III-3. Spectre d'un opérateur compact :

Donnons d'abord quelques définitions fondamentales.

Soit $A \in \mathcal{L}(X)$; où X est un espace de Banach réel.

Définition III-3 :

On appelle ensemble résolvant de A l'ensemble noté $\rho(A)$ donné par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} ; (A - \lambda I) \text{ est bijectif de } X \text{ sur } X\}$$

Définition III-4 :

On appelle spectre de A, noté $\sigma(A)$, le complémentaire de l'ensemble résolvant. $\sigma(A) = \complement_{\mathbb{R}} \rho(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A)$

Définition III-5 :

On dit que λ est valeur propre de A, et on note $\lambda \in VP(A)$ si

$$\ker(A-\lambda I) \neq \{0\} ;$$

$\ker(A-\lambda I)$ est l'espace propre associé à λ

Remarque III-6 :

a) Il est important de retenir que si $\lambda \in \rho(A)$ alors $(A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

b) Il est clair que $VP(A) \subset \sigma(A)$. En général l'inclusion est stricte : il peut exister λ tel que

$$\ker(A-\lambda I) = \{0\} \text{ et } \operatorname{Im}(A-\lambda I) \neq X$$

un tel λ appartient au spectre mais n'est pas valeur propre.

Proposition III-2 :

Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble compact

et $$\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|].$$

Démonstration :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| > \|A\|$; montrons que $A - \lambda I$ est bijectif, ce qui prouvera que $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$. Étant donné $f \in X$ l'équation $Au - \lambda u = f$ admet une solution unique car elle s'écrit $u = \frac{1}{\lambda}(Au - f)$ et on peut lui appliquer le théorème du point fixe de Banach.

Montrons maintenant que $\rho(A)$ est ouvert. Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$. Étant donnés $\lambda \in \mathbb{R}$ (très près de λ_0) et $f \in X$ on cherche à résoudre

$$(*) \qquad Au - \lambda u = f$$

Or $(*)$ s'écrit $Au - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0) u$

i.e $\quad u = (A - \lambda_0 I)^{-1}[f + (\lambda - \lambda_0) u] \qquad (**)$

En appliquant à nouveau le théorème de point fixe on voit que $(**)$ possède une solution unique si

$$|\lambda - \lambda_0| \, \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1.$$

__Théorème III_6__ : soit $A \in \mathcal{K}(X)$ avec $\dim X = +\infty$

Alors on a

a) $0 \in \sigma(A)$

b) $\sigma(A) \setminus \{0\} = VP(A) \setminus \{0\}$

c) l'une des situations suivantes

- ou bien $\sigma(A) = \{0\}$
- ou bien $\sigma(A) \setminus \{0\}$ est fini
- ou bien $\sigma(A) - \{0\}$ est une suite qui tend vers 0

Démonstration :

a) Supposons que $0 \notin \sigma(A)$. Alors A est bijectif et $I = A \circ A^{-1}$ est compact. Donc B_X est compact et alors $\dim X$ est finie.

b) Soit $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$. Montrons que $\lambda \in VP(A)$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$. Alors d'après le théorème III-5 (c) on sait que $\mathrm{Im}(A - \lambda I) = X$ et donc

$\lambda \in \rho(A)$ - ce qui est absurde.

Pour la suite de la démonstration on aura besoin du lemme suivant.

Lemme III-2 :

Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels tous distincts telle que

$\lambda_n \to \lambda$ et $\lambda_n \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ $\forall n$.

Alors $\lambda = 0$

Démonstration:

On sait que $\lambda_n \in VP(A)$; soit $e_n \neq 0$ tel que

$(A-\lambda_n I)e_n = 0$. Soit X_n l'espace vectoriel

engendré par $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Montrons que

$X_n \subsetneq X_{n+1}$ pour tout n.

Il suffit de vérifier que, pour tout n, les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ sont linéairement indépendants. Raisonnons par récurrence sur n. Admettons le résultat à l'ordre n et supposons que $e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

Alors

$$Ae_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_{n+1} e_i$$

Par suite $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$

et donc $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$

ce qui est absurde. Donc $X_n \not\subset X_{n+1}$ pour tout n.

D'autre part, il est clair que $(A-\lambda_n)X_n \subset X_{n-1}$.

En appliquant le lemme de Riesz on construit une suite $\{u_n\}_{n\geq 1}$ telle que $u_n \in X_n$, $\|u_n\|=1$.

et $\text{dist}(u_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ pour $n \geq 2$.

