

u_1	v_1	θ_1	u_2	v_2	θ_2	
$(c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{12EI}{L^3})$	$sc(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})$	$-s \frac{6EI}{L^2}$	$-(c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{12EI}{L^3})$	$-sc(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})$	$-s \frac{6EI}{L^2}$	u_1
$sc(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})$	$(s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3})$	$c \frac{6EI}{L^2}$	$-sc(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})$	$-(s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3})$	$c \frac{6EI}{L^2}$	v_1
$-s \frac{6EI}{L^2}$	$c \frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	$s \frac{6EI}{L^2}$	$-c \frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	θ_1
$-(c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{12EI}{L^3})$	$-sc(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})$	$s \frac{6EI}{L^2}$	$(c^2 \frac{EA}{L} + s^2 \frac{12EI}{L^3})$	$sc(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})$	$s \frac{6EI}{L^2}$	u_2
$-sc(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})$	$-(s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3})$	$-c \frac{6EI}{L^2}$	$sc(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3})$	$(s^2 \frac{EA}{L} + c^2 \frac{12EI}{L^3})$	$-c \frac{6EI}{L^2}$	v_2
$-s \frac{6EI}{L^2}$	$c \frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	$s \frac{6EI}{L^2}$	$-c \frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	θ_2

Solution d'exercice 01 :

Les caractéristiques élémentaires sont :

Élément 1 : L , E , A , I , $\theta = 0$, $c = 1$, $s = 0$

D'où les matrices de rigidité élémentaires dans le repère globale :

$[K_1] =$	$\frac{EA}{L}$	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0
	0	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$
	0	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$
	$-\frac{EA}{L}$	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0
	0	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	0	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$
	0	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$

Élément 1 : L , E , A , I , $\theta = -90$, $c = 0$, $s = -1$

D'ou les matrices de rigidité élémentaires dans le repère globale :

$$[K_2] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Assemblage des matrices de rigidité élémentaires, donne

$$[K_G] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Application des conditions aux limites : $v_1 = u_3 = v_3 = \theta_3 = 0$

Le système matriciel devient :

$\frac{EA}{L}$	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\mathbf{u}_1$	=	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbf{v}_1$		0
0	0	$\frac{4EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	0	0	0	θ_1		0
$-\frac{EA}{L}$	0	0	$\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3}$	0	$\frac{6EI}{L^2}$	0	0	0	$\mathbf{u}_2$		$\mathbf{P}$
0	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	0	$\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	0	0	0	$\mathbf{v}_2$		0
0	0	$\frac{2EI}{L}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{8EI}{L}$	0	0	0	θ_2		0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\mathbf{u}_3$		0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	$\mathbf{v}_3$		0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	θ_3		0

$$\frac{EA}{L}u_1 - \frac{EA}{L}u_2 = 0$$

$$\frac{4EI}{L}\theta_1 - \frac{6EI}{L^2}v_2 + \frac{2EI}{L}\theta_2 = 0$$

$$-\frac{EA}{L}u_1 + \left(\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^2}\right)u_2 + \frac{6EI}{L^2}\theta_2 = P$$

$$-\frac{6EA}{L^2}\theta_1 + \left(\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^2}\right)v_2 - \frac{6EI}{L^2}\theta_2 = 0$$

$$\frac{2EI}{L}\theta_1 + \frac{6EI}{L^2}u_2 - \frac{6EI}{L^2}v_2 + \frac{8EI}{L}\theta_2 = 0$$

La résolution du système réduit donne les déplacements inconnus

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.01316 \text{ m} \\ 9.199(10^{-4}) \text{ rad} \\ 0.01316 \text{ m} \\ -9.355(10^{-5}) \text{ m} \\ -1.887(10^{-3}) \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Le système réduit des inconnues statiques donne les réactions forces et moments, on trouve

$$\begin{Bmatrix} R_{1Y} \\ R_{3X} \\ R_{3Y} \\ R_{3\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.87 \text{ KN} \\ -5.00 \text{ KN} \\ 1.87 \text{ KN} \\ 18.77 \text{ KN.m} \end{Bmatrix}$$