الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عبد الحفيظ بوالصوف - ميلة

ملحقة المدرسة العليا للأساتذة - ميلة

مسار أستاذ التعليم الإبتدائي

رياضيات قاعدية 2

الدرس 1: مبادئ في المنطق الرياضي

الأستاذة : **دعاس خديجة**

تمهيد

يهدف هذا الدرس إلى تقديم قواعد الاستدلال الرياضي، وهي أنماط البرهان المستعملة لحل مسائل رياضية. إن ذلك يتطلب عرض المفاهيم الأساسية للمنطق الرياضي، وهي ضرورية لبناء أنماط البرهان.

القضية المنطقية :

نسمي قضية منطقية كل نص يمكن الحكم عليه ودون غموض صحيح (صادق) أو خاطئ.

ترميز

نرمز للقضايا بالحروف P، Q، R، ...

قيمة صدق القضية:

نرفق بكل قضية قيمة صدق هي **1** إذا كانت صادقة (صحيحة) و **0** إذا كانت خاطئة.

ونرمز لذلك بـــ

$$v(p) = \begin{cases} 1 & P \text{ صادقة} \\ 0 & P \text{ خاطئة} \end{cases}$$

نفي القضية :

لتكن P قضية. نسمي نفي القضية P، القضية الجديدة والتي نرمز لها بـــ $\overline{p}$ والناتجة بإدخال إحدى أدوات النفي ولدينا

$$v(\overline{p}) = \begin{cases} 0 & (P \text{ صادقة}) \\ 1 & (P \text{ خاطئة}) \end{cases}$$

أمثلة :

1. المربع هو مستطيل (قضية)

2. كل المثلثات قائمة (قضية)

3. ما ثمن هذا الكتاب؟ (ليست قضية)

4. المربع ليس مستطيلا (قضية وهي نفي القضية 1)

5. $3 < 2$ (قضية)

6. $3 \geq 2$ (قضية وهي نفي القضية 5)

حساب القضايا :

يهدف هذا الحساب إلى إنشاء قضايا جديدة من قضايا معلومة بواسطة روابط منطقية.

i. الوصل " وَ " :

لتكن P و Q قضيتين.

نسمي **الوصل** بين P و Q، القضية الجديدة والتي نرمز لها بـــ $P \wedge Q$ (نقرأ P وَ Q) والتي تكون صادقة في الحالة الوحيدة: لما يكون P وَ Q صادقتين معا.

مثلا: $\left(4 = 2^2\right) \wedge \left(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\right)$ قضية خاطئة.

ii. الفصل " أو" :

لتكن P و Q قضيتين.

نسمي **الفصل** بين P و Q، القضية الجديدة والتي نرمز لها بـــ $P \vee Q$ (نقرأ P أو Q) والتي تكون خاطئة في الحالة الوحيدة: لما يكون P وَ Q خاطئتين معا.

مثلا: $\left(4 = 2^2\right) \vee \left(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\right)$ قضية صادقة.

iii. الاستلزام :

تعريف 1: نسمي استلزاما كل قضية من الشكل:

إذا كان P فإن Q.

تعريف 2: نسمي استلزاما بين P و Q أو نقول P يستلزم Q ونكتب $P \Rightarrow Q$، القضية $\bar{P} \vee Q$.

- نسمي P مقدمة الاستلزام
- نسمي Q تالي الاستلزام

iv. التكافؤ المنطقي :

نقول أن القضيتين P و Q متكافئتان ونكتب $P \Leftrightarrow Q$ للتعبير عن القضية:

$$\left(P \Leftarrow Q\right) \wedge \left(Q \Leftarrow P\right)$$

ومنه يكون التكافؤ صادقا إذا كانت للقضيتين P و Q نفس قيمة الصدق.

نلخص ما سبق في الجدول التالي:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

مصطلحات :

لنفرض أن الاستلزام $P \Rightarrow Q$ صادق.

