Systèmes dynamiques en biologie

Chapitre 2: Systèmes discrets et dynamique des populations
Cours N°5: Dynamique d'une seul population

Mohammed Salah Abdelouahab

MI

Rappel (Points fixe et stabilité)

La forme générale d'un système discret est

$$x_{n+1} = f(x_n);\ x_n \in \mathbb{R}^n.$$

Definition

Un point fixe d'un système discret noté x^* vérifier

$$x^* = f(x^*).$$

Stabilités locale d'un point fixe

Nous définissons une variable locale $u_n = x_n - x^*$ et nous procédons à la linéarisation (**dans le cas de dimension un**)

On réalisant un développement limite de la fonction f au voisinage de x^* le modèle linéarisé locale s'écrit:

$$u_{n+1} = \lambda u_n.$$

avec $\lambda = \dfrac{df(x^*)}{dx}$.

Points fixes et stabilité

le point fixe pour ce système est l'origine.
la solution du système linéarisé s'écrit:

$$u_n = \lambda^n u_0$$

(u_0 la condition initiale). Plusieurs cas sont possibles:

1. $(\lambda < -1)$ dans ce cas : $u_n = (-1)^n |\lambda|^n u_0$ La solution s'éloigne du point fixe, en prenant des valeurs de signes alternés.
2. $(\lambda = -1)$, la solution s'écrit: $u_n = (-1)^n u_0$. Donc la solution prend des valeurs alternées u_0 et $-u_0$.
3. $(-1 < \lambda < 0)$, la solution s'écrit: $u_n = (-1)^n |\lambda|^n u_0$. La solution prend des valeurs de signes alternées et s'approche du point fixe.
4. $(\lambda = 0)$, dés la première itération on va au point fixe 0.
5. $(0 < \lambda < 1)$, la solution s'écrit: $(u_n = \lambda^n u_0)$. La solution converge vers 0.
6. $(\lambda = 1)$ alors $u_n = u_0$.
7. $(\lambda > 1)$ la solution $u_n = \lambda^n u_0$. La solution s'éloigne du point fixe.

l'équation de Verhulst en temps discret s'écrit:

$$x_{n+1} = \rho \frac{x_n}{x_n + k} = f(x_n)$$

où ρ est le taux de croissance de la population et k un paramètre positif et x_n est l'effectif de la population à l'itération n.
Les points fixes de cette équation sont solution de l'équation:
$f(x^*) = x^* \Rightarrow \rho x^* = x^*(x^* + k) \Rightarrow x^* = 0$ ou $x^* = \rho - k$.

Stabilité des points fixes:

On a $f'(x) = \frac{\rho(x+k)-\rho x}{(x+k)^2} = \frac{\rho x+\rho k-\rho x}{(x+k)^2} = \frac{\rho k}{(x+k)^2}$

donc $f'(0) = \frac{\rho}{k}$

1. si $\frac{|\rho|}{k} < 1 \Rightarrow |\rho| < k$ alors: $x^* = 0$ est asymptotiquement stable.
2. si $|\rho| > k \Rightarrow x^* = 0$ est instable.

$f'(\rho - k) = \frac{\rho k}{(\rho-k+k)^2} = \frac{k}{\rho}$

1. si $\frac{k}{|\rho|} < 1$ on a $k < |\rho|$
   donc
   $x^* = \rho - k$ est asymptotiquement stable.
2. si $k > |\rho|$ alors $x^* = \rho - k$ est instable.

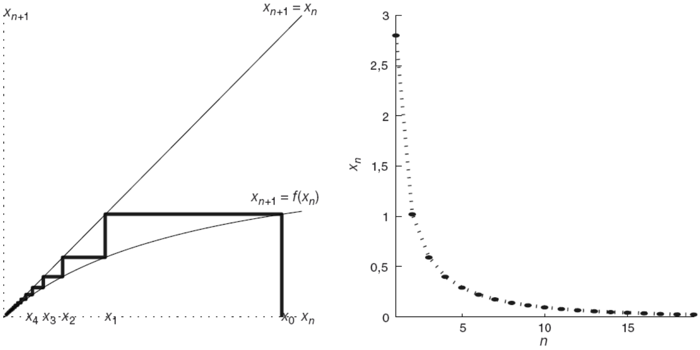

Figure 4.1 Solutions du modèle de Verhulst dans le cas $\rho < K$ ($\rho = 1.75$ et $K = 2$).

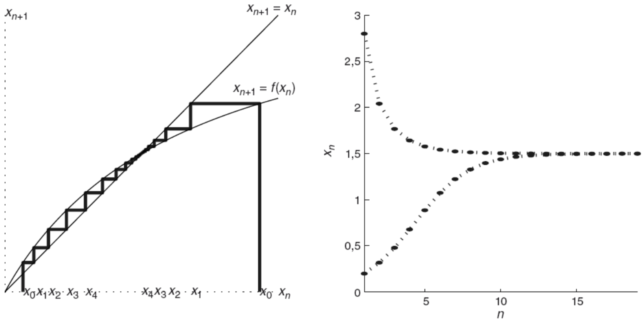

Figure 4.2 Solutions du modèle de Verhulst dans le cas $\rho > K$ ($\rho = 3.5$ et $K = 2$), pour deux conditions initiales différentes.