

Exemple 4 : portique

Soit la structure suivante formée de trois éléments poutres élancées et quatre nœuds. Le chargement consiste en une charge répartie verticale q appliquée aux éléments 1 et 2. Sachant que les appuis aux nœuds 1, 3 et 4 sont tous encastrés, on cherche à déterminer les déplacements et efforts dans cette structure.

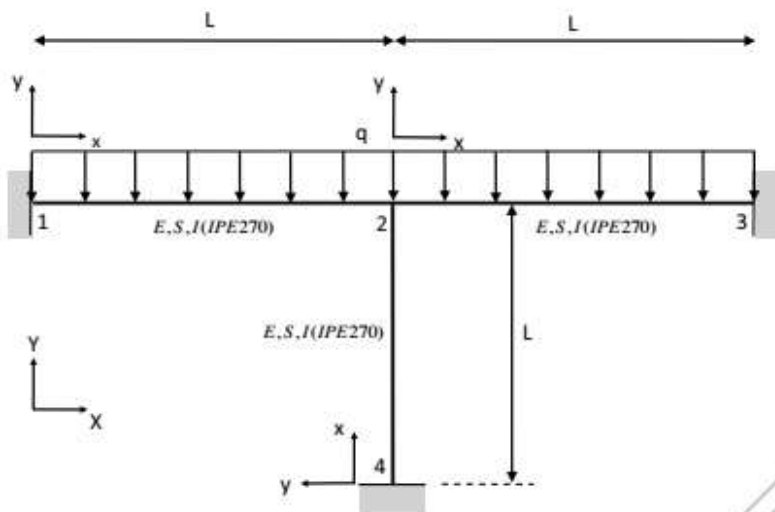


Figure 6.18 – Exemple 4 : portique.

<https://www.GCAlgerie.com/>



Tableau 6.3 – Exemple 4 : connectivité élémentaire.

Élément	Nœud i	Nœud j	Longueur (m)	Section (m ²)	Inertie (m ⁴)
1 (poutre)	1	2	L	S	I
2 (poutre)	2	3	L	S	I
3 (poutre)	4	2	L	S	I

Application numérique : $L = 10$ m, $q = 10$ kN/m, $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ N/m², $S = 0.00459$ m², $I = 0.0000579$ m⁴.

6.5.1 Matrices de rigidité en repère local

Les éléments 1, 2 et 3 étant tous identiques, leur matrice de rigidité s'écrit d'après (6.21) :

$$[k_1] = [k_2] = [k_3] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

Matrices de rigidité en repère global

Pour les éléments 1 et 2

$$[K_1] = [k_1] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

Rigidité du nœud 2

$$[K_2] = [k_2] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

Pour l'élément 3

$$[K_3] = [R_3]^T [k_3] [R_3] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

Rigidité du nœud 2

Vecteurs charges

La charge répartie q appliquée à chacun des deux éléments est équivalente aux charges nodales suivantes (cf. tableau 6.1) :

$$\{f_1\} = \{f_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (6.66)$$

Les repères locaux des éléments 1 et 2 étant confondus avec le repère global, on a bien sûr :

$$\{F_1\} = \{f_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad \{F_2\} = \{f_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (6.67)$$

Charges nodales du nœud 2

Résolution du système $[K] \cdot \{q\} = \{F\}$

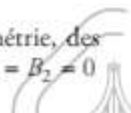
De par les conditions d'appui, seul le nœud 2 est libre. Il suffit donc d'additionner les parties de rigidité et de vecteurs charges encadrées aux chapitres 6.5.3 et 6.5.4 :

$$\begin{bmatrix} \frac{ES}{L} + \frac{ES}{L} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{12EI}{L^3} + \frac{ES}{L} & \frac{6EI}{L^2} - \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} - \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} - \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} - \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (6.68)$$

Soit après simplification :

$$\begin{bmatrix} \frac{2ES}{L} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{24EI}{L^3} + \frac{ES}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -qL \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.69)$$

La structure respectant les conditions de symétrie (symétrie de la géométrie, des conditions d'appui et des charges), on peut déduire directement que $U_2 = B_2 = 0$ d'où :



$$V_2 = \frac{-qL}{\frac{24EI}{L^3} + \frac{ES}{L}} = -1.034 \text{ mm} \quad (6.70)$$

La structure étant symétrique par rapport à un axe passant par $X = L$, il aurait été possible de réduire le problème aux seuls éléments 1 et 3. Dans cette hypothèse, il aurait fallu en plus des conditions d'appui, bloquer le nœud 2 horizontalement mais également en rotation ($U_2 = B_2 = 0$).

Cependant et pour être totalement équivalente à l'approche globale, ces calculs devraient prendre en compte la moitié de l'inertie I pour l'élément 3, celui-ci étant dans l'axe de symétrie. D'une manière générale, les caractéristiques des entités (charges, appuis élastiques, etc.) situées sur l'axe de symétrie doivent être divisées par deux.

Enfin, un moyen mnémotechnique simple permet de se souvenir des degrés de liberté à bloquer : « on bloque la translation suivant l'axe de symétrie passant par une valeur de X,Y ou Z puis les rotations suivant les deux autres axes » ce qui se résume par le tableau suivant :