

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عبد الحفيظ بوالصوف - ميله



ملحقه المدرسه العليا للأساتذه - ميله

مسار أستاذ التعليم الإبتدائي

رياضيات قاعدية 1

الدرس 6 : أنشطة حسابية في R

الأستاذة : دعاس خديجة

المدرسة العليا للاساتذة - ميله
مسار أستاذ التعليم الابتدائي
رياضيات قاعدية 1
الدرس 6 : أنشطة حسابية في R

الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

تعريف

a و b عددين حقيقيين.
 $\hookrightarrow$ القول أن a أكبر من b أو يساويه معناه $a - b$ عدد موجب ونكتب : $a \leq b$ معناه $a - b \in \mathbb{R}^+$
 $\hookrightarrow$ القول أن a أصغر من b أو يساويه معناه $a - b$ عدد سالب ونكتب : $a \geq b$ معناه $a - b \in \mathbb{R}^-$

ملاحظة

- ① $a > b$ معناه $a - b \in \mathbb{R}^+$ و $a \neq b$ نقول إن a أكبر تماما من b . على محور معلمه $(O; I)$ تكون النقطة A ذات الفاصلة a على يمين النقطة B التي فاصلتها b
- ② ترتيب الأعداد تصاعديا يعني، ترتيب الأعداد من اليمين إلى اليسار ومن الأصغر إلى الأكبر.
- ③ نقول أن العددين a و b مرتبان نفس ترتيب c و d إذا كان $a - b$ و $c - d$ لهما نفس الإشارة.

تعريف

مقارنة عددين a و b معناه التصريح بصحة إحدى الحالات الثلاث الآتية: ① $a \leq b$ ② $a = b$ ③ $a \geq b$

طرائق المقارنة

❖ مقارنة عددين عشريين

لمقارنة عددين عشريين نتبع الخطوات التالية :

- ① ننظر إلى الإشارة
- ② نقارن جزئيهما الصحيحان
- ③ نقارن جزئيهما العشريان

مثال

$13 < -548$ (لأن 13 موجب و -548 عدد سالب)
 $36.911 > 54.24$ (لأن $36 > 54$)
 $54.142 > 54.15$ (لأن الجزئين العشريين 142 و 150)

❖ مقارنة عددين ناطقين بكتابة كسرية

a ، b و c أعداد موجبة تماماً.

العددين $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{c}$ لهما نفس الترتيب مع ترتيب a و b

العددين $\frac{c}{a}$ و $\frac{c}{b}$ ترتيبهما متعاكس مع ترتيب العددين a و b .

مثال

$$\frac{4}{11} < \frac{5}{11} \text{ لأن } 4 < 5 \quad \text{و} \quad \frac{11}{5} \leq \frac{11}{4} \text{ لأن } 5 \leq 4$$

❖ مقارنة باستعمال عدد ثالث

مبرهنة

من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c : إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فإن $a \leq c$

مثال

لنقارن بين $\frac{19}{16}$ و $\frac{26}{27}$ لدينا $\frac{19}{16} > 1$ و $\frac{26}{27} < 1$ ومنه $\frac{19}{16} > \frac{26}{27}$ (العدد الثالث الذي أخذناه هو 1)

❖ مقارنة بدراسة إشارة الفرق :

لمقارنة عددين a و b يكفي دراسة إشارة الفرق فإذا كان $a - b < 0$ فإن $a < b$ وإذا كان $a - b > 0$ فإن $a > b$

مثال

السؤال: قارن بين العبارتين $a = 4k + 7$ و $b = 3k + 5$ لكل $k \geq 0$.

