

Courbes elliptiques TD 01

Exercice 1. Trouvez tous les points à l'infini des courbes suivantes

① $C_1 : y - x^2 = 0.$

② $C_2 : x^2 - y = 1.$

Exercice 2. Supposons le polynôme homogène de degré 3

$$F(x, y, z) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{3-i} a_{ij} x^{3-i-j} y^i z^j,$$

et soit C la courbe définie par $F = 0$.

Pour $P = [1 : 0 : 0] \in \mathbb{P}^2$, montrer que les assertions suivantes sont vrais.

① $P \in C$ ssi $a_{00} = 0$.

② P est un point singulier de C ssi $a_{00} = a_{10} = a_{01} = 0$.

③ P est un point triple de C ssi

$$a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{11} = a_{20} = a_{02} = 0.$$

Exercice 3. Trouver tous les valeurs de $a \in \mathbb{C}$ de sorte que les lignes suivantes

$$ay - z + 3ix = 0, \quad -iax + y - iz = 0, \quad 3iz + 5x + y = 0$$

sont coïncident dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Exercice 4. Montrer que les points

$$[1, 2, 2], \quad [3, 1, 4], \quad [2, -1, 2]$$

de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sont colinéaires, et trouver l'équation du tangente qui passe par ces points.