يكون ذلك في الحالات الثلاث الآتية:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
0	1	1
0	0	1

نعبر عن أن الاستلزام $P \Rightarrow Q$ صادق بإحدى الطرق الآتية:

- إن P شرط كاف للقضية Q.
- إن Q شرط لازم عن P.
- ليكون P صادقا يلزم أن يكون Q صادقا.
- ليكون Q صادقا يكفي أن يكون P صادقا.

بعض خواص الروابط المنطقية :

لتكن P و Q قضيتين.

$$\begin{cases} P \wedge Q \equiv Q \wedge P \\ P \vee Q \equiv Q \vee P \end{cases}, \qquad \begin{cases} P \wedge P \equiv P \\ P \vee P \equiv P \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{P \wedge Q} \equiv \overline{Q} \vee \overline{P} \\ \overline{P \vee Q} \equiv \overline{Q} \wedge \overline{P} \end{cases}, \qquad \overline{\overline{P}} \equiv P$$

لتكن P، Q و R قضايا

$$\begin{cases}(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R) \\ (P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)\end{cases}$$

$$\begin{cases}P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)\end{cases}$$

المكمان الكلي والوجودي

المكم الكلي

$$\forall x \in N,\ x + 0 = x$$

المكم الوجودي

$$\exists x \in R,\ x^2 = 4$$

نفي المكمات:

$$\overline{\forall x\, P(x)} \Leftrightarrow \exists x\, \overline{P(x)}$$

$$\overline{(\exists x\, P(x))} \Leftrightarrow \forall x\, \overline{P(x)}$$

دالة القضية :

2.1 تعريف دالة القضية

دالة القضية هي عبارة منطقية تحتوي على متغير واحد أو أكثر، ولا تملك قيمة حقيقة محددة إلا بعد تعويض المتغير بقيمة من مجال معيّن. نرمز لها عادة بـ:

$$P(x),\ Q(x, y)$$

2.2 الفرق بين القضية ودالة القضية

القضية	دالة القضية
لها قيمة حقيقة مباشرة	لا قيمة حقيقة قبل التعويض
ثابتة	تعتمد على متغير
2 عدد زوجي	x عدد زوجي

2.3 أمثلة :

مثال 1:

$$P(x): \ x \text{ عدد زوجي}$$

$$P(2) = T, \quad P(5) = F$$

مثال 2:

$$Q(x): \ x^2 \geq 0 \quad (x \in R)$$

هذه الدالة صحيحة لكل x حقيقي.

مثال 3:

$$P(x): \ x > 1 \land x \text{ عدد أولي}$$

$$P(2) = T, \quad P(4) = F$$

مثال 4:

$$Q(x,y): \ x + y = 0$$

$$Q(2,-2) = T, \quad Q(1,1) = F$$

مثال 5 :

$$P(x): \ x^2 = x$$

$$\exists x \in R \text{ بحيث } P(x)$$

الحلول: $x = 0$ و $x = 1$.

مثال 7 :

$$P(n): \ n^2 + n \text{ عدد زوجي}$$

$$\forall n \in Z, \ P(n)$$

2.4 أهمية مجال التعريف في دالة القضية

تتغير قيمة دالة القضية باختلاف **مجال التعريف**، حتى وإن بقيت الصيغة نفسها. **مثال:**

$$P(x):\ x^2=1$$

- على R:

$$\exists x\in R \text{ بحيث } P(x)$$

صحيحة لأن $x=1$ أو $x=-1$.

- على N: صحيحة فقط لـ $x=1$.
- على Z: صحيحة لـ $x=1$ و $x=-1$.
- على Q: صحيحة لأن $1,-1\in Q$.

2.5 ترتيب المكممات

ترتيب المكممات في العبارة المنطقية يؤثر بشكل مباشر على معناها وقيمتها.

مثال 1:

$$\forall x\in R,\ \exists y\in R\ :\ x+y=0$$

هذه العبارة **صحيحة**، إذ يمكن اختيار $y=-x$ لكل x.

مثال 2:

$$\exists y\in R,\ \forall x\in R\ :\ x+y=0$$

هذه العبارة **خاطئة**، لأنه لا يوجد عدد حقيقي واحد y يحقق المعادلة لكل x.

خلاصة:

$$\forall x\exists y\neq\exists y\forall x$$