وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المركز الجامعي عبد الحفيظ بوالصوف– ميلة

ستوى الثالثة: **محاسبة+ إدارة أعمال + إدارة مالية**	المادة: تحليل البيانات	السداسي السادس	الموسم الدراسي: **2025/2024**

السلسلة (2) المصفوفات والعمليات الجبرية

التمرين (1):

1- إذا كانت المصفوفتان $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ ، أوجد: A+B، 3B-A

2- إذا كانت المصفوفتان $C=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ و $D=\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 0 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ ، أوجد: CD، DC

3- إذا كانت المصفوفتان $E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ و $F=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$، أوجد: EF، FE+

التمرين (2):

1- احسب محدد كل مصفوفة من المصفوفتين: $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

2- أوجد مقلوب (معكوس) كل من المصفوفتين: A و B

3- أوجد مجموعتي الحلول لنظامي المعادلات الخطية التاليين:

$$(a)\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-4y-2z=2 \\ 5x-3y-5z=-1 \end{cases} \quad \text{و} \quad (b)\begin{cases} 2x-y+3z=2 \\ x+3y-z=11 \\ 2x-2y+5z=3 \end{cases}$$

التمرين (3):

أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ستوى الثالثة: **محاسبة+ إدارة أعمال + إدارة مالية**	**المادة: تحليل البيانات**	**السداسي السادس**	**الموسم الدراسي: 2025/2024**

حل السلسلة (2) المصفوفات والعمليات الجبرية

1- إيجاد المصفوفتين: A+B، 3B-A:

$$A+B=\begin{pmatrix}2&4&6&3\\1&0&7&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&5&2&7\\9&1&6&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&9&8&10\\10&1&13&7\end{pmatrix}$$

$$3B-A=3\begin{pmatrix}3&5&2&7\\9&1&6&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&4&6&3\\1&0&7&4\end{pmatrix}+=\begin{pmatrix}7&11&0&18\\26&3&11&5\end{pmatrix}$$

2- إيجاد المصفوفتين AB، BA:

$$DC=\begin{pmatrix}2&9\\8&0\\-4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&4\\1&5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&45&-19\\48&0&32\\-17&35&-37\end{pmatrix}\ ،\ CD=\begin{pmatrix}6&0&4\\1&5&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&9\\8&0\\-4&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&82\\54&-12\end{pmatrix}$$

3- إيجاد المصفوفتين AB، BA:

$$FE=\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&0&15\\2&0&3\\-2&0&-6\end{pmatrix}\quad ،\quad EF=\begin{pmatrix}2&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}=(4)$$

<u>التمرين</u> (2):

1- حساب محددي المصفوفتين A وB:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&4\\2&3\end{vmatrix}=-5\neq 0$$

$$\det(B)=\left|\begin{matrix}2&1&4\\3&5&1\\2&0&6\end{matrix}\right|\begin{matrix}2&1\\3&5\\2&0\end{matrix}=(2.5.6+1.1.2+4.3.0)-(2.5.4+0.1.2+6.3.1)=62-58=4$$

2- إيجاد مقلوب (معكوس) كل من المصفوفتين A وB:

أولا- مقلوب المصفوفة A: A قابلة للقلب لأن $\det(A)=-5\neq 0$

حيث: $A^{-1}=\frac{1}{det(A)}adj(A_{ij})=\frac{1}{det(A)}C^t$ حيث: C هي المصفوفة المرافقة عناصرها $A_{ij}=(-1)^{i+j}det(M_{ij})$

حيث: $det(M_{ij})$ هي المحدد الناتج من المصفوفة A وذلك بحذف الصف i والعمود j

$A_{11}=(-1)^{1+1}(3)=3 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}(2)=-2 \qquad C=\begin{pmatrix}3&-2\\-4&1\end{pmatrix}$

$A_{21}=(-1)^{2+1}(4)=-4 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}(1)=1$

وبالتالي: $A^{-1}=\frac{1}{det(A)}adj(A_{ij})=\frac{1}{det(A)}C^t=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}3&-2\\-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/5&2/5\\4/5&-1/5\end{pmatrix}$

<u>ثانيا</u>- مقلوب المصفوفة B: $\det(B)=4\neq 0$، إذن المصفوفة B قابلة للقلب حيث:

$B_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$ حيث: C هي المصفوفة المرافقة عناصرها $B^{-1} = \frac{1}{det(B)} adj(B_{ij}) = C^t$

$B_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 30$ $\quad B_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -16$ $\quad B_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10$

$B_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$ $\quad B_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4$ $\quad B_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$B_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -19$ $\quad B_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10$ $\quad B_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7$

إذن المصفوفة المرافقة هي: $C=\begin{pmatrix} 30 & -16 & -10 \\ -6 & 4 & 1 \\ -19 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ ومنه:

$$B^{-1} = \frac{1}{det(B)} adj(B_{ij}) = \frac{1}{det(B)} C^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 30 & -6 & -19 \\ -16 & 4 & 10 \\ -10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

3- إيجاد مجموعتي الحلول لنظامي المعادلات الخطية التاليين: (a) و (b)

$$(a) \Leftrightarrow AX = C : \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \Leftrightarrow BX = D : \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

أولا- حل نظام المعادلات الخطية (a):

- حساب محدد المصفوفة A: $det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 5 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 35 \neq 0$

إذن نظام المعادلات الخطية (a) يقبل حلا وحيدا في المجموعة $\mathbb{R}^3$ حيث: $(a) \Leftrightarrow AX = C \Leftrightarrow X = A^{-1}C$

