

Université de Mila
Département: informatique
Apprentissage Automatique :Travaux dirigées
Année universitaire 2025-2026

Exercice01- solution

1. Quel est le but de l'algorithme SVM? Quand peut-il être appliqué avec succès?

Solution:

- ✓ Les SVM sont des classificateurs linéaires qui cherchent un hyperplan pour séparer deux classes de données, positive et négative.
- ✓ Ils sont applicables avec succès lorsque les deux classes de données de l'ensemble d'apprentissage sont *linéairement séparables*.
- ✓ Ils conviennent, en particulier pour les données de grande dimension. Les attributs des données d'apprentissage *doivent être des nombres réels*.

Exercice01- solution

2. Si les exemples d'apprentissage sont linéairement séparables, combien de limites de décision peuvent séparer les points de données positifs des points de données négatifs? Quelle limite de décision l'algorithme SVM calcule-t-il? Pourquoi?

Solution

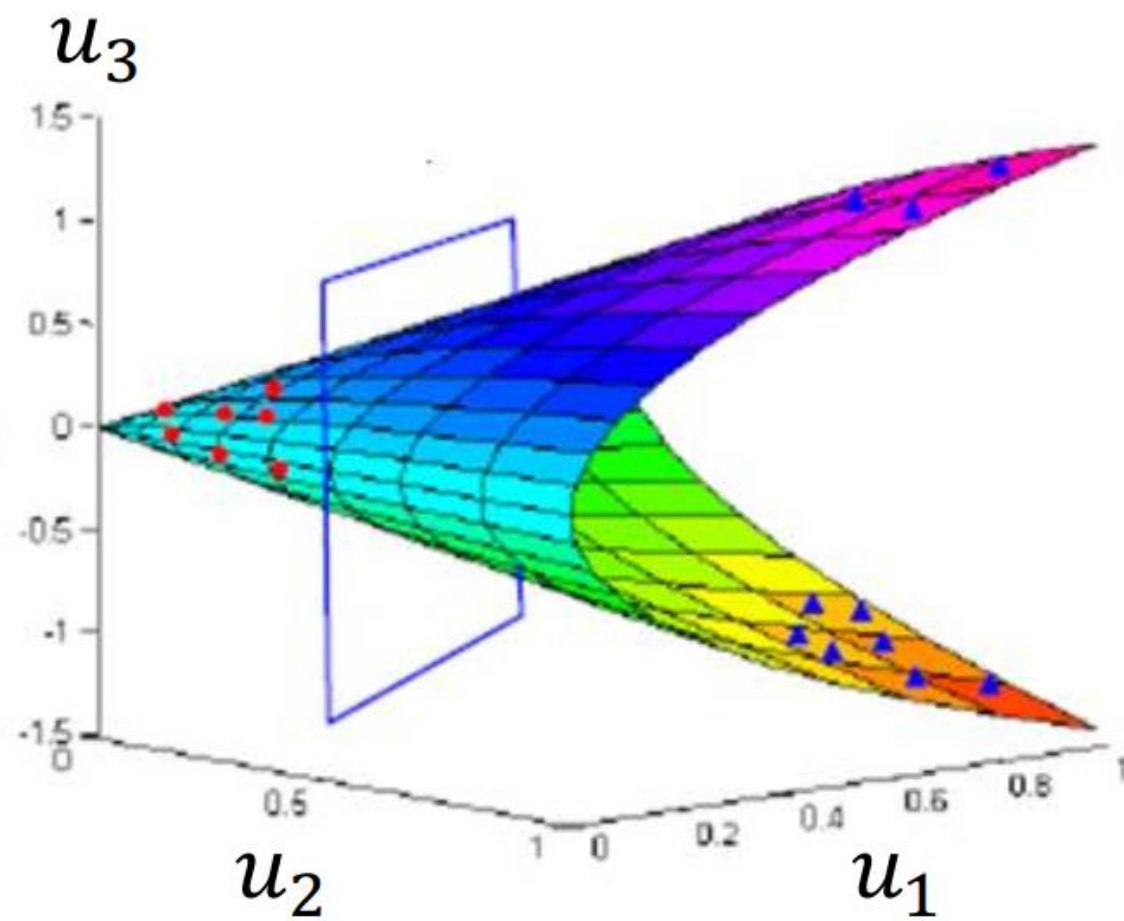
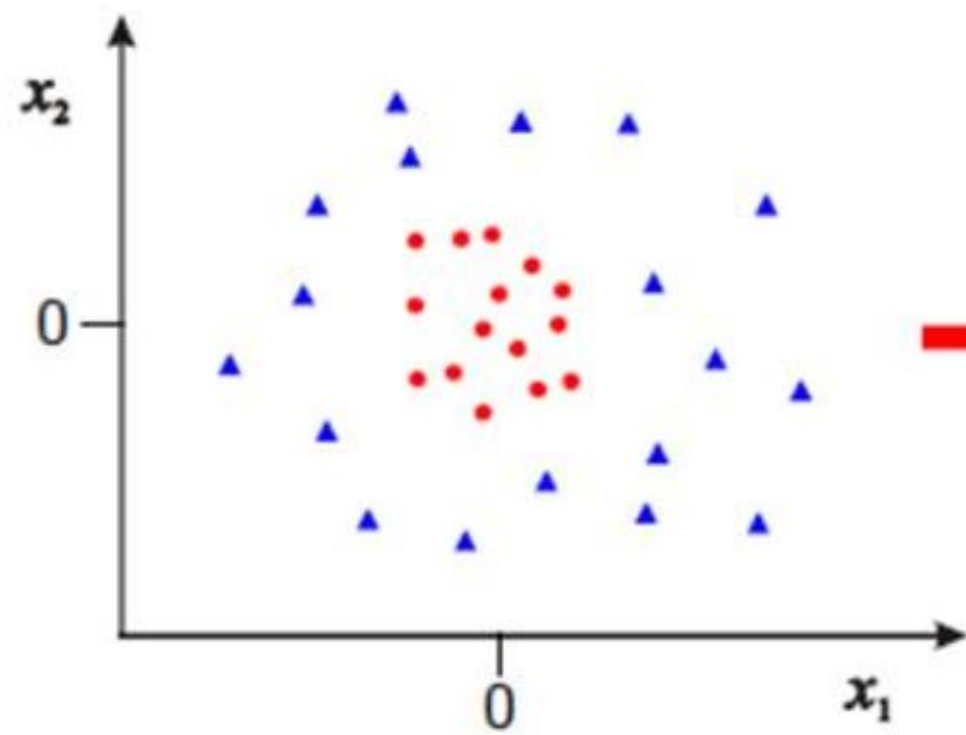
- Il existe une infinité de limites de décision qui séparent les points de données positifs des points de données négatifs.
- L'algorithme SVM cherche à trouver **la frontière de décision (hyperplan) avec le maximum de marge**. Cette frontière minimise la limite supérieure de l'erreur de classification.