Soit $2 \leq m < n$ de sorte que

$$X_{m-1} \subset X_m \subset X_{n-1} \subset X_n .$$

On a

$$\left\| \frac{Au_n}{\lambda_n} - \frac{Au_m}{\lambda_m} \right\| = \left\| \frac{Au_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n} - \frac{Au_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m} + u_n - u_m \right\|$$

$$\geq \text{dist}(u_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Si $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ on aboutit à une contradiction puisque (Au_n) admet une sous-suite convergente

Démonstration du théorème III-6-(c) :

Pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble

$$\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$$

est vide ou fini (s'il contenait une infinité de points distincts, on aurait un point d'accumulat — puisque $\sigma(A)$ est compact — et on aboutirait à une contradiction avec le lemme III-2).

Lorsque $\sigma(A) \setminus \{0\}$ contient une infinité de points distincts on peut donc les ranger en une suite qui tend vers 0.

III 4- Décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints compacts:

On suppose dans la suite que $X = \mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et que $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
En identifiant $\mathcal{H}^*$ et $\mathcal{H}$ on peut considérer que $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. **($\mathcal{H}$ est réel)**

Définition III-5:
On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est autoadjoint si $A^* = A$, c'est-à-dire

$$(Au, v) = (u, Av), \quad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

Proposition III-3:
Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur autoadjoint.
On pose:

$$m = \inf_{\substack{u \in \mathcal{H} \\ \|u\| = 1}} (Au, u) \quad \text{et} \quad M = \sup_{\substack{u \in \mathcal{H} \\ \|u\| = 1}} (Au, u)$$

Alors $\sigma(A) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(A)$ et $M \in \sigma(A)$.

Démonstration Soit $\lambda > M$; montrons que $\lambda \in \rho(A)$. On a

$$(Au, u) \leq M\|u\|^2 \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

et par conséquent

$$(\lambda u - Au, u) \geq (\lambda - M)\|u\|^2 = \alpha\|u\|^2, \forall u \in \mathcal{H}$$
$$(\alpha > 0)$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram on voit que $\lambda I - A$ est bijectif.

Montrons que $M \in \sigma(A)$. La forme

$$a(u, v) = (Mu - Au, v)$$ est bilinéaire, symétrique et $a(v, v) \geq 0$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la forme $a(u, v)$ il vient

$$|(Mu - Au | v)| \leq (Mu - Au | u)^{\frac{1}{2}} (Mv - Av, v)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall u, v \in \mathcal{H}.$$

D'où il résulte en particulier que

$$\|Mu - Au\| \leq C\,(Mu - Au, u)^{\frac{1}{2}} \qquad (*)$$

Soit $\{u_n\}$ une suite telle que $\|u_n\| = 1$.

et $(Au_n, u_n) \to M$. Grâce à $(*)$ on voit

que $\quad \|Mu_n - Au_n\| \to 0,$

et donc $M \in \sigma(A)$ (car si $M \in \rho(A)$

alors $u_n = (MI - A)^{-1}(Mu_n - Au_n) \to 0$).

Les propriétés de m s'obtiennent en remplaçant

A par $-A$.

Corollaire III-2 :

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur autoadjoint tel que $\sigma(A) = \{0\}$. Alors $A = 0$.

Démonstration :

D'après la proposition III-3 : on sait que

$$(Au, u) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}$$

Il en résulte que

$$2(Au, v) = (A(u+v), u+v) - (Au, u) - (Av, v) = 0$$

$$\forall u, v \in \mathcal{H}$$

Donc $A = 0$.

Le résultat suivant est fondamental; il montre qu'un opérateur autoadjoint compact est "diagonalisable" dans une base convenablement choisie.

Théorème III-7:

On suppose que $\mathcal{H}$ est séparable. Soit A un opérateur autoadjoint compact. Alors $\mathcal{H}$ admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de A.

Démonstration:

Soit $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres distinctes de A, excepté 0; on note $\lambda_0 = 0$

on pose $X_0 = \mathrm{Ker}(A)$ et $X_n = \mathrm{Ker}(A - \lambda_n I)$,

rappelons que

$0 \leq \dim X_0 \leq +\infty$ et que $0 < \dim X_n < \infty$

Montrons d'abord que $\mathcal{H}$ est somme Hilbertienne des $(X_n)_{n\geq 0}$.

