

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة عبد الحفيظ بوالصوف - ميله



ملحقه المدرسه العليا للأساتذة - ميله
مسار أستاذ التعليم الإبتدائي

رياضيات قاعدية 1

حلول سلسلة الاعمال الموجهة 5 : أنشطة حسابية في Q ، الإنشاء المسلماتي ل R

الأستاذة : دعاس خديجة

حل التمرين 1 :

1. • العنصر المحايد للجمع هو 0 والعنصر المحايد للضرب هو 1.
• العنصر المعاكس للجمع للعدد q هو $-q$ والمعاكس للضرب لكل $q \neq 0$ هو $\frac{1}{q}$.
• كل من الاعداد $0, 1, -q, \frac{1}{q}$ تنتمي الى Q .
2. إثبات أن Q حقل :
• الانغلاق: إذا كان $a, b \in Q$ فإن $a + b \in Q$ و $ab \in Q$.
• التجميع والتبديل: عمليتا $+$ و $\times$ تجميعتان وتبادليتان على Q (لأنها مجموعة جزئية من الحقل R).
• خاصية التوزيع: $\forall a, b, c \in Q$ فإن $a(b + c) = ab + ac$.
• وجود عنصر محايد للجمع (وهو 0) وعنصر محايد للضرب (وهو 1).
• وجود معاكس للجمع لكل q ، ووجود معاكس للضرب لكل $q \neq 0$.
وبالتالي Q حقل.

حل التمرين 2 :

1. بالنسبة لـ Z فإن عمليتي الجمع والضرب تحققان التجميع والتبديل:
$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc)$$
$$a + b = b + a, \quad ab = ba$$

2. الانغلاق في Z :
$$a, b \in Z \Rightarrow a + b \in Z, \quad ab \in Z$$

3. لكن ليس لكل عدد $a \neq 0$ معاكس ضرب في Z ، فمثلاً:
$$\frac{1}{2} \notin Z \quad \text{لكن} \quad 2 \in Z$$

4. نستنتج أن Z ليست حقلاً.

حل التمرين 3:

- نعتبر $2Z = \{2k : k \in Z\}$.
1. بالنسبة للضرب: العنصر المحايد هو 1، لكنه لا ينتمي إلى $2Z$ (لأنه ليس عددا زوجيا)، إذا لا يوجد عنصر محايد للضرب في $2Z$.
لكل $2k \in 2Z$ فإن معاكسه بالنسبة للجمع هو $-2k$ ، $-2k \in 2Z$.
لكل $2k \in Z$ ، معاكسه بالنسبة للضرب هو $\frac{1}{2k}$ وهو لا ينتمي إلى $2Z$.
2. لا، $2Z$ ليس حقلاً لأنه لا يحتوي على العنصر المحايد للضرب ولا يملك كل عناصره معاكسا بالنسبة للضرب.
1. مسلمة الانسجام (التوزيع) بين الجمع والضرب متحققة لأن العمليات هي نفس عمليات Z الموروثة.

حل التمرين 4:

نعتبر $D = \left\{ \frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. لنأخذ $\frac{m_1}{2^{n_1}}, \frac{m_2}{2^{n_2}} \in D$.

بالنسبة للجمع:

$$\frac{m_1}{2^{n_1}} + \frac{m_2}{2^{n_2}} = \frac{m_1 2^{n_2} + m_2 2^{n_1}}{2^{n_1+n_2}} \in D.$$

بالنسبة للضرب:

$$\frac{m_1}{2^{n_1}} \cdot \frac{m_2}{2^{n_2}} = \frac{m_1 m_2}{2^{n_1+n_2}} \in D.$$

إذن D مغلق بالنسبة للجمع والضرب.

2. العنصر $\frac{m}{2^n}$ (مع $m \neq 0$) معاكسه بالنسبة للضرب هو: $\frac{2^n}{m}$. هذا العدد لا ينتمي إلى D إلا في حالات خاصة.

إذن لا يملك كل عنصر في D معاكساً ضربياً داخل D ، وبالتالي D ليس حقلاً.

حل التمرين 5: نعتبر $K = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. العنصر المحايد للجمع هو:

$$0 = 0 + 0\sqrt{2} \in K.$$

العنصر المحايد للضرب هو:

$$1 = 1 + 0\sqrt{2} \in K.$$

المعكوس للجمع للعنصر $a + b\sqrt{2}$ هو:

$$-(a + b\sqrt{2}) = (-a) + (-b)\sqrt{2} \in K.$$

2. نعتبر $x = a + b\sqrt{2} \in K$ حيث $x \neq 0$. معاكسه بالنسبة للضرب هو:

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}.$$

وبما أن $a, b \in \mathbb{Q}$ و $a^2 - 2b^2 \neq 0$ ، فإن:

$$\frac{a}{a^2 - 2b^2}, \frac{-b}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{Q}.$$

إذن معاكس x ينتمي إلى K .

وبما أن مسلمات التبديل، التجميع والتوزيع متحققة، نستنتج أن K حقلاً.