الحل:

نحسب الفرق:

$$a - b = (4k + 7) - (3k + 5) = k + 2.$$

بما أن $k \geq 0$ ، نحصل على:

$$a - b = k + 2 \geq 2 > 0.$$

إذن: $a > b$ لكل $k \geq 0$

الترتيب والعمليات ① الترتيب والجمع

مبرهنة 1

من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c : إذا كان $a < b$ فإن $a + c < b + c$

★★★

البرهان

★★★

نبدأ من الفرضية: $a < b$ بطرح a من الطرفين نحصل على: $0 < b - a$

نضيف العدد c إلى الطرفين: $c < c + (b - a)$

لكن: $c + (b - a) = b + c - a$

بإعادة الترتيب نحصل على: $a + c < b + c$

إذن المتراجحة تبقى صحيحة بعد إضافة نفس العدد في الطرفين. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.

مثال

نعلم أن لكل $n \in \mathbb{N}$: $n - 2 < n + 5$ و $n + 1 < n + 4$

نريد المقارنة بين: $(n + 4) + (n + 5)$ و $(n + 1) + (n - 2)$

بجمع الطرفين في المتراجحتين نحصل على: $(n + 1) + (n - 2) < (n + 4) + (n + 5)$.

نرتب الطرفين نحصل على: $2n - 1 < 2n + 9$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

مبرهنة 2

من أجل كل أعداد حقيقية a ، b و c و d : إذا كان $(a < b$ و $c < d)$

فإن: $a + c < b + d$

★★★

البرهان

★★★

بما أن: $a < b$ ومنه $b - a > 0$ و $c < d$ ومنه $d - c > 0$

بجمع المتراجحتين نحصل على: $(b - a) + (d - c) > 0$ ومنه $(b + d) - (a + c) > 0$

إذن: $a + c < b + d$.

مثال

نعلم أن: $1 < 2$ و $\sqrt{2} < \sqrt{3}$
 بجمع الطرفين نحصل على: $\sqrt{2} + 1 < \sqrt{3} + 2$

2 الترتيب والضرب

مبرهنة 3

a, b, c أعداد حقيقية:
 من أجل $c > 0$ لدينا: $a \leq b$ يكافئ $ac \leq bc$
 من أجل $c < 0$ لدينا: $a \leq b$ يكافئ $ac \geq bc$

البرهان

الفرضية لدينا: $a < b$ أي: $0 < b - a$
 الحالة 1: إذا كان $c > 0$.
 نضرب الطرفين في c : $0 < c(b - a)$ ومنه $0 < cb - ca$ أي: $ca < cb$
 الحالة 2: إذا كان $c < 0$.
 من الفرضية نفسها: $0 < b - a$
 نضرب الطرفين في $c < 0$ فنحصل على: $0 > c(b - a)$ أي: $0 > cb - ca$ ومنها: $ca > cb$

مبرهنة 4

من أجل كل أعداد حقيقية a, b, c, d إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$
 فإن: $ac \leq bd$

مبرهنة 5

من أجل $a > 0$ و $b > 0$ لدينا: $a > b$ يكافئ $a^2 > b^2$
 من أجل $a < 0$ و $b < 0$ لدينا: $a < b$ يكافئ $a^2 < b^2$

البرهان

نبدأ بالتذكير $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
 الحالة الأولى: افترض $0 \leq a < b$.
 في هذه الحالة $0 < a - b$ و $a + b \geq 0$ لننظر بدقة:
 - بما أن $a \geq 0$ و $b > a$ فإن $a + b > 0$.
 إذن $a - b < 0$ و $a + b > 0$ ، ومن حاصل الضرب نحصل على: $(a - b)(a + b) < 0$
 وبما أن هذا الأخير يساوي $a^2 - b^2$ ، فإن: $a^2 < b^2$
 الحالة الثانية: افترض $a < b \leq 0$.
 - نضع $a' = -a$ و $b' = -b$ فتصبح $a' < b'$ و $0 \leq b'$.
 طبق الحالة الأولى على a' و b' نحصل $a'^2 < b'^2$ ، أي $a^2 < b^2$.
 هذا يعني $a^2 > b^2$ كما أردنا.

