Série N=03 : Méthodes du Simplexe (tableaux & matricielle)

Exercice 01 :

On considère le programme linéaire ci-dessous écrit sous sa forme canonique :

$$Max\ Z = 100x_1 + 200x_2 + 300x_3$$
$$S.C \begin{cases} 3x_1 + 3.2x_2 + 3.5x_3 \leqslant 200 \\ 500x_1 + 1000x_2 + 2500x_3 \leqslant 120000 \\ x_1 + 1.5x_2 + 4x_3 \leqslant 210 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Lesquelles des solutions suivantes du programme PL sont réalisables ?
   (i) $x_1 = 40; x_2 = 10; x_3 = 10$
   (ii) $x_1 = 50; x_2 = -20; x_3 = 20$
   (iii) $x_1 = 40; x_2 = 20; x_3 = 10$
2) La solution $(x_1 = 20; x_2 = 20; x_3 = 20)$ est-elle optimale ?

Exercice 02 :

On considère le programme linéaire ci-dessous écrit sous sa forme canonique :

$$Max\ Z = 35x_1 + 45x_2 + 42x_3$$
$$(P) \quad S.C \begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leqslant 120 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_3 \leqslant 120 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 120 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Résoudre (P) par la méthode du simplexe (la méthode des tableaux).
2) Résoudre (P) par la méthode du simplexe sous forme matricielle.

Exercice 03 :

Soit le problème d'optimisation suivant :

$$Max\ Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leqslant 14 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Construire une solution initiale admissible
2) Trouver la solution optimale par la méthode du simplexe

Exercice 04 :

On considère le programme linéaire (P) suivant :

$$Max\ Z = 3x_1 + 4x_2 + 10x_3$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 2x_3 \leqslant 6 \\ x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Montrer que le point $A = (0, 0, 3)$ est un sommet de la région réalisable.
2) Résoudre (P) par la méthode du simplexe en partant du sommet A.

3) Ayant ainsi trouvé un sommet optimal B, montrer qu'il existe un autre sommet optimal C et le déterminer.

Exercice 05 :

Résoudre le programme suivant en utilisant la méthode du simplexe

$$Max\ Z = 10x_1 + 14x_2$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 12 \\ x_1 \geqslant 8 \\ x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Montrer que $\bar{x} = (12, 0)$ est un sommet de la région réalisable. Mettre le programme sous forme standard, puis donner la solution de base réalisable $\bar{y}$ associée à $\bar{x}$.
2) Résoudre ce programme par la méthode du simplexe en prenant comme point de départ $\bar{y}$.

Exercice 06 : (avec solution optimale multiple)

Une ébénisterie produit des bureaux, des tables et des chaises. Chaque type de produit réclame du bois et deux types de travaux : mise en forme et finition, suivant le tableau :

Ressource	Bureau	Table	Chaise
Planche	8m	6m	1m
Mise en forme	4h	2h	3/2h
finition	2h	3/2h	1/2h

On dispose de 48m de planches, 20 h de mise en forme et 8 h de finition.

On vend un bureau pour 60 €, une table pour 35 € et une chaise pour 20 €. La demande pour les chaises et les bureaux est illimitée, mais on ne pense vendre que 5 tables au plus. On veut maximiser le profit.

1) Formalisons le problème : soient x_1, x_2 et x_3 les variables décrivant respectivement les nombres de bureaux, de tables et de chaises.
2) Résoudre (P) par la méthode du simplexe sous forme matricielle.

Série N=04 : La Méthode du Simplexe (la méthode des variables artificielles)

Exercice 01 :

Résoudre le problème de programmation linéaire suivant par l'algorithme du simplexe :

$$Max\ Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leqslant 8/3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant 7/3 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 02 :

Essayer de résoudre ce programme par la méthode de simplexe (choisir en cas de deux quotients égaux, celui qui se trouve dans la ligne supérieure).

$$Max\ Z = 10x_1 + 9x_2$$
$$S.C \begin{cases} 7/10x_1 + x_2 \leqslant 630 \\ 1/2x_1 + 5/6x_2 \leqslant 480 \\ x_1 + 2/3x_2 \leqslant 708 \\ 1/10x_1 + 1/4x_2 \leqslant 135 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 03 :

Résoudre le problème de programmation linéaire suivant par l'algorithme du simplexe et montre que l'algorithme peut passer par un cycle. On choisit comme base initiale (x_5, x_6).

$$Max\ Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 12x_4$$
$$S.C \begin{cases} -2x_1 - 9x_2 + x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 2x_4 + x_6 = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 04 :

La solution de l'exercice N=05 (Problème de découpe) (Série N°01) donné le programme linéaire suivant est

$$Min\ Z = 5x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 50x_5$$
$$S.C \begin{cases} x_2 + x_3 \geqslant 30 \\ x_1 + x_2 + x_5 \geqslant 40 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 \geqslant 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

Résoudre (P) par deux méthodes différentes.

Exercice 05 :

Résoudre les problèmes linéaires suivants par la méthode des variables artificielles

$$Max\ Z = -2x_1 + 3x_2 \quad S.C \begin{cases} x_1 \leqslant 5 \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2 \quad S.C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 2 \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 8 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$Max\ Z = x_1 + 3x_2 \quad S.C \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leqslant 30 \\ x_1 \geqslant 10 \\ x_2 \geqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$Max\ Z = 2x_1 + 6x_2 \quad S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ x_2 - 4x_2 \geqslant -16 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$Min\ Z = 2x_1 + 3x_2 \quad S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geqslant 12 \\ 5x_1 + x_2 \geqslant 12 \\ 3x_2 + 4x_2 \geqslant 31 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (5)$$

Exercice 06 :

Résoudre par deux méthodes du simplexe (la méthode des tableaux & sous forme matricielle) les problèmes suivants :

$$Max\ Z = -2x_1 + 3x_2 \quad S.C \begin{cases} x_1 \leqslant 5 \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2 \quad S.C \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 2 \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 8 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$Max\ Z = x_1 + 3x_2 \quad S.C \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leqslant 30 \\ x_1 \geqslant 10 \\ x_2 \geqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$Max\ Z = x_1 + x_2 \quad S.C \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 40 \\ x_1 \geqslant 10 \\ x_2 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$Max\ Z = 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \quad S.C \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 4 \\ 2x_1 + 3x_3 \leqslant 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 7 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 \quad S.C \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leqslant 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$Max\ Z = 2x_1 + x_2 \quad S.C \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 3 \\ x_1 + 5x_2 \geqslant 1 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 4 \\ 4x_1 + x_2 \geqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$Max\ Z = x_1 + 3x_2 - x_3 \quad S.C \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 10 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \leqslant 10 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{cases} \quad (8)$$