التطبيقات

ليكن E و F مجموعتين.

تعريف : نسمي تطبيقا من E نحو F كلّ علاقة تسمح بأن نرفق بكلّ عنصر من E عنصرًا وحيدًا من F.

ونرمز للتطبيق بـــ :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

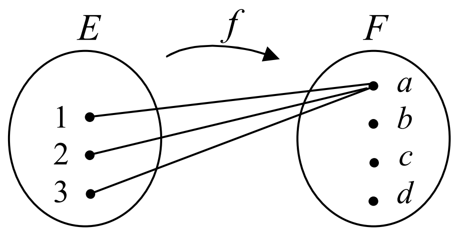
ترميز : تسمى E مجموعة المنطلق (أو البدء).

تسمى F مجموعة الوصول.

x تسمى سابقة و $y = f(x)$ تسمى صورة العنصر x.

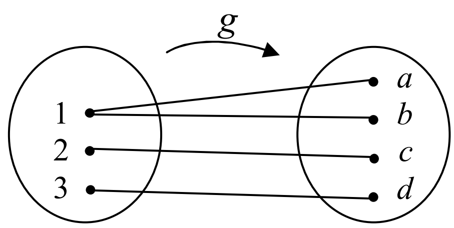
أمثلة :

(1)



f تطبيق

(2)



g ليس تطبيقا

(3)
$$\begin{aligned} f : \mathsf{E} &\longrightarrow \mathsf{F} \\ n &\longrightarrow f(n) = n - 3 \end{aligned}$$

إن f ليس تطبيقا

ملاحظة : إن التطبيق إذن هو ثلاثية (E, F, f).

خواص تطبيق :

التباين : ليكن $f : E \longrightarrow F$ تطبيقا.

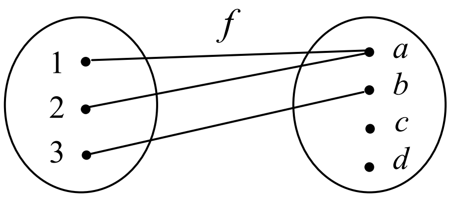
تعريف : نقول أن f متباين إذا حقّق :

$$\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

تعريف مكافئ : بأخذ العكس النقيض للاستلزام السابق نحصل على التعريف :

F متباين $\Leftrightarrow \left[\forall x_1, x_2 \in E : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\right]$

(1)



f ليس متبايناً

(2) $$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longrightarrow n+5$$

إن f متباين لأنه:

$$n, m \in \mathbb{N} : f(n) = f(m) \Rightarrow n+5 = m+5$$
$$\Rightarrow n = m$$

(3) $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2$$

إن f ليس متبايناً لأنه مثلاً من أجل $x_1 = 2 , x_2 = -2$

لدينا $x_1 \neq x_2$ لكن $f(x_1) = f(x_2) = 4$.

الغمر :

ليكن $f : E \longrightarrow F$ تطبيقاً.

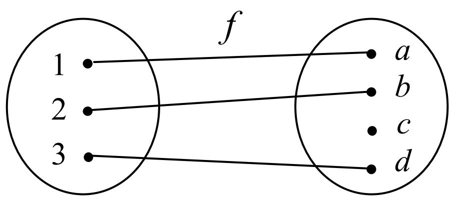
نقول أن f غامر إذا حقق :

$$\forall y \in F , \exists x \in E : f(x) = y$$

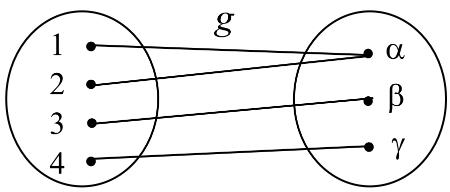
وهو ما يكافئ :

من أجل كل y من F، المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلاً على الأقل.

أمثلة :

(1) 

f ليس غامرًا

(2) 

g تطبيق غامر

(3)
$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longrightarrow n+5$$

f ليس غامرًا :

من أجل $y=1$ مثلا المعادلة $f(n)=n+5=1$ لا تقبل حلا في .

(4)
$$f : \mathbb{R}-\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{1\}$$
$$x \longrightarrow \frac{x}{x-1}$$

لندرس الغمر : $y \in \mathbb{R}-\{1\}$

$$f(x)=y \longleftrightarrow \frac{x}{x-1}=y$$
$$\longleftrightarrow x=xy-y$$
$$\longleftrightarrow xy-x=y$$
$$\longleftrightarrow x(y-1)=y$$
$$\longleftrightarrow x=\frac{y}{y-1}$$

نلاحظ أن x موجود دائما ومنه f غامر.

$$(5) \qquad \begin{array}{rl} f: \mathbb{R}-\{2\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}$$

ليكن $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x)=y &\longleftrightarrow \frac{x+1}{x-2}=y \\ &\longleftrightarrow x+1=xy-2y \\ &\longleftrightarrow xy-x=2y+1 \\ &\longleftrightarrow x(y-1)=2y+1 \\ &\longleftrightarrow x=\frac{2y+1}{y-1} \end{aligned}$$

نلاحظ أنه من أجل $y=1$ فإن x غير موجود، أي أن $y=1$ لا يقبل سابقة أو أن المعادلة $f(x)=1$ لا تقبل حلولاً. ومنه f ليس غامرًا.

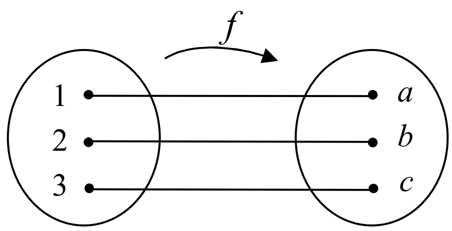
التقابل :

ليكن $f: E \longrightarrow F$ تطبيقا.

نقول أن f تقابل إذا كان متباينا وغامرًا. وهو ما يكافئ أن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلاً <u>وحيدًا</u> من أجل كل $y \in F$.

أمثلة :

(1)



f تقابل

$$(2) \qquad \begin{array}{rl} f: \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \longrightarrow n+5 \end{array}$$

f ليس متقابلا لأنّه ليس غامرًا ($y=0$ مثلا لا يقبل سابقة).

(3) $$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longrightarrow x^2$$

f تقابل لأن المعادلة $x^2 = y \longleftrightarrow f(x) = y \ , y \in \mathbb{R}_+$

تقبل حلا وحيدًا هو : $x = \sqrt{y}$.

الصورة المباشرة :

ليكن $f : E \longrightarrow F$ تطبيقا ولتكن $E \supset A$.

نسمي الصورة المباشرة للجزء A وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من F والمعرفة بـــ :

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$$
$$= \{y \in F / \exists x \in A : y = f(x)\}$$

الصورة العكسية :

نسمي الصورة العكسية للجزء $F \supset B$ وفق التطبيق f المجموعة الجزئية من E والمعرفة بـــ :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$$