مثال

قارن بين العددين $a = \sqrt{\sqrt{5}-1}$ و $b = \sqrt{2}$.
لدينا $a^2 = \sqrt{5}-1$ و $b^2 = 2$.
نريد إذاً مقارنة: $\sqrt{5}-1$ و 2 .
نفرض أن $\sqrt{5}-1 < 2$ ومنه $\sqrt{5} < 3$ وبترتيب الطرفين (كلاهما موجب): $5 < 9$ وهي علاقة صحيحة.
إذن: $\sqrt{5}-1 < 2$ ومنه $a^2 < b^2$ ومنه $a < b$ (لأن كلا العددين a و b موجبان)

مبرهنة 6

a و b عددان حقيقيان موجبان
لدينا: $a \leq b$ يكافئ $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

مبرهنة 7

a و b عددان حقيقيان غير معدومين ومن نفس الإشارة
لدينا: $a \leq b$ يكافئ $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

مثال

قارن بين العددين $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
بما أن $\sqrt{2} > 0$ و $\sqrt{3} > 0$ ، ونلاحظ أن: $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.
إذن حسب مبرهنة سابقة: $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$ وعليه $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$

مبرهنة 8

a عدد حقيقي لدينا
إذا كان $0 \leq a \leq 1$ فإن $a^3 \leq a^2 \leq a$
إذا كان $a \geq 1$ فإن $a^3 \geq a^2 \geq a$

مثال

قارن بين a^2 و a^3 حيث $a = \frac{1}{2}$.
لدينا: $a = \frac{1}{2} < 1$
ومنه حسب مبرهنة سابقة $a^2 > a^3$

المجالات

تعريف

a و b عددا حقيقيان : حيث $a \leq b$.
نسمي مجالا مغلقا حداه a و b ، مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $a \leq x \leq b$ ، ونرمز إليه بالرمز $[a, b]$

التمثيل الهندسي للمجال : يمثل المجال $[a, b]$ هندسيا بالشكل الآتي حيث A و B نقطتان فاصلتهما a و b على الترتيب.



أنواع المجالات

الرمز	هو مجموعة الأعداد $x \in \mathbb{R}$	يمثل على المستقيم العددي بـ
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a, b[$	$a \leq x < b$	
$]a, b]$	$a < x \leq b$	
$]a, b[$	$a < x < b$	
$] - \infty, b]$	$x \leq b$	
$] - \infty, b[$	$x < b$	
$[a, +\infty[$	$x \geq a$	
$]a, +\infty[$	$x > a$	

- ① المجال المغلق من جهة a يشملها، والمفتوح من جهتها لا يشملها.
- ② الحدان a و b ينتميان إلى المجال $[a, b]$ ولا ينتميان إلى المجال $]a, b[$
- ③ الرمز $+\infty$ و $-\infty$ يقرآن "ناقص مالا نهاية"، زائد مالا نهاية"

عناصر المجال :

يتميز المجال $[a, b]$ بالعناصر الآتية :

$$c = \frac{a+b}{2} \text{ : مركزه، وهو العدد الحقيقي}$$

$$b-a \text{ : طوله، وهو العدد الحقيقي الموجب}$$

$$r = \frac{b-a}{2} \text{ : نصف قطره، وهو العدد الحقيقي الموجب}$$

تقاطع و اتحاد مجالين

تقاطع مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي

$$\text{إلى } I \text{ و } J \text{ ونرمز له بالرمز } I \cap J$$

إتحاد مجالين I و J هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتمي

$$\text{إلى } I \text{ أو } J \text{ ونرمز له بالرمز } I \cup J$$

مثال -- تطبيقي

نعتبر المجالين $I = [-2, 1]$ و $J = [0, 4]$

مثال على المستقيم العددي كلا من I و J

أحسب طول ومركز المجالين I و J

حدد الأعداد الحقيقية المشتركة على بين المجالين I و J

حدد الأعداد الحقيقية التي تنتمي إلى I أو J .

القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

تعريف

x عدد حقيقي ، M نقطة من مستقيم مزود بمعلم (O, I) فاصلتها x .
القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM ، ونرمز لها بالرمز " $|x|$ " ونكتب $|x| = OM$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad M \quad} \xrightarrow{\quad O \quad} \xrightarrow{\quad I \quad} \\ x \quad \quad o \quad \quad i \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad O \quad} \xrightarrow{\quad I \quad} \xrightarrow{\quad M \quad} \\ o \quad \quad i \quad \quad x \end{array} \right. \\ |x| = OM = -x \quad x \leq 0 \quad \left| \quad |x| = OM = x \quad x \geq 0 \right. \\ |x| = \begin{cases} x & x \in [0; +\infty[\\ -x & x \in]-\infty; 0] \end{cases} \quad \text{ونكتب من أجل كل عدد حقيقي } x : \end{array}$$

من التعريف نستنتج أنه :

مثال

العدد $x = \sqrt{3}$ موجب، ومنه $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$
العدد $x = 1 - \sqrt{2}$ سالب، ومنه $|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$
القيمة المطلقة للصفر هي صفر ونكتب $|0| = 0$

خواص

$$\begin{array}{l} x \text{ و } y \text{ عددين حقيقيين لدينا :} \\ |xy| = |x| \times |y| \quad (3) \quad \sqrt{x^2} = |x| \quad (2) \quad |-x| = |x| \quad (1) \\ |x+y| \leq |x| + |y| \quad (5) \quad \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{مع } y \neq 0 \quad (4) \end{array}$$

(المتباينة المثلثية)

إذا كان x و y من نفس الإشارة فإن المتباينة المثلثية تصبح مساواة

المسافة بين نقطتين

مبرهنة

إذا كان A و B نقطتين من مستقيم مزود بمعلم $(O; I)$ فاصلتهما a و b على الترتيب، فإن : $AB = |a - b| = |b - a|$

المسافة بين عددين حقيقيين

تعريف

المسافة بين عددين حقيقيين a و b هي العدد : $|a - b| = |b - a|$

الحصر

تعريف

حصر العدد الحقيقي x يعني إيجاد عددين a و b حيث : $a \preceq x \preceq b$

مثال

$\sqrt{5} \approx 2.2367$
حصر العدد الحقيقي $\sqrt{5}$ إلى الوحدة هو : $2 \prec \sqrt{5} \prec 3$
حصر العدد الحقيقي $\sqrt{5}$ إلى 10^{-2} هو : $2.23 \prec \sqrt{5} \prec 2.24$

مثال

إذا علمت أن $2 < y < 5$ و $1 < x < 2$ عين حصر لكل مما يلي $\frac{x-y}{x+y}$, $(x-3)(y+1)$, $x^2 + y^3 + xy$

مبرهنة

c عدد حقيقي، r عدد حقيقي موجب.
من أجل كل عدد حقيقي x ، معناه $|x - c| \preceq r$ معناه $x \in [c - r; c + r]$

مثال

$|x - 10| \preceq 5$ معناه $-5 \preceq x - 10 \preceq 5$ أي $5 \preceq x \preceq 15$ وعليه : $x \in [5; 15]$
 $|x - 6| \prec 3$ معناه $-3 \preceq x - 6 \preceq 3$ أي $3 \prec x \prec 9$ وعليه : $x \in]3; 9[$

نتيجة

c عدد حقيقي كفي و r عدد حقيقي موجب، من أجل كل عدد حقيقي x النصوص الآتية متكافئة:

$d(c; x) \preceq r$ (في صيغة مسافة) $x \in [c - r; c + r]$ (في صيغة مجال)
 $|x - c| \preceq r$ (في صيغة قيمة مطلقة) $c - r \preceq x \preceq c + r$ (في صيغة حصر)

مثال

القيمة المطلقة	المسافة	الحصر	المجال
$x - \frac{3}{2} \leq \frac{7}{2}$	$d\left(x; \frac{3}{2}\right) \leq \frac{7}{2}$	$-2 \leq x \leq 5$	$x \in [-2; 5]$

