الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عبد الحفيظ بوالصوف ـ ميلة

ملحقة المدرسة العليا للأساتذة ـ ميلة

مسار أستاذ التعليم الإبتدائي

رياضيات قاعدية 1

الدرس 4 : أنشطة حسابية في Z

الأستاذة : **دعاس خديجة**

1) الموافقات :

تعريف

n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بتردد n يعني أن للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n. نرمز $a \equiv b \ [n]$ أو $a \equiv b \ [n]$ و نقرأ a يوافق b بتردد n.

أمثلة:

$27 \equiv 92 \ [5]$ ، $12 \equiv 34 \ [11]$ ، $24 \equiv 3 \ [7]$ ، $-20 \equiv 1 \ [7]$ ، $-59 \equiv -3 \ [8]$.

ملاحظة: من أجل كل عدد صحيح x ، $x \equiv 0 \ [1]$.

مبرهنة

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. $a \equiv b \ [n]$ تكافئ ان $a-b$ مضاعفا للعدد n.

البرهان: نفرض أن a و b لهما نفس الباقي r في القسمة الإقليدية على n .

و منه نضع $a = nq + r$ و $b = nq' + r$ حيث q و q' عددين صحيحين و $0 \leq r < n$.

و منه $a - b = nq + r - nq' - r$

$= n(q - q')$

بما أن $q - q'$ عدد صحيح فإن $a-b$ مضاعف لـ n .

عكسيا : نفرض $a-b$ مضاعف لـ n . يوجد عدد صحيح k حيث أن $a - b = kn$.

ليكن r باقي قسمة b على n .

لدينا $b = nq + r$.حيث q عدد صحيح و $0 \leq r < n$.

و منه $a = b + kn = nq + r + kn = (q + k)n + r$.

بما أن $q + k$ عدد صحيح و $0 \leq r < n$ فإن r هو باقي القسمة الإقليدية للعدد a على n .

ومنه a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n .

مثال: $27 \equiv 92 \ [5]$ ومنه $92 - 27 = 65$ اي ان 65 مضاعف ل 5

خاصية1: n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $n \geq 2$.

كل عدد صحيح a يوافق، بتردد n، باقي قسمته على n. ونكتب $a \equiv a \ [n]$

البرهان: a عدد صحيح و r باقي قسمته على n.

نعلم أن $a = nq + r$ حيث q عدد صحيح و $0 \leq r < n$. ومنه $a - r = nq$.

و بالتالي $a - r$ مضاعف لِ n.

كذلك $a - a = 0 \times n$ ومنه $a - a$ مضاعف للعدد n

ملاحظة:

نقول أن r هو الباقي إلا إذا كان $0 \leq r < n$. فمثلا $16 \equiv 6 \ [5]$ و 6 ليس باقي قسمة 16 على 5 لأن $6 \geq 5$. أما الباقي فهو 1 لأن $16 \equiv 1 \ [5]$ و $0 \leq 1 < 5$.

تمرين: من بين الموافقات الآتية أذكر الصحيحة و الخاطئة:

1) $26 \equiv 11 \ [5]$ ؛ 2) $-32 \equiv 18 \ [10]$ ؛ 3) $478 \equiv 32 \ [5]$ ؛ 4) $58 \equiv -5 \ [7]$

5) $63^2 \equiv 14 \ [5]$ ؛ 6) $144 \equiv 11 \ [19]$ ؛ 7) $131^2 \equiv 25 \ [12]$ ؛ 8) $48^3 \equiv 36 \ [7]$

طريقة:

للبرهان على أن $a \equiv b \ [n]$ يمكن البرهان على أن $a-b$ مضاعف لِ n أو البرهان على أن لِ a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n .

الحل:

1) $15=11-26$ و $15=3\times5$. إذن $26\equiv11\ 5$ صحيحة.

2) $-50=-18-32$ و $-50=-5\times10$. إذن $-32\equiv18\ 10$ صحيحة.

3) $446=478-32$ و $446=89\times5+1$. إذن $478\equiv32\ 5$ خاطئة نكتب $478\not\equiv32\ 5$.

4) $63=58+5$ و $63=9\times7$. إذن $58\equiv-5\ 7$ صحيحة.

5) $63^2=3969$. باقي قسمة 63^2 على 5 هو إذن 4 وبما أن باقي قسمة العدد 14 على 5 هو كذلك 4 فإن $63^2\equiv14\ 5$ صحيحة.

6) $144=19\times7+11$ و بما أن العدد 144 يوافق بتردد 19 باقي قسمته على 19 نستنتج أن $144\equiv11\ 19$ صحيحة.

