الفصل الخامس: مقاييس الإلتواء و التفلطح

الفصل الخامس:مقاييس الالتواء والتفلطح

عند رسم المنحنى التكراري للبيانات نصادف عدة أنواع من الأشكال،كل شكل يوحي بطبيعة معينة لتوزيع تلك البيانات، الشيء الذي يجعل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وحدها لا تكفي لتحليلها. ومن الأشكال التي يمكن مصادفتها: التماثل التام، الالتواء، والتفلطح.

I. التماثل التام:

قد يكون المنحنى التكراري متماثلا بحيث يكون الشق الأيسر مماثلا تماما للشق الأيمن وفي هذه الحالة تكون قيم المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال متساوية.

$$\overline{X} = Me = Mo$$

نقول أن التوزيع التكراري ذو تماثل تام إذا توفرت الشروط التالية:

تكرارات الفئة التي تقل عن القيمة المركزية مساوية للتكرارات التي تزيد عنها (أي الفرق بين القيم الموجودة قبل منتصف السلسلة يساوي الفرق بين القيم التي بعد المنتصف).

الفرق بين كل فئة الفئة التي تليها متساوي.

الوسط الحسابي يساوي المنوال ويساوي الوسيط.

مثال:

أثبت تماثل البيانات التالية:

x_i	n_i
10	2
12	3
14	المنتصف ← 5
16	3
18	2
Σ	**15**

لإثبات ذلك لابد أن نتأكد من شروط التماثل الثاني.

- **الشرط الأول:**

$$\overline{X} = 14\,, \qquad Me = 14, \qquad Mo = 14$$

$\overline{X} = Me = Mo = 14$ وعليه فإن الشرط الأول محقق.

- **الشرط الثاني:**

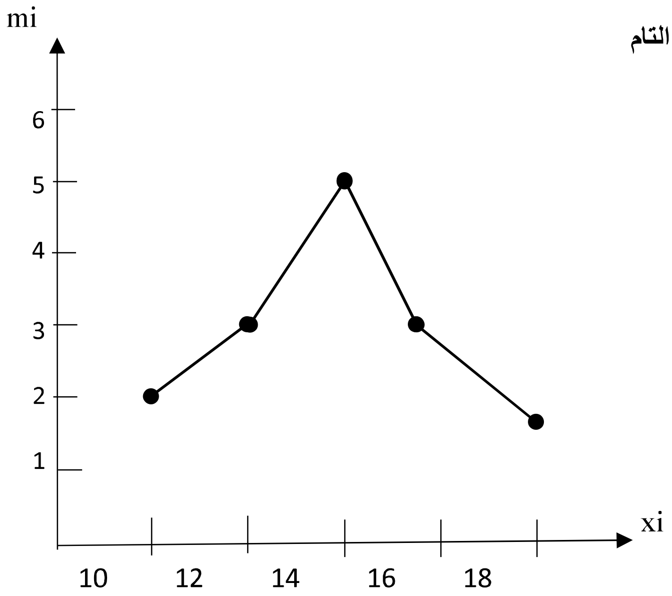
التكرارات التي تقل عن الوسط الحسابي، تساوي تلك التي تزيد عنه، وهذا الشرط محقق أيضا.

❖ **الشرط الثالث:**

الفرق بين كل فئة x_i والفئة التي تليها متساوي، وتساوي 2.

← وبالتالي فإن التوزيع المشار إليه تام التماثل وذلك ما يوضحه الشكل الموالي:

الشكل (5-1): التماثل التام



إن التوزيعات المتماثلة نادرة، بينما التوزيعات الغير متماثلة فهي كثيرة المصادفة وتعرف بالتوزيعات الملتوية.

II. الالتواء:

الحالة الثانية التي يمكن مصادفتها عند رسم المنحنى التكراري هي عدم التماثل، وهي الحالة التي لا تتوافر فيها شروط التماثل كما هي موضحة في الشكل السابق، وعندها نقول أن التوزيع ملتو إما إلى اليمين أو إلى اليسار. ويقاس الالتواء بعدة مقاييس منها ما يلي:

