الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عبد الحفيظ بوالصوف - ميلة

ملحقة المدرسة العليا للأساتذة - ميلة

مسار أستاذ التعليم الإبتدائي

رياضيات قاعدية 1

الدرس 3 : أنشطة حسابية في N

الأستاذة : **دعاس خديجة**

المدرسة العليا للأساتذة - ميلة
مسار أستاذ التعليم الإبتدائي
رياضيات قاعدية 1
الدرس 3 : انشطة حسابية في N

أوجد قواسم كلا من : 1، 2، 9، 16. ومن منها يقبل قاسمين فقط وماذا يسمى هذا النوع من الأعداد ، اعط تعريف بسيط له.

1) . إختبار أولية عدد :

تعريف: نسمّي عددا أوليا كلّ عدد طبيعي يقبل، بالضبط، قاسمين مختلفين هما: 1 والعدد نفسه.

أمثلة: من أجل $n=12$. قواسم العدد 12 هي 1؛ 2؛ 3؛ 4؛ 6؛ 12: العدد 12 يقبل، على الأقل، قاسما يختلف عن 1 وعن 12. فهو ليس أوليا.

من أجل $n=37$. قواسم 37 هما 1 و 37 فقط. فالعدد 37 أولي.

العدد 1 ليس أوليا، لأنّه يقبل قاسما واحدا فقط والعدد 0 ليس أوليا، لأنّه يقبل عددا غير منته من القواسم.

الأعداد الأولية الأصغر من 100 هي:

2؛ 3؛ 5؛ 7؛ 11؛ 13؛ 17؛ 19؛ 23؛ 29؛ 31؛ 37؛ 41؛ 43؛ 47؛ 53؛ 59؛ 61؛ 67؛ 71؛ 73؛ 79؛ 83؛ 89؛ 97.

تطبيق

هل العدد 197 أوليّ ؟

2) تحليل عدد طبيعي الى جداء عوامل اولية :

نشاط: أكتب الأعداد التالية على شكل جداء عوامل أولية 12، 15، 20.

تعريف: تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية هو كتابته على شكل جداء أعداد أولية.

لتحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية يمكن أن نتبع مايلي:

نقسم العدد على أصغر عدد أوليّ يكون قاسما له.

نقسم حاصل القسمة على أصغر عدد أوليّ يكون قاسما له.

نكرّر عمليات القسمة هذه حتى نصل إلى حاصل قسمة يساوي 1.

تطبيق: حل الأعداد التالية إلى جداء عوامل أولية 30، 45، 245، 100، 157.

3). القاسم المشترك الاكبر :

نشاط:

1. بإستعمال خوارزمية إقليدس أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 2268 و 12936.
2. حلل العددين السابقين إلى جداء عوامل أولية.
3. أحسب جداء العوامل الأولية المِشتركة مأخوذة مرة واحدة وبأصغر أس، ماذا يمثل الناتج بالنسبة للعددين

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين يمكن أن نتبع مايلي

1. نقوم بتحليل العددين إلى جداء عوامل أولية.
2. نحسب جداء العوامل الأولية المِشتركة مأخوذة مرة واحدة وبأصغر أس .

ترميز: نرمز للقاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين بـ: $PGCD$.

4). العددان الأوليان فيما بينهما :

إذا كان القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين هو 1 فالعددان أوليان فيما بينهما.

مثال: أوجد $PGCD(360;49)$ وماذا تستنتج؟.

5). المضاعف المشترك الاصغر :

لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر الغير معدوم لعددين طبيعيين يمكن أن نتبع مايلي:

1. نقوم بتحليل العددين إلى جداء عوامل أولية.
2. نحسب جداء العوامل الأولية المِشتركة و الغير مشتركة مأخوذة مرة واحدة و بأكبر أس.

ترميز: نرمز للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين بـ: $PPCM$.

(Ppcm := Plus petite commun multiple)

مثال: اوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 256 و 94 .

خاصية a و b عددان طبيعيان غير معدومين . d قاسم مشترك للعددين a و b. نضع $a=da'$ و $b=db'$
يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا و فقط إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما .

6). القسمة الاقليدية :

مبرهنة: a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم . توجد ثنائية وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة حيث $a=bq+r$ و $0\leq r<b$.

خاصية a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم.
إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n، a يقسم $mb+nc$

تمرين : ليكن n عددا صحيحا.
يكن العددان الصحيحان $a=5n-2$ و $b=2n+3$.
أثبت أن كل قاسما مشتركا للعددين a و b يقسم العدد 19.

.

7). أنظمة العد :

تعريف

مبرهنة

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل $a=qx^n+r_{n-1}x^{n-1}+r_{n-2}x^{n-2}+.....+r_2x^2+r_1x+r_0$ حيث $0<q<x$ و $0\le r_\alpha<x$ مع $\alpha\in\{0;1;2;.....;n-1\}$

البرهان: a عدد طبيعي أكبر من أو يساوي العدد الطبيعي x غير المعدوم و الأكبر تماما من 1 .

