المجموعات

تمهيـــــــد :

تلعب نظرية المجموعات دورا مهما في الرياضيات، ويعتبر مفهوم المجموعة من المفاهيم الأساسية في بناء هذه النظرية.

يفترض أن مفهوم المجموعة واضح في الأذهان وتفاديا لكل التباس ونظرا لظهور بعض التناقضات في نظرية المجموعات فقد تم تحديـــد مجموعة من الضوابط لهذا المفهوم نلخصها كما يلي:

1. تتحدد المجموعة تحديـــــدا نهائيا إذا تم تحديـــد مفهوم الإنتماء بوضوح، أي أننا نستطيع أن نحدد وبدون غموض إذا كان الكائن الرياضي a ينتمي أو لا إلى المجموعة E

أي أننا نستطيع أن نحكم وبدون غموض على صدق إحدى القضيتين

$a \in E$ **أو** $a \notin E$

وفي حالة $a \in E$ نقول أن a عنصر من E

2. الكائن الرياضي لا يمكن أن يكون في آن واحد مجموعة وعنصرا من هذه المجموعة.

أي أن الكتابة التالية مرفوضة $a \in a$

3. مجموعة كل المجموعات غير موجودة.

مفهوم الاحتواء:

لتكن E و F مجموعتين، نقول أن **محـــــتواة** في إذا تحقق الاستلزام التالي:

$$(\forall x)(x \in E \Rightarrow x \in F)$$ ونكتب $E \subset F$

المساواة:

لتكن E و F مجموعتين ، نقول أن E **تساوي** F إذا تحقق التكافؤ التالي :

$$(\forall x)(x \in E \Leftrightarrow x \in F)$$ ونكتب $E = F$

المجموعة الخالية :

نقبل بوجود مجموعة لا تشمل أي عنصر، تسمى المجموعة الخالية

ونرمز لها بـــــ ϕ

بعض النتائج :

1. لدينا $E \subset E$

لأن الاستلزام $(\forall x)(x \in E \Rightarrow x \in E)$ صحيح دوما.

2. من أجل كل مجموعة E لدينا $\phi \subset E$

لأن الاستلزام $(\forall x)(x \in \phi \Rightarrow x \in E)$ صحيح دوما.

يصبح تعريف تساوي مجموعتين كالتالي:

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F \wedge F \subset E)$$

3.المجموعة الخالية **وحـــيدة**

البرهان: لنفرض وجود مجموعتين خاليتين ϕ_1 و ϕ_2عندئذ حسب النتيجة 2 لدينا $\phi_1 \subset \phi_2$ و $\phi_2 \subset \phi_1$

ومنه حسب النتيجة 3 فإن $\phi_1 = \phi_2$

4. الاحتواء علاقة **متعدية** بمعنى $E \subset F \wedge F \subset G \Rightarrow E \subset G$

ينتج ذلك من تعدي الاستلزام.

عمليات على المجموعات :

نعتبر الآن E و F مجموعتين كيفيتين

التقاطع:

نسمي تقاطع المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E \cap F = \{x \,/\, x \in E \wedge x \in F\}$$

الاتحاد:

نسمي اتحاد المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E \cup F = \{x \,/\, x \in E \vee x \in F\}$$

الفرق بين مجموعتين:

نسمي **الفرق بين المجموعتين** E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E - F = \{x \,/\, x \in E \wedge x \notin F\}$$

الفرق التناظري:

نسمي **الفرق التناظري** بين المجموعتين E و F المجموعة الجديدة التالية

$$E \Delta F = \left(E \cup F\right) - \left(E \cap F\right)$$

بعض الخـــــــواص:

تتمتع العمليات المعرفة سابقا بخواص كثيرة نذكـــر بعضها

من أجل A, B, C مجموعات كيفية لدينا

1. $A \cap \phi = \phi \, , A \cup \phi = A \, , \, A \cap A = A \, , A \cup A = A$