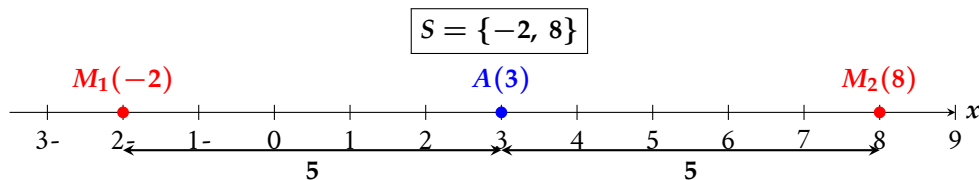
حل معادلات أو متراجحات تتضمن قيما مطلقة:

طريقة

حل معادلة أو متراجحة تتضمن قيما مطلقة، نعبر عن القيمة المطلقة بعبارات المسافة على المستقيم العددي وترجم المساويات أو المتباينات بعبارات المسافة بين نقطتين.

مثال

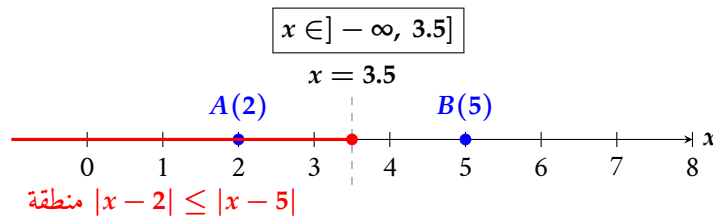
نريد حل المعادلة: $|x - 3| = 5$ في $\mathbb{R}$
 نعتبر النقطة الثابتة $A(3)$ على المستقيم العددي، و $M(x)$ نقطة متغيرة.
 $|x - 3| = 5$ معناه $AM = d(x, 3) = 5$
 أي أن النقطة M تبعد عن A مسافة 5.
 إذن لدينا نقطتان تحققان الشرط: $M_1(-2)$ و $M_2(8)$



ومنه النقطة $A(3)$ هي المركز، والنقطتان $M_1(-2)$ و $M_2(8)$ هما النقطتان اللتان تبعدان عن A بنفس المسافة 5.
 إذن تمثل المعادلة $|x - 3| = 5$ مجموع النقط M التي تبعد عن $A(3)$ مسافة 5.

مثال

نريد حل المتراجحة: $|x - 2| \leq |x - 5|$ في $\mathbb{R}$
 نعتبر النقط: $A(2)$, $B(5)$, $M(x)$
 لدينا: $|x - 2| = d(x, 2)$, $|x - 5| = d(x, 5)$ فتصبح: $AM \leq BM$ أي أن النقطة M أقرب إلى A من B
 معناه: $x \leq \frac{2+5}{2} = 3.5$



ومنه مجموعة الحل هي جميع النقط $M(x)$ الواقعة على يسار منتصف القطعة $[AB]$ أو عنده، أي النقط الأقرب إلى $A(2)$ من $B(5)$.

القوى الصحيحة :

تعريف :

ليكن a عدداً حقيقياً كفوياً، و n عدداً طبيعياً غير معدوم. نسمي القوة ذات الرتبة n للعدد الحقيقي a العدد a^n حيث:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ مرة}}$$

من أجل كل عدد حقيقي a غير معدوم وكل عدد طبيعي غير معدوم لدينا:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ومن أجل كل عدد حقيقي a لدينا:

$$a^1 = a$$

أمثلة :

$$(0.5)^{-2} = \frac{1}{0.5^2} = \frac{1}{0.25}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0.001$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$$

خصائص :

لتكن a و b عددين حقيقيين غير معدومين، و m و n عددين صحيحين نسبين. لدينا:

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

القيم المقربة

مدور عدد حقيقي :

ليكن A عدداً حقيقياً يُكتب على الشكل العشري، وليكن a رقمه العشري ذو الرتبة p . نُسَمي مدور A إلى 10^{-p} العدد العشري الحاصل عليه كما يلي:

• إذا كان $a < 5$ فإننا نأخذ العدد وأرقامه العشرية إلى الرقم العشري رتبته p ونضيف 0 في هذا الرقم.