7) $131^2=1430\times12+1$ و $25=2\times12+1$ تحصلنا على نفس الباقي في القسمة على 12 إذن $131^2\equiv25\ 12$ صحيحة.

8) $48^3=15799\times7+6$ و $36=5\times7+1$ لم نحصل على نفس الباقي في القسمة على 7 إذن $48^3\equiv36\ 7$ خاطئة. و نكتب $48^3\not\equiv36\ 7$.

تمرين

عين بواقي قسمة العدد 3^n على 7 من اجل $n:0.1.2.3.4.5.6.7.8$ ماذا تستنتج

تمرين

برر صحة العبارات التالية :

أ. $45\equiv3[7]$. ب. $152\equiv2[3]$.

جـ. $29\equiv-1[6]$. د. $137\equiv-3[5]$.

و. $-13\equiv2[5]$. هـ. $-17\equiv-7[10]$

تمرين

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

في كل حالة من الحالات التالية ، عين قيم العدد n التي تحقق الموافقة المقترحة .

أ. $46\equiv0[n]$ ؛

ب. $10\equiv1[n]$ ؛

جـ. $27\equiv5[n]$.

خواص:

a ، b ، c و d أعداد صحيحة n عدد طبيعي غير معدوم

1. $a\equiv a\ n$
2. اذا كان $a\equiv b\ n$ فان $b\equiv a\ n$.
3. اذا كان $a\equiv b\ n$ و $b\equiv c\ n$ فان $a\equiv c\ n$.
4. اذا كان $a\equiv b\ n$ و $c\equiv d\ n$ فان $a+c\equiv b+d\ n$
5. اذا كان $a\equiv b\ n$ و $c\equiv d\ n$ فان $ac\equiv bd\ n$
6. p عدد طبيعي غير معدوم اذا كان $a\equiv b\ n$ فان

الخاصية1:

n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $n\geq2$.

كل عدد صحيح a يوافق، بتردد n ، باقي قسمته على n. ونكتب $a\equiv a\ n$

البرهان:

a عدد صحيح و r باقي قسمته على n.

نعلم أن $a=nq+r$ حيث q عدد صحيح و $0\leq r<n$. ومنه $a-r=nq$.

و بالتالي $a-r$ مضاعف لِ n.

كذلك $a-a=0\times n$ ومنه $a-a$ مضاعف للعدد

الخاصية2:

a ، b عددان صحيحان n عدد طبيعي غير معدوم

اذا كان $a\equiv b\ n$ فان $b\equiv a\ n$

البرهان:

اذا كان ل a و b نفس الباقي في القسمة الاقليدية على n فان للعدد b و a نفس الباقي في القسمة الاقليدية على n.

الخاصية3 (خاصية التعدي) :

البرهان: a ، b و c أعداد صحيحة حيث ($a\equiv b\ n$ و $b\equiv c\ n$).

($a\equiv b\ n$ و $b\equiv c\ n$) يعني ($a-b=kn$ و $b-c=k'n$)(k و k' عددان صحيحان)

و منه و بالجمع نحصل على $a-c=\ k+k'\ n$. بما أن $k+k'$ عدد صحيح فإن $a\equiv c\ n$.

الخاصية4 (خاصية التلاؤم مع الجمع):

البرهان: a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث ($a\equiv b\ n$ و $c\equiv d\ n$).

($a\equiv b\ n$ و $c\equiv d\ n$) يعني ($a-b=kn$ و $c-d=k'n$)(k و k' عددان صحيحان)

ومنه و بالجمع نحصل على $a+c\ -(b+d)=\ k+k'\ n$. بما أن $k+k'$ عدد صحيح فإن $a+c\equiv b+d\ n$.

الخاصية5 (خاصية التلاؤم مع الضرب) :

البرهان: a ، b ، c و d أعداد صحيحة حيث أن($a\equiv b\ n$ و $c\equiv d\ n$).

($a\equiv b\ n$ و $c\equiv d\ n$) يعني ($a-b=kn$ و $c-d=k'n$)(k و k' عددان صحيحان)

لدينا $ac-bd=ac-ad+ad-bd=a(c-d)+d(a-b)$

$=ak'n+dkn=\ ak'+dk\ \ n$

بما أن $ak'+dk$ عدد صحيح فإن $ac\equiv bd\ n$.

تمرين1: عين باقي قسمة -5817 على 251.

طريقة: لإيجاد باقي قسمة عدد صحيح سالب a على عدد طبيعي غير معدوم n نبحث عن b باقي قسمة $-a$

على n ثم نضرب الطرفين في -1 ثم نضيف الترديد إلى $-b$.

