal{T}\,3$, $3\,\mathcal{T}\,9$, $5\,\mathcal{T}\,3$, $5\,\mathcal{T}\,9$

ومنه بيان العلاقة هو $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}=\{(2,4),(2,6),(3,3),(3,9),(5,3),(5,9)\}$

ملاحظة : نلاحظ أن خلاصة دراسة علاقة هي تحديد بيانها، وبالتالي لن نفرق من الآن فصاعدا بين علاقة ما وبين بيانها.وسنكتب $(a,b)\in\mathcal{R}$ عوض $a\mathcal{R}b$.

خواص علاقة ثنائية:

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية معرفة على المجموعة E

أ.الإنعكاس: نقول أن العلاقة $\mathcal{R}$ إنعكاسية إذا تحقق

$$\forall a \in E : (a,a) \in \mathcal{R}$$

ب.التناظر: نقول أن العلاقة $\mathcal{R}$ تناظرية إذا تحقق

$$\forall a, b \in E : (a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,a) \in \mathcal{R}$$

ج. ضد التناظر: نقول أن العلاقة $\mathcal{R}$ ضـــد تناظرية إذا تحقق

$$\forall a, b \in E : (a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$$

د. التعــــدي: نقول أن العلاقة $\mathcal{R}$ متعديـــــة إذا تحقق

$$\forall a, b, c \in E : (a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a,c) \in \mathcal{R}$$

ملاحظة هامة:

إن خاصيتي **التناظر** و**ضد التناظر** ليستا متعاكستين ويمكن أن تجتمعا في نفس العلاقة، ومثال ذلك علاقة "المساواة " في مجموعة كيفية غير خالية، فهي تناظرية وضد تناظرية.

أمثلة:

1. لتكن $E = \mathbb{N}^*$. نعرف العلاقة الثنائية

من أجل $a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N}^*$: $a\mathcal{R}b$ إذا وفقط إذا كان a مضاعفا لـــ b

أي $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a = mb , m \in \mathbb{N}^*$.

إن العلاقة $\mathcal{R}$: **انعكاسية** لأن $a = 1.a$.

ضد تناظرية لأن

$$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow$$

$$a = mb \wedge b = m'a \Rightarrow a = mm'a \Rightarrow mm' = 1, m, m' \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow m = m' = 1$$

ومنـــه $a = b$

و**متعديـــة** لأن

$$a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a = \mathrm{m}b \wedge b = \mathrm{m}'c \Rightarrow a = \mathrm{mm}'c \Rightarrow a\mathcal{R}c$$

لكنها ليست تناظرية فمثلا $4\,\mathcal{R}\,2$ لكن $2\,\not{\mathcal{R}}\,4$.

2. نعتبر $E = \{1,2,3,4\}$ و العلاقتين $\mathcal{R}_1 = \{(1,2),(2,1),(1,1)\}$ و $\mathcal{R}_2 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(1,3)\}$ المعرفتين على E

خواص $\mathcal{R}_1$:

- ليست انعكاسية مثلا $2\,\not{\mathcal{R}}_1\,2$
- ليست ضد تناظرية مثلا $1\,\mathcal{R}_1\,2 \wedge 2\,\mathcal{R}_1\,1$ لكن $1 \neq 2$
- تناظرية
- ليست متعدية مثلا $2\,\mathcal{R}_1\,1 \wedge 1\,\mathcal{R}_1\,2 \not\Rightarrow 2\,\mathcal{R}_1\,2$

خواص $\mathcal{R}_2$:

- ليست انعكاسية $2\,\not{\mathcal{R}}_2\,2$
- ضد تناظرية
- ليست تناظرية مثلا $1\,\mathcal{R}_2\,3 \wedge 3\,\not{\mathcal{R}}_2\,1$
- متعدية

علاقة التكافؤ :

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية معرفة على المجموعة E

تعريف: نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة **تكافؤ** إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية في **آن واحد**

أمثلة :

1. نعتبر المجموعة $E=\{1,2,3\}$ والعلاقتين $\mathcal{R}_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)(1,3),(3,1)\}$
و $\mathcal{R}_2=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

إنهما علاقتا تكافؤ

2. نعتبر المجموعة $E=\mathbb{Z}$ إن العلاقة $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a-b=3m\ ,m\in\mathbb{Z}$

هي علاقة تكافؤ

3. نعتبر المجموعة $E=\mathbb{N}$ إن العلاقة

$$aSb \Leftrightarrow a^2-b^2=a-b\ /\quad a\in\mathbb{N},b\in\mathbb{N}$$

هي علاقة تكافؤ

صفوف **التكافؤ** :

لتكن المجموعة E المزودة بعلاقة التكافؤ $\mathcal{R}$ وليكن $a\in E$

نسمي صف تكافؤ العنصر $a\in E$ المجموعة الجزئية التالية

$$\overline{a}=\{x\in E: x\mathcal{R}a\}$$

أمثلة :

- في المثال الأول السابق لدينا $\overline{1}=\{1,3\}\ ,\overline{2}=\{2\},\overline{3}=\{1,3\}$ بالنسبة للعلاقة $\mathcal{R}_1$ و $\overline{1}=\{1\}\ ,\overline{2}=\{2\},\overline{3}=\{3\}$ بالنسبة للعلاقة $\mathcal{R}_2$
- في المثال الثاني لدينا صفوف التكافؤ التالية

$$\overline{0}=\{t=3k\ ,k\in\mathbb{Z}\}\ ,\overline{1}=\{t=3k+1,k\in\mathbb{Z}\},\overline{2}=\{t=3k+2,k\in\mathbb{Z}\}$$

- في المثال الثالث لدينا $\overline{a}=\{a,1-a\}$.

علاقة الترتيب :

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية معرفة على المجموعة E

تعريف : نقول أن $\mathcal{R}$ علاقة **ترتيب** إذا كانت انعكاسية وضد تناظرية ومتعدية في **آن واحد**

أمثلة :

1. نعتبر المجموعة $E = \mathbb{N}$ إن العلاقة $\mathcal{R} \equiv \leq$ هى علاقة ترتيب.

3. نعتبر المجموعة $E = \mathbb{N}^*$ إن العلاقة: a يقسم b $\Leftrightarrow a\mathcal{R}b$

هي علاقة ترتيب.

د