2. خاصية **التبديل**

$$A \cap B = B \cap A \ \ , A \cup B = B \cup A \, .$$

3. خاصية **التجميع**

$$\left(A \cap B\right) \cap C = A \cap \left(B \cap C\right), \left(A \cup B\right) \cup C = A \cup \left(B \cup C\right).$$

4. خاصية **التوزيع**

$$\left(i\right) A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$$

$$\left(ii\right) A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup C\right)$$

المجموعة الجزئية – مجموعة أجزاء مجموعة – المتممة:

لتكن E و A مجموعتين

تعريف 1: نقول أن A **مجموعة جزئية** من المجموعة E إذا كانت $A \subset E$.

تعريف 2: نسمي **مجموعة أجزاء** E ، المجموعة التي عناصرها أجزاء E ، ونرمز لها بـــــ $P\left(E\right)$

أي أن $P\left(E\right) = \left\{A \, / \, A \subset E\right\}$ و $A \in P\left(E\right) \Leftrightarrow A \subset E$.

خاصية : لدينا دائما $\phi \in P\left(E\right), E \in P\left(E\right)$

نتيجة : إذا كان عدد عناصر E هو n فإن عدد عناصر $P\left(E\right)$ هو 2^n.

لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة E.

تعريف 3: نسمي **متممة** A في E المجموعة التالية

$$C_E A = \{x / x \in E \wedge x \notin A\} = E - A$$

خواص :

1. $C_E \phi = E , C_E E = \phi$
2. $C_E (C_E A) = A$
3. $C_E (A \cap B) = C_E B \cup C_E A \ , C_E (A \cup B) = C_E B \cap C_E A$

الجداء الديكارتي لمجموعتين

لتكن E و F مجموعتين

تعريف : نسمي **الجداء الديكارتي** للمجموعتين E و F المجموعة التالية

$$E \times F = \{(a,b) / a \in E , b \in F\}$$

نسمي العنصر (a,b) ثنائية مرتبة ولدينا

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$$

بعض الخــواص:

1. $E \times \phi = \phi$
2. $E \times F \neq F \times E$ ، إذا كان $E \neq F$
3. إذا كان عدد عناصر E هو m وعدد عناصر F هو n فإن عدد عناصر $E \times F$ هو $m.n$

مفهوم تجزئة مجموعة:

لتكن E مجموعة كيفية و $\{A_i \ , i \in I\}$ (حيث I مجموعة أدلة) عائلة أجزاء من E.

نقول أن تشكل **تجزئة** للمجموعة E إذا تحقق ما يلي

1. $E = \bigcup_{i \in I} A_i$
2. الأجزاء متقاطعة مثنى مثنى وهو ما نعبر عنه بـــ:

$$A_i \cap A_j = \phi \, , i \neq j$$

أمثلة :

1. لتكن المجموعة $E = \{1,2,3\}$.

إن العائلة $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ تشكل تجزئة للمجموعة E

إن العائلة $\{\{1\},\{2,3\}\}$ تشكل تجزئة أخرى للمجموعة E

2. لتكن $E = \mathbb{N}$.

إن العائلة $\{A_n =]n, n+1], n \in \mathbb{N}\}$ تشكل تجزئة للمجموعة E

مفهوم التغطية:

لتكن E مجموعة كيفية و $\{B_i \, , i \in I\}$عائلة مجموعات كيفية

نقول أن العائلة تشكل **تغطية** للمجموعة E إذا تحقق ما يلي:

$$E \subset \bigcup_{i \in I} B_i$$

أمثلة :

1. لتكن المجموعة $E = \{1,2,3\}$

إن العائلة $\{\{1\},\{2,-1\},\{3,4,5\}\}$ تشكل تغطية للمجموعة E

إن العائلة $\{\{1,2\},\{4,-1\},\{3,4,7\}\}$ تشكل تغطية أخرى للمجموعة E

2. لتكن $E = \mathbb{N}$

إن العائلة $\{B_n =]-n, n[, n \in \mathbb{N}\}$ تشكل تغطية للمجموعة E