تمهيد:

المعادلات الآنية في الاقتصاد القياسي هي نماذج تحليلية تُستخدم لدراسة العلاقات المتبادلة بين المتغيرات الاقتصادية الداخلية، مثل الدخل والاستهلاك في نموذج كينز البسيط.

1. مفاهيم:

تتكون هذه المعادلات من نظام يجمع بين معادلات سلوكية (مثل دالة الاستهلاك) ومعادلات تعريفية (مثل تعريف الدخل الوطني)، حيث تكون بعض المتغيرات داخلية (مُحددة داخل النظام) وبعضها خارجي (مُعطاة مسبقًا مثل الاستثمار).

فعندما يكون المتغير التابع في معادلة ما متغيرا مفسرا في معادلة أخرى، يكون لدينا نظام أو نموذج معادلات آنية، المتغيرات التابعة في نظام معادلات آنية تسمى أيضا بالمتغيرات الداخلية بينما تسمى المتغيرات التي تحددها عوامل خارج النموذج بالمتغيرات الخارجية.

2. مشكلة التحديد والتقدير

تواجه هذه النماذج مشكلة السببية باتجاهين(endogeneity) ، مما يجعل تقدير المعاملات بالطرق العادية (مثل المربعات الصغرى) متحيزًا؛ لذا يُستخدم شرط الترتيب والرتبة للتحديد، وطرق مثل متغيرات الأدوات (IV) أو 2 SLSللتقدير.

مثال 1:

$M_t = a_0 + a_1 Y_t + \varepsilon_{1t} .....1$ $Y_t = b_0 + b_1 M_t + b_2 I_t + \varepsilon_{2t} .....2$	• **حيث M_t عرض النقود في الفترة (t)، Y_t هي الدخل و I_t هي الاستثمار، حيث أن M تعتد على Y في المعادلة الأولى وتعتمد Y على M وكذلك على I في المعادلة الثانية؛ إذن M و Y تتحددان معا وبالتالي لدينا نموذج معادلات آنية.** • **إن M و Y متغيران داخليان بينما I متغير خارجي يتحدد خارج النموذج.** • **التغير في ε_{1t} يؤثر على M_t في المعادلة الأولى، وهذا بدوره يؤثر على Y_t في المعادلة الثانية وكنتيجة لذلك Y و ε_{1t} مترابطين مما يؤدي إلى تقديرات المربعات الصغرى متميزة وغير متسقة لمعادلة M و Y.**

3. معادلات الشكل المختزل:

بتعويض المعادلة الثانية في المعادلة الأولى نحصل على:

$$M_t = a_0 + a_1 Y_t + \varepsilon_{1t}$$
$$M_t = a_0 + a_1(b_0 + b_1 M_t + b_2 I_t + \varepsilon_{2t}) + \varepsilon_{1t}$$
$$M_t = a_0 + a_1 b_0 + a_1 b_1 M_t + a_1 b_2 I_t + a_1 \varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}$$
$$M_t - a_1 b_1 M_t = a_0 + a_1 b_0 + a_1 b_2 I_t + a_1 \varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}$$
$$M_t(1 - a_1 b_1) = a_0 + a_1 b_0 + a_1 b_2 I_t + a_1 \varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}$$
$$M_t = \frac{a_0 + a_1 b_0}{1 - a_1 b_1} + \frac{a_1 b_2}{1 - a_1 b_1} I_t + \frac{\varepsilon_{1t} + a_1 \varepsilon_{2t}}{1 - a_1 b_1}$$
$$M_t = \lambda_0 + \lambda_1 I_t + v_{1t}$$

بتعويض المعادلة الأولى في المعادلة الثانية نحصل على:

$$M_t = a_0 + a_1 Y_t + \varepsilon_{1t}$$
$$Y_t = b_0 + b_1(a_0 + a_1 Y_t + \varepsilon_{1t}) + b_2 I_t + \varepsilon_{2t}$$
$$Y_t = b_0 + b_1 a_0 + b_1 a_1 Y_t + b_1 \varepsilon_{1t} + b_2 I_t + \varepsilon_{2t}$$
$$Y_t - b_1 a_1 Y_t = (b_0 + b_1 a_0) + b_2 I_t + (b_1 \varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t})$$
$$(1 - b_1 a_1) Y_t = (b_0 + b_1 a_0) + b_2 I_t + (b_1 \varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t})$$
$$Y_t = \frac{(b_0 + b_1 a_0) + b_2 I_t + (b_1 \varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t})}{1 - b_1 a_1}$$
$$Y_t = \frac{b_0 + b_1 a_0}{1 - b_1 a_1} + \frac{b_2}{1 - b_1 a_1} I_t + \frac{b_1 \varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1 - b_1 a_1}$$
$$Y_t = \lambda_2 + \lambda_3 I_t + v_{2t}$$

إذن معادلتي الشكل المختزل هما:

$$M_t = \lambda_0 + \lambda_1 I_t + v_{1t}$$
$$Y_t = \lambda_2 + \lambda_3 I_t + v_{2t}$$

4. حساب المعالم الهيكلية:

التمييز: يشير التمييز إلى إمكانية حساب المعالم الهيكلية لنموذج المعادلات الآنية من معالم الشكل المختزل.

- تكون معادلة ما في نظام مميزة بالضبط إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة مساويا لعدد المتغيرات الداخلية فيها ناقصا 1.
- تكون المعادلة ضمن نظام زائدة التمييز (أو ناقصة التمييز) إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة أكبر (أو أصغر) من عدد المتغيرات الداخلية الداخلة فيها

بمعنى أن التمييز هو ببساطة: هل نستطيع تقدير معادلة معينة والحصول على نتائج صحيحة أم لا.

