2.3. اختبارات الفرضيات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين

1.2.3. اختبارات الفرضيات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين

يمكن التمييز بين حالتين:

التوزيعات الطبيعية المستقلة المعلومة التباين

نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

أو $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

أو $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$Z_0 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

التوزيعات الطبيعية المستقلة المجهولة التباين

حالة العينات الكبيرة

نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

أو $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

أو $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$Z_0 = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

حالة العينات الصغيرة

نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

أو $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

أو $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

لدينا إحصاءة الاختبار هي حسب الحالة:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

أو:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} Z_0 \epsilon \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \text{قبول الفرضية } H_0 \\ Z_0 \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |(\overline{X}-\overline{Y})| \leq Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \Rightarrow \text{قبول الفرضية } H_0 \\ |(\overline{X}-\overline{Y})| > Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \Rightarrow \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} Z_0 \epsilon \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \text{قبول الفرضية } H_0 \\ Z_0 \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |(\overline{X}-\overline{Y})| \leq Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \Rightarrow \text{قبول الفرضية } H_0 \\ |(\overline{X}-\overline{Y})| > Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} \Rightarrow \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} T_0 \epsilon \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] \Rightarrow \text{قبول الفرضية } H_0 \\ T_0 \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] \Rightarrow \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)| \leq t_{1-\alpha} S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \Rightarrow \\ |(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)| > t_{1-\alpha} S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \Rightarrow \end{cases}$$

2.2.3. اختبارات الفرضيات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين غير مستقلين

مجتمعين غير مستقلين

إذا كان حجم العينة $n \geq 30$

إذا كنا نرغب في اختبار تساوي وسطي مجتمعين مرتبطين فإننا نقوم بصياغة الفرضيات التالية:

$$H_0: \mu_d = 0$$
$$H_1: \mu_d \neq 0$$

أو $H_1: \mu_d > 0$

أو $H_1: \mu_d < 0$

إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} Z_0 \epsilon \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow & H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ Z_0 \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \Rightarrow & H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |\bar{D} - \mu_D| \leq Z_{\,1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \Rightarrow & H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ |\bar{D} - \mu_D| > Z_{\,1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \Rightarrow & H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

إذا كان حجم العينة $n < 30$

إذا كنا نرغب في اختبار تساوي وسطي مجتمعين مرتبطين فإننا نقوم بصياغة الفرضيات التالية:

$$H_0: \mu_d = 0$$
$$H_1: \mu_d \neq 0$$

أو $H_1: \mu_d > 0$

أو $H_1: \mu_d < 0$

إحصاءة الاختبار هي:

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} T_0 \epsilon \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] \Rightarrow & H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ T_0 \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] \Rightarrow & H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |\bar{D}| \leq t_{\,1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \Rightarrow & H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ |\bar{D}| > t_{\,1-\alpha} \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}} \Rightarrow & H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$