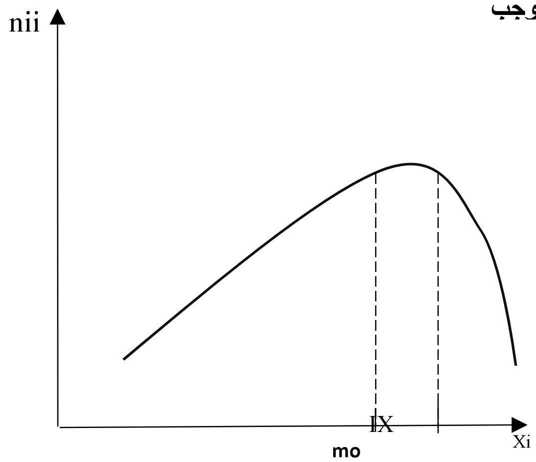
1. قيمة الالتواء:

لمعرفة قيمة التواء ظاهرة ما يتم استخدام المعادلة التالية:

$$VA = \overline{X} - Mo$$

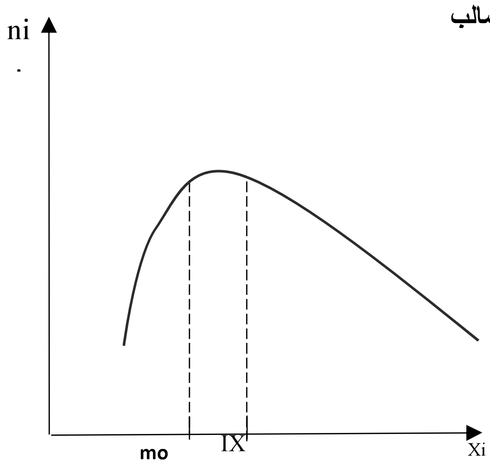
إذا كان $Mo > \overline{X}$ ، يكون التوزيع سالب الالتواء وفي هذه الحالة يكون المنحنى التكراري ممتد إلى اليسار. كما هو موضح في الشكل:

الشكل (5-2):الإلتواء الموجب



أما إذا كان $\overline{X} < Mo$، فيكون الالتواء موجب، في هذه الحالة المنحنى يكون ممتدا إلى اليمين كما في الشكل التالي:

الشكل (5-3): الإلتواء السالب



2. معامل بيرسون للالتواء:

إن قيمة الالتواء لا تسمح بمقارنة التواء ظاهرتين مختلفتين أو أكثر نتيجة لاختلاف وحدات القياس. لذلك يتم استخدامها يسمى بمعامل بيرسون للالتواء الذي يعطي بالمعادلتين التاليتين:

معامل الالتواء باستخدام المنوال ← $\boxed{\propto_1 = \frac{\overline{X} - Mo}{\sigma}}$

معامل الالتواء باستخدام الوسيط ← $\boxed{\propto_2 = \frac{3(\overline{X} - Me)}{\sigma}}$

ويكون معامل الالتواء محصورا بين -1 و +1.

إذا كان موجبا دل على أن التوزيع يمتد إلى اليمين، أما إذا كان سالبا دل على أن التوزيع يمتد إلى اليسار.

أما إذا كان معدوما فيدل على أن الشكل متماثل.

➢ ***مثال:*** الجدولين التاليين يظهران توزيع مجموعة من العمال حسب الأجور الشهرية التي يتقاضونها بآلاف الدينارات في المؤسستين أ و ب.

المؤسسة أ

الأجور	عدد العمال
100	1
110	8
130	5
170	4
190	2
Σ	**20**

المؤسسة ب

الأجور	عدد العمال
160	2
200	4
250	5
270	8
300	1
Σ	**20**

1- أوجد قيمة الالتواء لكل توزيع.

2- أوجد معامل بيرسون للالتواء.

3- قارن بين التواء التوزيعين. اثبت النتيجة أيضا بالرسم.

➢ ***الحل:***

➢ المؤسسة ب:

1-قيمة الالتواء:

$$VA_1 = \overline{X_1} - Mo_1$$

$$* \overline{X_1} = 134{,}5$$

$$* Mo_1 = 110$$

$$\rightarrow VA_1 = 134{,}5 - 110 = \boxed{24{,}5}$$

$0 < VA_1$ ← التواء موجب نحو اليمين.

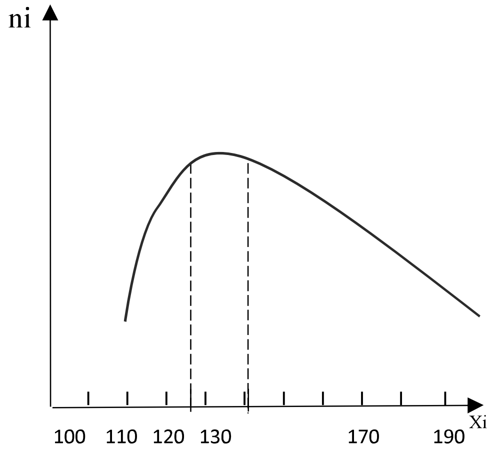
2- معامل بيرسون للالتواء:

$$\propto_1 = \frac{\overline{X} - Mo}{\sigma}$$

$$* \sigma_1 = 29{,}41$$

$$\propto_1 = \frac{134{,}5 - 110}{29{,}41} = \mathbf{0.83}$$

$0 < \propto_1$ ← التواء موجب نحو اليمين وهو أكثر التواء من التوزيع الثاني.