الحل:

بقسمة العدد 5817 على 251 نحصل على $5817\equiv 44\ 251$.

نضرب الطرفين في -1 نحصل على $-5817\equiv -44\ 251$ (الخاصية 7).

نعلم أن $251\equiv 0\ 251$ ومنه $0\equiv 251\ 251$ (الخاصية 3).

($-5817\equiv -44\ 251$ و $0\equiv 251\ 251$) إذن من الخاصية 5 نحصل على

$-5817\equiv 207\ 251$.

إذن باقي قسمة -5817 على 251 هو 207 لأن $0\leq 207<251$.

2) معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين :

ـ مبرهنة بيزو .

مبرهنة: يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث :

$$au+bv=1$$

ـ مبرهنة غوص .

مبرهنة: a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أوليا مع b ، فإن a يقسم c .

البرهان: ليكن a و b عددين صحيحين غير معدومين أوليين فيما بينهما . إذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v حيث : $au+bv=1$.

ليكن c عددا صحيحا غير معدوم حيث a يقسم الجداء bc.

نضرب طرفي المساواة $au+bv=1$ في c ، نحصل على $cau+cbv=c$.

من المعطيات a يقسم الجداء bc و منه a يقسم الجداء bcv و بما أن a يقسم الجداء acu فإن a يقسم $acu+bcv$ أي a يقسم c .

تمرين :

2) تأكد أن الثنائية $(4;2)$ حل للمعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $9x-16y=4$.

3) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $9x-16y=4$.

الحل:

1) $9x-16y=0$ و منه $9x=16y$.

16 يقسم $16y$ و بالتالي 16 يقسم $9x$ بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم x

نضع $x=16k$ حيث k عدد صحيح .

بالتعويض في المساواة $9x=16y$ نحصل على $9(16k)=16y$ و منه $y=9k$

الحلول هي الثنائيات من الشكل $(16k;9k)$ حيث k عدد صحيح .

مارك غوص (1777 – 1855)

2) $9\times4-16\times2=36-32=4$ و منه $(4;2)$ حل للمعادلة $9x-16y=4$.

3) بطرح 4 من طرفي المعادلة $9x-16y=4$ نحصل على $9x-16y-4=0$.

و نعلم أن $9\times4-16\times2=4$ إذن $9x-16y-(9\times4-16\times2)=0$. و منه $9(x-4)=16(y-2)$.

16 يقسم $16(y-2)$ و بالتالي 16 يقسم $9(x-4)$ بما أن 16 أولي مع 9 فإن 16 يقسم $x-4$

نضع $x-4=16k$ حيث k عدد صحيح أي $x=16k+4$

بالتعويض في المساواة $9(x-4)=16(y-2)$ نحصل على $9(16k)=16(y-2)$ ومنه $y=9k+2$.

الحلول هي الثنائيات من الشكل $(16k+4;9k+2)$ حيث k عدد صحيح .

3) التـشفيــر:

تعريف : التشفير عملية تحويل رسالة مفهومة إلى رسالة غير مفهومة باستعمال قاعدة ومفتاح.

1) تمثيل الحروف بالاعداد $A = 0,\ B = 1,\ \ldots,\ Z = 25$.

2) قاعدة التشفير $y \equiv a\,x + b \pmod{26}$ حيث x رقم الحرف الأصلي، y رقم الحرف المشفّر، وa, b هما المفتاحان.

مثال: نختار $a = 5,\ b = 8$. نريد تشفير الكلمة MATH. حيث نعتبر الترقيم $A = 0, B = 1, \ldots, Z = 25$.

خطوة 1 — تحويل الحروف إلى أعداد:

الحرف	A	$\ldots$	Z
الرمز	0	$\ldots$	25

نستخرج الأعداد للحروف المطلوبة: $H \mapsto 7$. $M \mapsto 12, \quad A \mapsto 0, \quad T \mapsto 19,$

خطوة 2 — تطبيق صيغة التشفير:

الحرف	x	$5x + 8$	$y \equiv (5x + 8) \bmod 26$
M	12	68	16
A	0	8	8
T	19	103	25
H	7	43	17

خطوة 3 — تحويل الأعداد الناتجة إلى حروف:

$$\begin{aligned} y = 16 &\mapsto Q \\ y = 8 &\mapsto I \\ y = 25 &\mapsto Z \\ y = 17 &\mapsto R \end{aligned}$$

نتيجة التشفير : MATH $\longrightarrow$ QIZR.