◆ الحالات الأساسية:

1. معادلة مميزة تمامًا(Just Identified)

→عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة = عدد المتغيرات الداخلية - 1

✔ هنا يمكن حل المعادلة بشكل دقيق .

2. معادلة ناقصة التمييز(Under-Identified)

→عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة أقل من المطلوب

✘ لا يمكن حل المعادلة أو تقديرها بشكل صحيح .

3. معادلة زائدة التمييز(Over-Identified)

→عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة أكبر من المطلوب

✔ يمكن حلها، لكن توجد أكثر من طريقة (نحتاج أدوات إضافية للاختيار).

يمكن في حالة المعادلة المميزة بالضبط حساب معاملات هيكلية وحيدة لبعض معاملات الشكل المختزل؛ أي للمعادلة فقط التي تحقق شرط التمييز بدقة.

- نلاحظ أن معادلة عرض النقود (M) في المثال الأول تُعتبر معادلة مميزة بالضبط لأنها تستبعد متغيرًا خارجيًا واحدًا، وتتضمن متغيرين داخليين هما M وY .
- بينما معادلة الدخل (Y) تعتبر ناقصة التمييز (under-identified) لأنها لا تستبعد أي متغيرات خارجية. وإذا تم تضمين متغير خارجي إضافي (مثل الإنفاق الحكومي G) في المعادلة الثانية، فإن المعادلة الأولى $M_t = a_0 + a_1 Y_t + \varepsilon_{1t}$ تصبح محددة بشكل زائد(over-identified) ، لأن عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة في هذه الحالة يزيد عن عدد المتغيرات الداخلية ناقص واحد.

إذن يمكن حساب قيمة وحيدة للمعالم الهيكلية للمعادلة الأولى ($M_t = a_0 + a_1 Y_t + \varepsilon_{1t}$) المميزة بالضبط من معالم الشكل المختزل أعلاه كالآتي:

$$M_t = \lambda_0 + \lambda_1 I_t + v_{1t}$$
$$Y_t = \lambda_2 + \lambda_3 I_t + v_{2t}$$

$a_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_3} = \dfrac{\dfrac{a_1 b_2}{1 - a_1 b_1}}{\dfrac{b_2}{1 - b_1 a_1}}$	$a_0 = \lambda_0 - a_1\lambda_2 = \dfrac{a_0 + a_1 b_0}{1 - a_1 b_1} - (a_1 . \dfrac{b_0 + b_1 a_0}{1 - a_1 b_1})$ $a_0 = \dfrac{a_0 + a_1 b_0 - (a_1 b_0 + a_1 b_1 a_0)}{1 - a_1 b_1}$ $a_0 = \dfrac{a_0 + a_1 b_0 - a_1 b_0 - a_1 b_1 a_0}{1 - a_1 b_1}$ $a_0 = \dfrac{a_0 - a_1 b_1 a_0}{1 - a_1 b_1} = \dfrac{a_0 (1 - a_1 b_1)}{1 - a_1 b_1}$

5. عملية التقدير بالمربعات الصغرى غير المباشرة:

عملية التقدير بالمربعات الصغرى غير المباشرة (Indirect Least Squares - ILS) هي طريقة أساسية في الاقتصاد القياسي لتقدير معاملات نماذج المعادلات الآنية عندما تتوفر حالة تمييز مميزة بالضبط.

المبدأ الأساسي

تعتمد على حل النظام الهيكلي عبر المعادلات المختزلة؛ حيث تُقدَّر المعادلة المختزلة لكل متغير داخلي بـOLS ، ثم تُستخدم العلاقة الرياضية بين المعاملات الهيكلية والمختزلة لحساب المعاملات الهيكلية حسب القوانين أعلاه.

مراحل التقدير بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة:

1. **صياغة نموذج الشكل المختصر:(Reduced Form)**

يتم اشتقاق معادلات الشكل المختصر بحيث يُعبَّر عن كل متغير داخلي (داخلي المنشأ) كدالة خطية في جميع المتغيرات الخارجية (المحددة مسبقًا) فقط، دون ظهور متغيرات داخلية أخرى في الطرف الأيمن.

2. **تقدير معاملات الشكل المختصر:**

بما أن الشكل المختصر لا يعاني من مشكلة التحيز الناتج عن آنية العلاقة ؛كل معادلة فيه تحقق افتراضات المربعات الصغرى العاديةOLS ؛ فيُقدَّر كل معادلة من معادلاته بطريقة **المربعات الصغرى العادية** بشكل منفرد.

3. **استرجاع المعاملات الهيكلية:**

بعد الحصول على تقديرات معاملات الشكل المختصر، تُستخدم العلاقات الجبرية التي تربط بين معاملات الشكل المختصر والمعاملات الهيكلية الأصلية.
يتم حل هذه العلاقات (عادةً عدد من المعادلات بعدد المجاهيل) للحصول على تقديرات فريدة للمعاملات الهيكلية.

4. **التحقق من التطابق (شرط التحديد):**

تعمل ILS فقط إذا كانت المعادلة **محددة بالضبط**، أي أن عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة منها يساوي عدد المتغيرات الداخلية الداخلة فيها ناقص 1.
إذا كانت المعادلة زائدة التحديد، فلا يمكن الحصول على قيم فريدة) ثمة أكثر من حل، فتستخدم طرق أخرى مثل المربعات الصغرى ذات المرحلتين SLS).2
إذا كانت ناقصة التحديد، فلا يمكن تطبيق الطريقة أساسًا.