(i) les $(X_n)_{n\geq 0}$ sont deux à deux orthogonaux. En effet si $u \in X_m$ et $v \in X_n$ avec $m \neq n$ alors

$$Au = \lambda_m u \quad , \quad Av = \lambda_n v$$

et

$$(Au, v) = \lambda_m (u, v) = (u, Av) = \lambda_n (u, v)$$

Donc $\qquad (u, v) = 0$.

(ii) soit F l'espace vectoriel engendré par les $(X_n)_{n\geq 0}$ vérifions que F est dense dans $\mathcal{H}$.

Il est clair que $A(F) \subset F$. Il s'en suit que $A(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$, en effet si $u \in F^{\perp}$ et $v \in F$ alors $(Au, v) = (u, Av) = 0$.

L'opérateur $A_0 = A|_{F^\perp}$ est auto adjoint compact

D'autre par $\sigma(A_0) = \{0\}$; en effet si

$\lambda \in \sigma(A_0) \setminus \{0\}$ alors $\lambda \in VP(A_0)$.

et donc il existe $u \in F^\perp$, $u \neq 0$ tel que

$A_0 u = \lambda u$. Par conséquent λ est l'une

des valeurs propres λ_n de A et

$u \in F^\perp \cap X_n$. Donc $u = 0$ ce qui est

absurde.

Il résulte du corollaire III-2 que $A_0 = 0$;

par suite

$$F^\perp \subset Ker(A) \subset F \text{ et } F^\perp = \{0\}$$

Donc F est dense dans $\mathcal{H}$.

enfin on choisit dans chaque X_n une base

Hilbertienne. La réunion de ces bases est

une base Hilbertienne de $\mathcal{H}$ formée de

vecteurs propres de A

Remarque. III-7 :

Soit A un opérateur autoadjoint compact. D'après ce qui précède on peut écrire tout $u \in \mathcal{H}$ sous la forme

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}{}' u_n \quad \text{avec } u_n \in \mathcal{X}_n$$

de sorte que $Au = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \lambda_n u_n$. On définit

$$A_k u = \sum_{n=1}^{k}{}' \lambda_n u_n .$$

Il est clair que A_k est un opérateur de rang fini et que

$$\|A_k - A\| \leq \sup_{n \geq k+1} |\lambda_n| \to 0 \text{ quand } k \to +\infty$$

On retrouve ainsi que A est limite d'une suite (A_k) d'opérateurs de rangs finis. Rappelons que dans un espace de Hilbert tout opérateur compact - non nécessairement auto-adjoint - est limite d'opérateurs de rangs finis.

* **Opérateurs de Fredholm**

Notons que le théorème III - 5 est un premier pas vers la théorie des opérateurs de Fredholm

Définition :

Soient X et Y deux espaces de Banach. On dit qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ est de Fredholm et on note $A \in Fred(X, Y)$ si :

(i) $Ker(A)$ est de dimension finie

(ii) $Im(A)$ est fermé et de codimension finie.

Définition III-6 :

L'indice de A est défini par

$$\mathrm{Ind}(A) = \dim \ker(A) - \operatorname{codim} \mathrm{Im}(A).$$

Remarque III-8 :

D'après le théorème III-5 l'opérateur $I-A$ où $A \in \mathbb{K}(X)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

On a quelques propriétés principales des opérateurs de Fredholm qu'on peut résumer dans :

a) Tout opérateur $A \in \mathrm{Fred}(X, Y)$ est inversible modulo des opérateurs de rangs finis. i.e il existe $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que :

$A \circ B - Id_Y$ et $B \circ A - Id_X$ soient de rangs finis

Inversement si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ et s'il existe

$B \in \mathcal{L}(Y, X)$ tel que

$$A \circ B - Id_Y \in \mathbb{K}(Y)$$

et $B \circ A - Id_X \in \mathbb{K}(X)$

alors $A \in Fred(X, Y)$

b) Si $A \in Fred(X, Y)$ et si $T \in \mathbb{K}(X, Y)$

alors

$A + T \in Fred(X, Y)$ et

$$Ind(A + T) = Ind(A).$$

c) Si $A \in Fred(X, Y)$ et $B \in Fred(Y, Z)$

alors $B \circ A \in Fred(X, Z)$ et

$$Ind(B \circ A) = Ind(A) + Ind(B).$$