Abdelhafid Boussouf University - Mila
Faculty of Science and Technology
Common Core ST Department
Module: Analysis 2

Academic Year: 2025/2026
1st Year Common Core ST
And 1st Year Engineering
Semester II

Analysis II: Tutorial Exercise Sheet 3

Exercise 01: Double Integrals

1. Compute the following double integrals: (أحسب التكاملات الثنائية التالية)

   (a) $\iint_R (3x + 2y)\, dA$ where $R = [1, 3] \times [0, 2]$ (b) $\iint_R y \sin x\, dA$ where $R = [0, \pi] \times [0, 1]$

2. Find the area enclosed by $y = x^2$ and $y = 2x$ using a double integral.
   أوجد المساحة المحصورة بين $y = x^2$ و $y = 2x$ باستعمال تكامل ثنائي

3. Use polar coordinates to compute: (استعمل الإحداثيات القطبية من أجل حساب)

$$\iint_R (x^2 + y^2)\, dA \quad \text{over the disk } x^2 + y^2 \leq 9$$

Exercise 02: Applications of Double Integrals

1. **(Center of gravity)** Find the center of gravity of the semicircular plate $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$ with uniform density. (أوجد مركز ثقل صفيحة نصف دائرية $x^2 + y^2 \leq R^2$ ، $y \geq 0$ بكثافة منتظمة (مركز الثقل))
2. **(Moments of Inertia)** Find I_y for the rectangle $[0, 3] \times [0, 2]$ with uniform density $\rho = 1$. Compare with I_x. (أوجد I_y للمستطيل $[0, 3] \times [0, 2]$ بكثافة منتظمة $\rho = 1$. قارن مع I_x (عزوم العطالة))
3. **(Engineering - Total Mass)** A triangular plate has vertices $(0, 0), (4, 0), (0, 3)$ and surface density $\sigma(x, y) = x + y$. Find its total mass.
   (الهندسة ـ الكتلة الكلية) صفيحة مثلثية رؤوسها $(0, 0), (4, 0), (0, 3)$ وكثافتها السطحية $\sigma(x, y) = x + y$. أوجد كتلتها الكلية.

Exercise 03: Triple Integrals

1. Compute the following triple integral: (أحسب التكامل الثلاثي التالي)

$$\iiint_V z\, dV \quad \text{where } V = [0, 1]^3$$

2. Find the volume of the solid bounded by $z = 4 - x^2 - y^2$ and $z = 0$. (Hint: use cylindrical coordinates).
   (أوجد حجم المجسم المحدود بـ $z = 4 - x^2 - y^2$ و $z = 0$ (تلميح: استعمل الإحداثيات الأسطوانية))
3. Compute $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$ over the ball $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ using spherical coordinates.
   احسب التكامل الثلاثي على الكرة $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ باستعمال الإحداثيات الكروية.
4. Find the center of gravity $\bar{z}$ of the cone $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ with uniform density.
   أوجد مركز الثقل $\bar{z}$ للمخروط $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ بكثافة منتظمة
5. **(Engineering - Total Charge)** The charge density inside a ball of radius $2\,m$ is $\rho_e(x, y, z) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ C/m^3. Find the total charge Q.
   (الهندسة ـ الشحنة الكلية) كثافة الشحنة داخل كرة نصف قطرها $2\,m$ هي $\rho_e(x, y, z) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} C/m^3$. أوجد الشحنة الكلية Q .

Exercise 04: Double Integrals

1. Evaluate the following double integrals over the rectangle R: (R أحسب التكاملات الثنائية التالية على المستطيل)

   (a) $\iint_R (6x^2y^3 - 5y^4)\,dA,\ R = [0,3] \times [0,1]$ (b) $\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}\,dA,\ R = [0,1] \times [-3,3]$

2. Find the volume of the solid that lies under the plane $4x + 6y - 2z + 15 = 0$ and above the rectangle $R = [-1,2] \times [-1,1]$. (R وفوق المستطيل $4x + 6y - 2z + 15 = 0$ أوجد حجم المجسم الواقع تحت المستوي)

3. Calculate the integral $\iint_D xe^y\,dA$ where D is the region bounded by $y = 0$, $y = x^2$, and $x = 1$.
   أحسب التكامل $\iint_D xe^y\,dA$ حيث D هي المنطقة المحدودة بـ $y = 0$ و $y = x^2$ و $x = 1$

Exercise 05: Polar Coordinates and Applications

1. Use polar coordinates to find the volume of the solid bounded by the paraboloid $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ and the plane $z = 4$. ($z = 4$ والمستوي $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ استعمل الإحداثيات القطبية لإيجاد حجم المجسم المحدود بالسطح المكافئ)

2. **(Mass and Density)** Find the mass of a lamina that occupies the region D bounded by $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, and $x = 1$ if the density function is $\rho(x,y) = xy$.
   (الكتلة والكثافة) أوجد كتلة صفيحة تشغل المنطقة D المحدودة بـ $y = \sqrt{x}$ و $y = 0$ و $x = 1$ إذا كانت دالة الكثافة هي $\rho(x,y) = xy$)

3. **(Center of Mass)** Find the center of mass of the lamina D bounded by $y = x^2$ and $y = x + 2$ with uniform density $\rho(x,y) = k$. . (D المحدودة بـ $y = x^2$ و $y = x + 2$ بكثافة منتظمة (مركز الكتلة) أوجد مركز كتلة الصفيحة

Exercise 06: Triple Integrals

1. Evaluate the triple integral $\iiint_E 6xy\,dV$ where E is the region below the plane $z = 1 + x + y$ and above the region in the xy-plane bounded by $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, and $x = 1$.
   أحسب التكامل الثلاثي $\iiint_E 6xy\,dV$ حيث E هي المنطقة الواقعة تحت المستوي $z = 1 + x + y$ وفوق المنطقة المحدودة في المستوي xy

2. **(Cylindrical Coordinates)** Use cylindrical coordinates to evaluate $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV$, where E is the region that lies inside the cylinder $x^2 + y^2 = 16$ and between the planes $z = -5$ and $z = 4$.
   (الإحداثيات الأسطوانية) استعمل الإحداثيات الأسطوانية لحساب التكامل، حيث E هي المنطقة الواقعة داخل الأسطوانة وبين المستويين.

3. **(Spherical Coordinates)** Evaluate $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV$, where B is the unit ball $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
   (B (الإحداثيات الكروية) أحسب التكامل على كرة الوحدة