• إذا كان $a \geq 5$ فإننا نأخذ العدد وأرقامه العشرية إلى الرقم العشري رتبته p ونضيف 1 إلى هذا الرقم.

الكتابة العلمية :

تعريف :

كتابة عدد عشري على الشكل العلمي تعني التعبير عنه على الشكل : $a \times 10^n$ (أو $a \times 10^n$ حيث a عدد عشري يحقق : $1 \leq a < 10$ و n عدد صحيح نسبي.

أمثلة :

العدد	الكتابة العلمية	إزاحة الفاصلة
128000000	$1,28 \times 10^8$	8 مراتب نحو اليسار
-0.000000075	$-7,5 \times 10^{-8}$	7 مراتب نحو اليمين

مثال آخر: الكتابة $0.000321 = 32.1 \times 10^{-5}$ هذه ليست كتابة علمية لأن $32.1 > 10$.

رتبة مقدار عدد :

تعريف :

رتبة مقدار عدد عشري A مكتوب على الشكل العلمي هي العدد $a \times 10^k$ (أو $-a \times 10^k$) حيث a هو مدور العدد A إلى الوحدة.

مبدأ أرخميدس

نص مبدأ أرخميدس :

لكل عدد حقيقي x يوجد عدد طبيعي n بحيث $n > x$ ، أي مهما كان العدد كبيراً، يوجد دائماً عدد طبيعي أكبر منه.

التفسير الهندسي لمبدأ أرخميدس :

إذا أخذنا قطعة طولها 1 ووضعنا نسخاً منها متتالية على مستقيم، فإننا بعد عدد كافٍ من المرات نتجاوز أي طول مهما كان.

مثال :

• نأخذ قطعة طولها 1 سم.

• نريد تجاوز طول 25.5 سم.

• بوضع 26 قطعة متتالية، يصبح الطول 26 سم، فنكون قد تجاوزنا الهدف.

الكثافة في R :

تعريف :

نقول أن مجموعة $A \subset R$ كثيفة في R إذا تحقق: $\forall a < b, \exists x \in A$ بحيث $a < x < b$. أي أن عناصر A تتخلل كامل الخط الحقيقي.

أمثلة: الأعداد النسبية Q كثيفة في R ، الأعداد اللانسبية كثيفة أيضاً في R ، الأعداد الصحيحة Z ليست كثيفة.

المحدودية في R

مجموعة محدودة من الأعلى :

تكون مجموعة A محدودة من الأعلى إذا وجد عدد M بحيث:

$$\forall x \in A, x \leq M.$$

مجموعة محدودة من الأسفل :

تكون A محدودة من الأسفل إذا وجد عدد m بحيث:

$$\forall x \in A, m \leq x.$$

المجموعة المحدودة

تكون المجموعة محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل معاً.

الحد العلوي (Supremum) :

العدد $s = \sup A$ هو الحد العلوي إذا:

$$\forall x \in A, x \leq s.$$

مثال :

$$\sup[0, 1[= 1.$$

الحد السفلي (Infimum) :

العدد $i = \inf A$ هو الحد السفلي إذا:

$$\forall x \in A, x \geq i.$$

مثال:

$$\inf]0, 1] = 0.$$

القيمة الحدي الكبرى (Maximum) :

إذا كان $s = \sup A$ وينتمي إلى A فإنه يسمى: $\max A$.

القيمة الحدية الصغرى (Minimum) :

إذا كان $i = \inf A$ وينتمي إلى A فإنه يسمى: $\min A$.

مثال : $A = [0, 3] \Rightarrow \max A = 3, \min A = 0$.