Exercice01- solution

3. Nous savons que les frontières de décision ne sont pas linéaires pour la plupart des ensembles de données réelles. Comment traiter cette non-linéarité est-elle par les SVM?

Solutions

- ✓ L'idée est de transformer **les données d'entrée non linéairement** séparables en **un autre espace** (généralement de plus grande dimension).
- ✓ Une frontière de décision linéaire peut séparer des exemples positifs et négatifs dans l'espace transformé.
- ✓ L'espace transformé est appelé **l'espace des caractéristiques**.
L'espace de données d'origine est appelé **l'espace d'entrée**.



Exercice01- solution

Résumer les principaux avantages et limites des algorithmes SVM.

Principaux avantages des algorithmes SVM

- ✓ Ils ont des bases théoriques rigoureuses.
- ✓ Effectue la classification plus précisément que la plupart des autres méthodes dans les applications, en particulier pour les données de grande dimension
- ✓ Ils peuvent également être appliqués aux problèmes de classification non linéaire en utilisant les fonctions du noyau (L'astuce des noyaux permet que ces problèmes soient calculables).
- ✓ Différents noyaux peuvent être branchés dans le même système d'apprentissage et étudiés indépendamment de celui-ci.

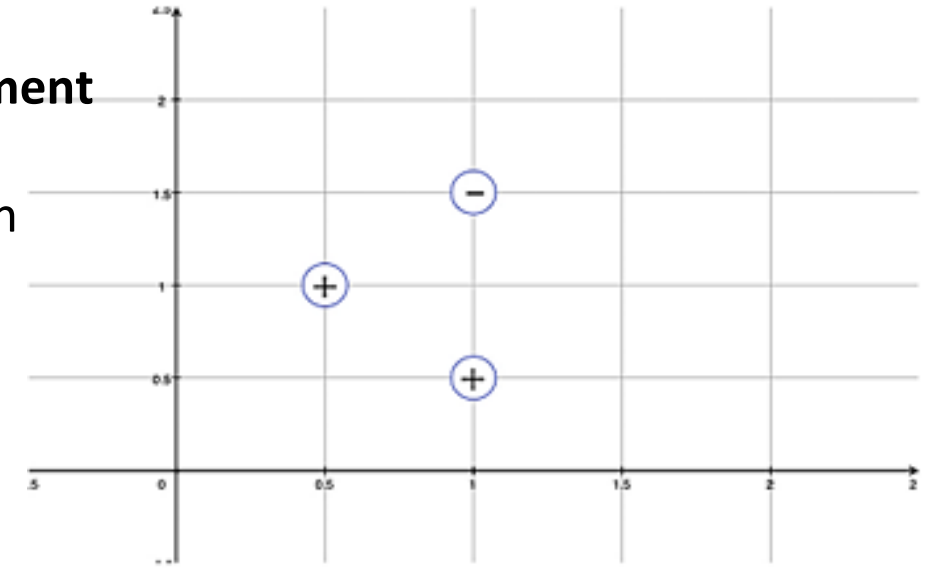
Principales limites des algorithmes SVM:

- Fonctionne uniquement dans un espace réel.
- Pour un attribut discret, nous devons convertir ses valeurs discrètes en valeurs numériques.
- Ne fait que la classification binaire (à deux classes). Pour les problèmes multi-classes, certaines stratégies peuvent être appliquées, par exemple, la classification un- versus-tous.
- L'hyperplan produit par SVM est difficile à comprendre par les utilisateurs humains.
- SVM est couramment utilisé dans des applications qui ne nécessitent pas de compréhension humaine.

Exercice01- solution

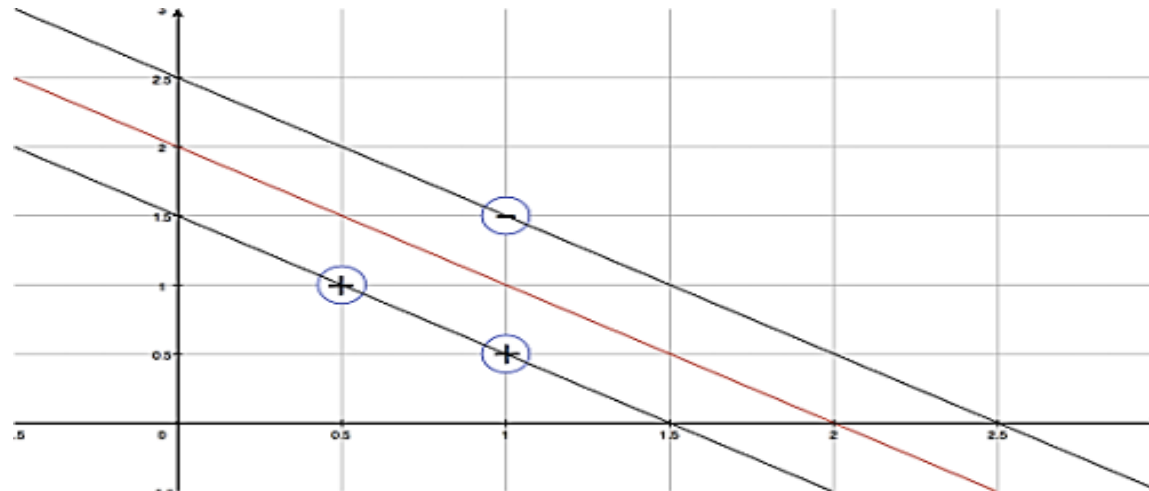
5. Considérons les trois vecteurs d'entrée bidimensionnels linéairement séparables de la figure suivante.

Trouvez le SVM linéaire qui sépare de manière optimale les classes en maximisant la marge,



SOLUTIONS:

Les trois points de données **sont des vecteurs de support**. L'hyperplan de marge est la ligne passant par les deux points positifs. L'hyperplan de marge H^- est la ligne passant par le point négatif parallèle à H^+ . La frontière de décision est la droite rouge entre H^- et H^+ . L'équation de la frontière de décision est $-x + 2 = 0$.



Exercice01- solution

Démontrer pour la fonction du noyau polynomial $k(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ suivante

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \rangle + v)^d, d = 2, v = 1, \mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{z} = (z_1, z_2)$$

$$\text{que : } K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \langle \Phi(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{z}) \rangle, \text{ avec } \Phi(\mathbf{y}) = (1, \sqrt{2}y_1, \sqrt{2}y_2, y_1^2, y_2^2, \sqrt{2}y_1y_2)$$

SOLUTION

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \rangle + 1)^2 = (\langle (x_1, x_2) \cdot (z_1, z_2) \rangle + 1)^2 = (x_1z_1 + x_2z_2 + 1)^2$$

$$= x_1^2z_1^2 + x_2^2z_2^2 + 2x_1z_1x_2z_2 + 2x_1z_1 + 2x_2z_2 + 1$$

$$\langle \Phi(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{z}) \rangle = \langle (1, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2, x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2) \cdot (1, \sqrt{2}z_1, \sqrt{2}z_2, z_1^2, z_2^2, \sqrt{2}z_1z_2) \rangle$$

$$= 1 + \sqrt{2}x_1\sqrt{2}z_1 + \sqrt{2}x_2\sqrt{2}z_2 + x_1^2z_1^2 + x_2^2z_2^2 + \sqrt{2}x_1x_2\sqrt{2}z_1z_2$$

$$= 1 + 2x_1z_1 + 2x_2z_2 + x_1^2z_1^2 + x_2^2z_2^2 + 2x_1x_2z_1z_2 \text{ CQFD.}$$