- إيجاد المصفوفة A^{-1}:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$ حيث: C هي المصفوفة المرافقة عناصرها $A^{-1} = \frac{1}{det(B)} C^t$

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 14$ $\quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 5$ $\quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 11$

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 7$ $\quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -10$ $\quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -11$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 5$ $\quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -10$

إذن المصفوفة المرافقة هي: $C=\begin{pmatrix} 14 & 5 & 11 \\ 7 & -10 & -11 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$

ومنه: $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 5 & -10 & 5 \\ 11 & -11 & -10 \end{pmatrix}$

<u>التمرين</u> (3):

إيجاد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفات المعطاة:

1- القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة A

<u>أولا</u>- القيم الذاتية لـ:A

λ قيمة ذاتية لـ: $A \Leftrightarrow det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

ومنه: $\lambda_2 = 5$ أو $\lambda_1 = 1 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-5) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = 0$

<u>ثانيا</u>- الأشعة الذاتية لـ: A

- X شعاع ذاتي مرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$ يعني $(A - \lambda_1 I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

وبالتالي: $3x + y = 0$، بمعنى أن $y = -3x$، ومنه الشعاع الذاتي المرافق للقيمة $\lambda_1 = 1$ هو:

$(x, y) = (x, -3x) = x(1, -3)$ حيث عدد حقيقي غير معدوم

ومن أجل $x = 1$ يكون اشعاع الذاتي الملحق بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$ هو: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

- X شعاع ذاتي مرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_2 = 5$ يعني $(A - \lambda_2 I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

وبالتالي: $-x + y = 0$، بمعنى أن $y = x$، ومنه الشعاع الذاتي المرافق للقيمة $\lambda_2 = 5$ هو:

$(x, y) = (x, x) = x(1,1)$ حيث x عدد حقيقي غير معدوم

ومن أجل $x = 1$ يكون اشعاع الذاتي الملحق بالقيمة الذاتية $\lambda_2 = 5$ هو: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2- القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة B

<u>أولا</u>- القيم الذاتية لـ: B

نقوم بحل المعادلة: $det(B - \lambda I_3) = 0$

$$det(B - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$$

بمعنى أن للمصفوفة B قيمة ذاتية بسيطة $\lambda_1 = 2$ وقيمة ذاتية مضاعفة $\lambda_2 = 1$

ثانيا- الشعاع الذاتية للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$

- X شعاع ذاتي مرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$ يعني $\Leftrightarrow (A-2I_3)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

وبالتالي: $\begin{cases}x=y=0\\2y-z=0\end{cases}$، أي أن $z=y=x=0$، ومنه الشعاع المعدوم لا يمكن أن يمثل شعاعا ذاتيا مرافقا للقيمة $\lambda_2 = 1$

- X شعاع ذاتي مرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_2 = 1$ يعني $\Leftrightarrow (A-\lambda_2 I_2)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

وبالتالي $\begin{cases}x+z=0\\2y=0\end{cases}$: بمعنى أن $\begin{cases}z=-x\\y=0\end{cases}$، ومنه الشعاع الذاتي المرافق للقيمة $\lambda_2 = 1$ هو:

$(x,y,z)=(x,0,-x)=x(1,0,-1)$ حيث x عدد حقيقي غير معدوم

3- القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة C

أولا- القيم الذاتية لـ:C

نقوم بحل المعادلة: $det(C-\lambda I_3)=0$

$$det(C-\lambda I_3)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}3-\lambda&-2&0\\-2&3-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&-2\\-2&3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda)=0 \Leftrightarrow (-\lambda)[(3-\lambda)^2-4]=0$$

بمعنى أن للمصفوفة C قيم ذاتية بسيطة $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = 5$

ثانيا- الشعاع الذاتي للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$

- X شعاع ذاتي مرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_1 = 0$ يعني $\Leftrightarrow (A-0I_3)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&3&0\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

وبالتالي: $\begin{cases}3x-2y=0\\2y-z=0\\y=0\end{cases}$، أي أن $y=x=0$ ، كيفي z، ومنه الشعاع الذاتي المرافق للقيمة $\lambda_1 = 0$ هو:

$(x,y,z)=(0,0,z)=z(0,0,1)$ حيث z عدد حقيقي غير معدوم

- X شعاع ذاتي مرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_2 = 1$ يعني $\Leftrightarrow (A-\lambda_2 I_3)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&2&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

وبالتالي $\begin{cases}x=y\\z=2y\end{cases}$: بمعنى أن $\begin{cases}z=-x\\y=0\end{cases}$، ومنه الشعاع الذاتي المرافق للقيمة $\lambda_2 = 1$ هو:

$(x,y,z)=(x,x,2x)=x(1,1,2)$ حيث x عدد حقيقي غير معدوم

- X شعاع ذاتي مرفق بالقيمة الذاتية $\lambda_3 = 5$ يعني $\Leftrightarrow (A-\lambda_3 I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

وبالتالي $\begin{cases} y = -x \\ 5z = 2y \end{cases}$: بمعنى أن $\begin{cases} y = -x \\ z = -{}^{2}/_{5} \end{cases}$، ومنه الشعاع الذاتي المرافق للقيمة $\lambda_3 = 5$ هو:

$(x,y,z) = \left(x,-x,-{}^{2}/_{5}\,x\right) = {}^{x}/_{5}\,(5,-5,-2)$ حيث x عدد حقيقي غير معدوم

انتهى