Introduction à la Méthode des Éléments Finis (FEM)

Application au Transfert de Chaleur 1D

1 Introduction

La méthode des éléments finis (FEM) est une technique numérique largement utilisée pour résoudre des équations différentielles en ingénierie. Dans ce cours, nous présentons une application simple au transfert de chaleur unidimensionnel afin de faciliter la compréhension des concepts fondamentaux.

2 Problème physique

On considère une barre de longueur L, soumise à une conduction thermique en régime stationnaire, sans source interne.

Conditions aux limites

- $T(0) = T_0$
- $T(L) = T_L$

Équation gouvernante

$$-\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

où :

- $T(x)$: température
- k : conductivité thermique

3 Forme faible

On multiplie l'équation par une fonction test $v(x)$ et on intègre :

$$\int_0^L k\frac{dT}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = 0 \tag{2}$$

Cette formulation est appelée **forme faible** et constitue la base de la méthode FEM.

4 Discrétisation du domaine

On divise la barre en deux éléments :

$$x = 0 \quad - - - \quad x = \frac{L}{2} \quad - - - \quad x = L$$

Les nœuds sont :
— T_1 à $x = 0$
— T_2 à $x = L/2$
— T_3 à $x = L$

5 Matrice élémentaire

Pour un élément de longueur h, la matrice élémentaire est :

$$K^e = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

6 Assemblage global

Après assemblage des deux éléments, on obtient :

$$K = \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

7 Conditions aux limites

On impose :
— $T_1 = T_0$
— $T_3 = T_L$
Il reste une seule inconnue : T_2.

8 Résolution

L'équation au nœud central est :

$$-T_1 + 2T_2 - T_3 = 0 \tag{5}$$

On obtient :

$$T_2 = \frac{T_1 + T_3}{2} \tag{6}$$

9 Interprétation du résultat

La solution obtenue est **linéaire**, ce qui correspond exactement à la solution analytique du problème.

10 Conclusion

La méthode des éléments finis suit les étapes suivantes :

1. Passage à la forme faible
2. Discrétisation du domaine
3. Construction des matrices élémentaires
4. Assemblage global
5. Application des conditions aux limites
6. Résolution du système

Remarque pédagogique : Cet exemple simple constitue une base essentielle avant de traiter des cas plus complexes (2D, instationnaire, avec source).