Exercice 2

On considère quatre vecteurs supports :

$$v_1 = (-1, 1), v_2 = (2, 0), v_3 = (1, -1), v_4 = (0, 2)$$

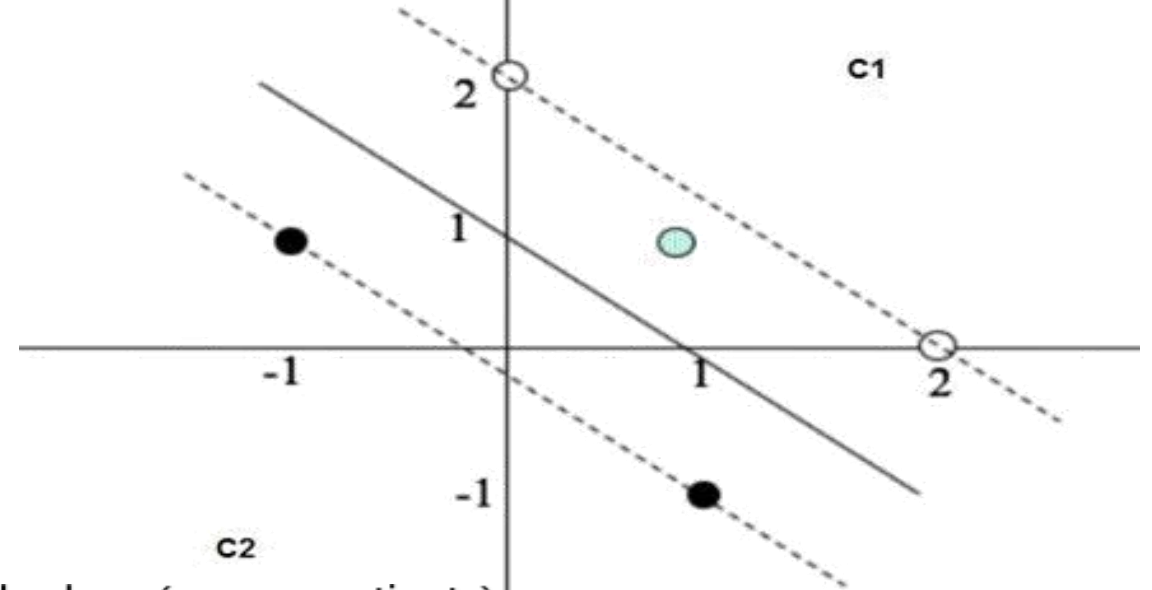
Les coefficients α_i (multiplicateurs de Lagrange) et le biais w_0 sont donnés par :

$$\alpha_1 = -0.5, \alpha_2 = 0.5, \alpha_3 = -0.5, \alpha_4 = 0.5, w_0 = -1$$

1. Tracer un **graphique des vecteurs supports**, ainsi que **l'hyperplan séparateur** et **les marges** qu'ils définissent (*pas besoin de trouver l'équation de l'hyperplan pour cette question*).
2. Donner la classification SVM pour le nouvel exemple $x = (1, 1)$.
3. Trouver le vecteur des poids w de l'hyperplan séparateur.
4. À l'aide de w (trouvé en 3) et de w_0 , donner l'équation de l'hyperplan séparateur sous la forme $w^T x + w_0 = 0$. Quelle est sa pente ?

- Solution :

1. Graphe des vecteurs de support, Hyperplan et de la marge :



2. La classification SVM de la nouvelle instance $x = (1, 1)$:

D'après le graphe ci-dessus, on peut voir directement que la donnée x appartient à la classe C1.

- 3) Calcul du vecteur des poids w

Formule : $w = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i x_i$.

$$w = (0.5 + 1 - 0.5 + 0, -0.5 + 0 + 0.5 + 1)$$

$$w = (1, 1)$$

- 4) Équation de l'hyperplan séparateur

Forme :

$$w^T x + w_0 = 0$$

Avec $w = (1, 1)$ et $w_0 = -1$:

$$x_1 + x_2 - 1 = 0$$

Donc l'hyperplan est :

$$x_1 + x_2 = 1$$

Pente de l'hyperplan

On met sous forme $x_2 = ax_1 + b$

$$x_2 = -x_1 + 1$$

Donc la pente :

$$a = -1$$