المؤسسة ب:

1-قيمة الالتواء:

$$VA_2 = \overline{X_2} - Mo_2$$

$$* \overline{X_2} = 241{,}5$$

$$* Mo_2 = 270$$

$$\rightarrow VA_2 = 241{,}5 - 270 = -28{,}5$$

$0 > VA_2$ ← التواء سالب نحو اليسار.

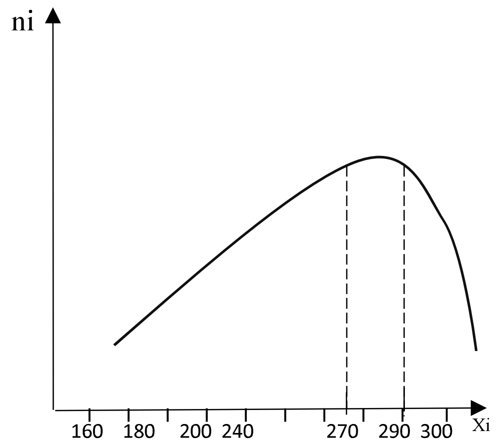
2- معامل بيرسون للالتواء:

$$\propto_2 = \frac{\overline{X} - Mo}{\sigma}$$

$$* \sigma_2 = 39{,}02$$

$$\propto_2 = \frac{241{,}5 - 270}{39{,}02} = \mathbf{-0,75}$$

$0 > \propto_2$ ← التواء سالب نحو اليسار.



3. معامل الالتواء العزمي (معامل بيرسون باستعمال العزوم) (Les moments)

أ- العزم الرائي حول الصفر:

❖ **بيانات غير مبوبة:**

إذا كان لدينا n من المشاهدات تابعة للمتغير x فإن العزم الرائي حول الصفر هو $\overline{X}_r = \frac{\sum {x_i}^r}{n}$

فالعزم الأول حول الصفر هو الوسط الحسابي: $\overline{X}_1 = \frac{\sum {x_i}^1}{n} = \overline{X}$

العزم الرائي الثاني حول الصفر هو: $\overline{X}_2 = \frac{\sum {x_i}^2}{n}$

❖ **بيانات مبوبة:**

$$\overline{X}^r = \frac{\sum {x_i}^r n_i}{\sum n_i}$$

$$n = 1 \ \rightarrow \overline{x} = \frac{\sum {x_i}^r n_i}{\sum n_i}$$

$$r = 2 \ \rightarrow \overline{x}_2 = \frac{\sum {x_i}^2 n_i}{\sum n_i}$$

ب- العزم الرائي حول الوسط الحسابي:

❖ **بيانات غير مبوبة:**

العزم الرائي حول الوسط الحسابي هو:

$$m_r = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^r}{n}$$

$$* \, m_1 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^r}{n} = 0$$

$$* \, m_2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n} = V(x)$$

❖ **بيانات مبوبة:**

$$m_r = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^r n_i}{\sum n_i}$$

ج- **معامل الالتواء العزمي:**

معامل الالتواء العزم هو النسبة بين مربع العزم الثالث ومكعب العزم الثاني لتلك البيانات أي:

$$\boxed{\propto_3 = \frac{{m_3}^2}{{m_2}^3}}$$

حيث m_2 العزم من الدرجة 2 و m_3 العزم من الدرجة 3.

يستخدم هذا المعامل إذا كان التوزيع وحيد المنوال. وتنحصر قيمته أيضا بين -1 و +1،ه وتدل الإشارة على اتجاه التوزيع أي:

- $\propto_3 = 0$: توزيع متماثل.
- $\propto_3 > 0$: توزيع موجب نحو اليمين.
- $\propto_3 < 0$: توزيع سالب نحو اليسار.

4. **معامل فيشر للالتواء:**

يعطى معامل فيشر للالتواء بالعلاقة التالية:

$$\boxed{\propto_F = \frac{m_3}{\sigma^3}}$$

حيث m_3 العزم من الدرجة الثالثة و σ هو الانحراف المعياري.