ليكن r_0 باقي قسمة a على x . لدينا $a=c_0x+r_0$ حيث c_0 عدد صحيح و $0\le r_0<x$.

* إذا كان $c_0<x$ المبرهنة محققة.

إذا كان $c_0\ge x$ توجد ثنائية وحيدة $c_1;r_1$ من الأعداد الطبيعية حيث $c_0=c_1x+r_1$ مع $0\le r_1<x$ و $0<c_1<c_0$.

* إذا كان $c_1<x$ لدينا $a=c_1x^2+r_1x+r_0$ المبرهنة محققة.

إذا كان $c_1\ge x$ توجد ثنائية وحيدة $c_2;r_2$ من الأعداد الطبيعية حيث $c_1=c_2x+r_2$ مع $0\le r_2<x$ و $0<c_2<c_1$.

* نواصل حتى يصبح حاصل القسمة q على x أصغر تماما من x .

نحصل تباعا على ما يلي :

1 ... $a=c_0x+r_0$ مع $0\le r_0<x$ و $0<c_0<a$.

2 ... $c_0=c_1x+r_1$ مع $0\le r_1<x$ و $0<c_1<c_0$.

3 ... $c_1=c_2x+r_2$ مع $0\le r_2<x$ و $0<c_2<c_1$.

....

$n-1$ ... $c_{n-3}=c_{n-2}x+r_{n-2}$ مع $0\le r_{n-2}<x$ و $0<c_{n-2}<c_{n-3}$.

n ... $c_{n-2}=c_{n-1}x+r_{n-1}$ مع $0\le r_{n-1}<x$ و $0<c_{n-1}<c_{n-2}$.

نضرب المساواة 1 ، 2 ، 3 ،، $n-1$ ، n في 1 ، x ، x^2 ، ... ، x^{n-2} ، x^{n-1} على الترتيب و بجمع

النتائج المحصل عليها طرف بطرف نحصل على :

$a=qx^n+r_{n-1}x^{n-1}+r_{n-2}x^{n-2}+.....+r_2x^2+r_1x+r_0$ (مع وضع $c_{n-1}=q$) و منه المبرهنة محققة.

مثال 1:

العدد 1954 المكتوب في النظام العشري يمكن أن يكتب : $954=1.10^3+9.10^2+5.10^1+4$

$1954=4+5.10^1+9.10^2+1.10^3$ و عليه : $x=10$.

مثال 2 :

اكتب العدد 47 في نظام التعداد الذي أساسه 2:

الحل : $47=23\times2+1$ $\quad 23=11\times2+1$ $\quad 11=5\times2+1$ $\quad 5=2\times2+1$

$2=1\times2+0$ $\quad 1=0\times2+1$ و منه العدد 47 يكتب في النظام الثنائي هكذا $\overline{101111}^{2}$

و يقرأ واحد صفر واحد .

مثال3:

اكتب العدد 2007 في نظام التعداد الذي أساسه 8

الحل: $2007=250\times8+7$ $\quad 250=31\times8+2$ $\quad 31=3\times8+7$ $\quad 3=0\times8+3$

و عليه العدد 2007 يكتب في النظام الذي أساسه 8

على الشكل : $\overline{3727}^{8}$

تمرين 1: a عدد طبيعي يكتب $\overline{365}$ في النظام ذي الأساس 7 . أكتب a في النظام العشري .

الحل: $a=3\times7^2+6\times7+5=194$ و منه a يكتب 194 في النظام العشري .

تمرين 2: a عدد طبيعي يكتب 2517 في النظام العشري . أكتب a في النظام ذي الأساس 8.

الحل:

$2517=314\times8+5$ $\quad 314=39\times8+2$ $\quad 39=4\times8+7$ $\quad 4=8\times0+4$

ومنه $2517=4\times8^3+7\times8^2+2\times8+5$

و منه a يكتب $\overline{4725}$ في النظام ذي الأساس 8 .

التعداد ذو الأساس x

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. يعتمد التعداد ذو الأساس x على الاصطلاحين التاليين :

1) إذا كان $x>a$ (a عدد طبيعي) a يمثل برمز وحيد يسمى رقما.

2) إذا كان $x\geq a$ (a عدد طبيعي) من المبرهنة a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x :

$a=qx^n+r_{n-1}x^{n-1}+r_{n-2}x^{n-2}+.....+r_2x^2+r_1x+r_0$ حيث

$0<q<x$ و $0\leq r_\alpha<x$ مع $\alpha\in\{0;1;2;.....;n-1\}$

يمثل العدد a كما يلي $a=\overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}...r_1\,r_0}$.