يعتمد على العزم الرائي من الدرجة الثالثة بشكل خاص في حساب معامل فيشر للالتواء، لأن قيمته في حال توزيع متماثل (متناظر) تساوي الصفر ($m_3 = 0$)، وبناءا على هذه القيمة يتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

إذا كان F=0، فإن منحنى التوزيع يكون متماثل.

إذا كان F>0، فإن منحنى التوزيع يكون مائل لليمين.

إذا كان F<0، فإن منحنى التوزيع يكون مائل لليسار.

5. **معامل يول للالتواء (Yule - Kundhal):**

يسمى أيضا معامل الالتواء الربيعي وهو يعطى بالمعادلة التالية:

$$\propto_{yk}=\frac{(Q_3-Q_2)-(Q_2-Q_1)}{(Q_3-Q_1)}$$

$$=\frac{Q_3+Q_1-2Q_2)}{(Q_3-Q_1)}$$

ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

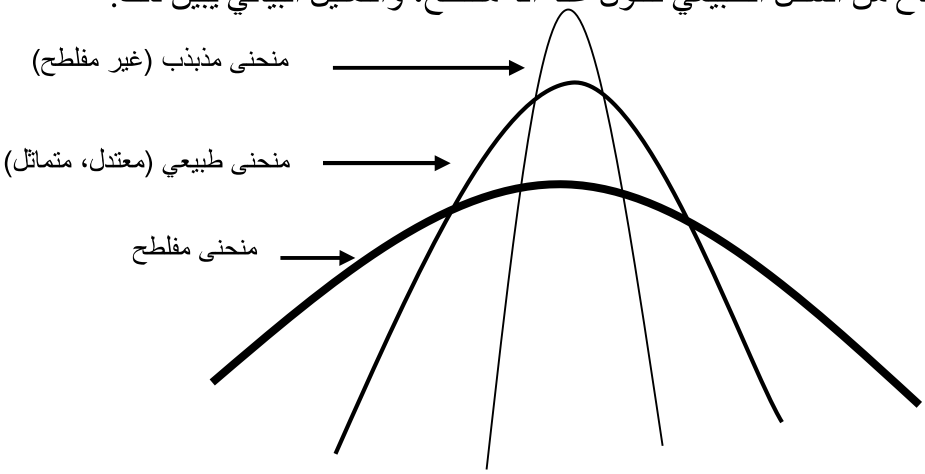
إذا كان $\propto_{yk}=0$، فإن منحنى التوزيع يكون متماثل.

إذا كان $\propto_{yk}>0$، فإن منحنى التوزيع يكون مائل لليمين.

إذا كان $\propto_{yk}<0$، فإن منحنى التوزيع يكون مائل لليسار.

III. **التفلطح:**

التفلطح هو قياس درجة علو التوزيع بالنسبة للتوزيع الطبيعي، أي يقصد به مدى اتساع أو ضعف منحنى التوزيع، فكلما كان الشكل أكثر ارتفاع من الشكل الطبيعي، نقول أن الشكل مذبذب (غير مفلطح). أما إذا كان أقل ارتفاع من الشكل الطبيعي فنقول عنه أنه مفلطح، والتمثيل البياني يبين ذلك:



ويقاس التفلطح بأحد المعاملات التالية:

1. **معامل بيرسون للتفلطح:**

يعطى بالعلاقة التالية:

$$\boxed{\beta_p=\frac{m_4}{\sigma^4}}$$

ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

إذا كان $\beta_p = 3$، فإن منحنى التوزيع يكون معتدل (متماثل).

إذا كان $\beta_p > 3$، فإن منحنى التوزيع يكون مذبذب.

إذا كان $\beta_p < 3$، فإن منحنى التوزيع يكون مفلطح.

2. **معامل فيشر للتفلطح:**

$$\boxed{\beta_F = \beta_p - 3}$$

ويتم تحديد شكل التوزيع كما يلي:

إذا كان $\beta_F = 0$، فإن منحنى التوزيع يكون متماثل (متوسط التفلطح): منحنى التوزيع التكراري الطبيعي، أي غير متشتت كثيرا ولا متمركز كثيرا.

إذا كان $\beta_F > 0$، فإن منحنى التوزيع يكون مذبذب: منحنى التوزيع التكراري متطاول (قمّة حادّه) أي تشتت ضعيف.

إذا كان $\beta_F < 0$، فإن منحنى التوزيع يكون مفلطح: منحنى التوزيع التكراري مفلطح (قمّة منبسطة)، أي تشتت قوي.