الكتابة $a=\overline{q\,r_{n-1}\,r_{n-2}...r_1\,r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x .إذا كان

$x=10$ ، نكتب : $a=q\,r_{n-1}\,r_{n-2}...r_1\,r_0$

قاعدة

تمرين 3: a عدد طبيعي يكتب 643 في النظام ذي الأساس 8.

1) أكتب a في النظام ذي الأساس 2 بطريقتين.

- بالمرور عبر النظام العشري .
- مباشرة .

2) أكتب a في النظام ذي الأساس 4 مباشرة .

الحل:

1) • $a=6\times8^2+4\times8+3=419$ و منه a يكتب 419 في النظام العشري .

$419=209\times2+1$ $\quad 209=104\times2+1$ $\quad 104=52\times2+0$ $\quad 52=26\times2+0$

$26=13\times2+0$ $\quad 13=6\times2+1$ $\quad 6=3\times2+0$ $\quad 3=1\times2+1$ $\quad 1=0\times2+1$

$419=1\times2^8+1\times2^7+0\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$.

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2.

- $a=6\times8^2+4\times8+3$

$a=3\times2\times8^2+2^2\times8+3$.

$a=3\times2^7+2^5+2+1$.

$a=(2+1)\times2^7+2^5+2+1$

$a=2^8+2^7+2^5+2+1$

و منه

$a=1\times2^8+1\times2^7+0\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$.

إذن a يكتب $\overline{110100011}$ في النظام ذي الأساس 2 .

2) $a=6\times8^2+4\times8+3$

$a=6\times2^2\times4^2+4\times2\times4+3$

$a=6\times4^3+2\times4^2+3$

$a=\ 2+4\ \ 4^3+2\times4^2+3$

$a=4^4+2\times4^3+2\times4^2+3$

$a=1\times4^4+2\times4^3+2\times4^2+0\times4+3$.

إذن a يكتب $\overline{12204}$ في النظام ذي الأساس 4 .

ملاحظة :

إذا كان N مكتوب في النظام الذي أساسه 10 على الشكل :

$N=a_0+a_1+10+a_2.10^2+...+a_n10^n$

فإن N يكتب على الشكل : $N=a_na_{n-1}...a_1a_0$

الانتقال من النظام الذي أساسه x إلى النظام العشري

مثال :

نعتبر العدد N المكتوب في النظام الذي أساسه 3

كما يلي : $N=\overline{2002012}^3$. اكتب N في النظام العشري .

الحل :

$N=2.3^0+1.3^1+0.3^2+2.3^3+0.3^4+0.3^5+2.3^6$

$N=2+3+0+45+0+0+1458$

$N=1517$

الانتقال من النظام الذي أساسه α إلى النظام أساسه β

نعلم أن نظام التعداد الذي أساسه **10** سهل الاستعمال و العمليات الحسابية فيه سهلة و لهذا :
إذا كان N عدد طبيعي مكتوب في نظام تعداد ذو الأساس α و نريد أن نكتب N في نظام تعداد أساسه β فنقوم بما يلي :

- نكتب N في نظام التعداد ذو الأساس **10** (كما سبق)
- نكتب N في نظام التعداد ذو الأساس β

قاعدة

مثال :

عدد N مكتوب في نظام التعداد ذو الأساس **2**

كما يلي : $\overline{11101101}^2$. اكتب N في نظام التعداد ذو الأساس **5**.

الحل :

- نكتب N في نظام التعداد ذو الأساس **10** :

$N=1.2^0+0.2^1+1.2^2+1.2^3+0.2^4+1.2^5+1.2^6+1.2^7$

$N=1+4+8+32+64+128$

$N=237$

- نكتب N في نظام التعداد ذو الأساس **5** :

$237=47\times5+2 \quad 47=9\times5+2 \quad 9=1\times5+4 \quad 1=0\times5+1$

و منه N يكتب : $\overline{1422}^5$

ملاحظات :

- النظام العشري هو النظام المستعمل لدى البشر و أساسه عشرة ،
أما أرقامه فهي : 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 .
- النظام الثنائي هو النظام المستعمل لدى الآلات و أرقامه هي 0، 1 .
- النظام ذو الأساس **8** ، أرقامه : 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7
- النظام ذو الأساس 11 ، أرقامه :
9، 8، 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 ، α (حيث : $\alpha = 10$).
- النظام ذو الأساس 12 ، أرقامه :
9، 8، 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، α ، β حيث : $\alpha = 10$ و $\beta = 11$.

مثال :

اكتب العدد 1954 في نظام التعداد ذو الأساس 12 .

الحل :

$$1954 = 162 \times 12 + 10 \quad 162 = 13 \times 12 + 6 \quad 13 = 1 \times 12 + 1 \quad 1 = 0 \times 12 + 1$$

و عليه العدد 1954 يكتب في نظام التعداد الذي أساسه **12** هكذا :

$\overline{116\alpha}^{12}$ حيث : $\alpha = 10$