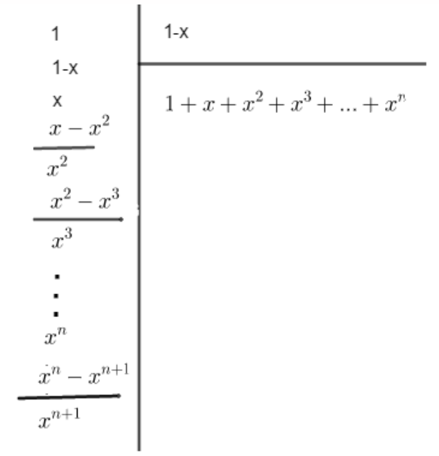
الفصل الخامس : النشر المحدود

مقدمة 1.0.0: ليكن التابع f حيث: $f(x)=\frac{1}{1-x}\ ,\ (x\neq 1)$.
لنستعمل القسمة الإقليدية حسب القوى المتزايدة



نلاحظ أننا تحصلنا على كتابة للدالة $\frac{1}{1-x}$ على شكل كثير حدود + باقي.
يسمى $1+x+x^2+...+x^n$ النشر المحدود لـ $\frac{1}{1-x}$ في جوار الصفر.
يسمى x^{n+1} باقي النشر .

0.1 النشر المحدود في جوار الصفر

تعريف 1.1.0: ليكن f تابع معرف في جوار الصفر (قد يكون غير معرف عند الصفر).
نقول أن f يقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار الصفر (0) إذا وجد مجال مفتوح I مركزه الصفر(0) ووجدت ثوابت $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ تحقق:

$$\forall 0\neq x\in I : f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+,...,+a_nx^n+x^n\varepsilon(x)$$

حيث: ε تابع معرف على I يحقق: $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$
ونكتب أيضا: $\forall 0\neq x\in I : f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+,...,+a_nx^n+0(x^n)$
نسمي كثير الحدود: $p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+,...,+a_nx^n$ الجزء العادي للنشر .
نسمي $x^n\varepsilon(x)$ ($0(x^n)$) الباقي أو الحد المكمل لهذا النشر .

ملاحظات

1. يمكن إستخدام ترميز لاندو و ذلك بأن نضع: $0(x^n)=x^n\varepsilon(x)$
2. إذا كان f يقبل نشرا محدودا في جوار 0 فإن: $\lim_{x\to 0}f(x)=a_0$

بمعنى حتى يكون النشر المحدود لـ f موجودا في جوار 0 من اللازم أن تؤول f إلى نهاية منتهية لما يؤول x إلى الصفر، إن هذا لايستلزم إستمرار f عند الصفر لأن $f(0)$ قد يكون غير موجود،

أما إذا كان $f(0)=a_0$ نستطيع كتابة:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+,...,+a_nx^{n-1}+x^{n-1}\varepsilon(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=a_1$$

وهنا يتبين لنا أن f ليس فقط مستمر بل يقبل الإشتقاق عند الصفر (0).

$\boxed{3}$ رتبة نشر محدود تتعلق بالباقي $(R_n(x)=x^n\varepsilon(x))$ وليس بدرجة كثير الحدود النظامي p_n التي يمكن أن تكون أقل تماما من n فمثلا: $f(x)=x^4+x^3\varepsilon(x)$ يمثل نشرا محدودا من الرتبة 3 وليس 4 لأنه يمكن كتابة f على الشكل $f(x)=x^3(x+\varepsilon(x))=0+x^3(x+\varepsilon(x))=x^3\varepsilon_1(x)$ حيث: $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$ و كثير الحدود المرفق لهذا النشر (الجزء النظامي) معدوم.

نظرية 1.1.0:
إذا قبل f نشرا محدودا في جوار الصفر (0) فإن هذا النشر وحيد.

برهان. (نبرهن بالخلف) □

ملاحظة

إذا كان $f\in C^n(V(0))$ فإن f يقبل نشرا محدودا وحيدا هو نشر ماك لوران (نشر تايلور في جوار الصفر) .
لكن العكس غير صحيح إذ يمكن أن يكون النشر المحدود موجودا في حين لا يمكن تطبيق دستور ماك لوران.
بمعنى أخر إذا لم يكن هناك ما يضمن لنا وجود المشتقات فإننا لا نستطيع إستنتاج وجودها من وجود النشر المحدود، أما وجود نشر ماك لوران يستلزم أن كل نشر أخر يكون مطابقا له.

أمثلة:

مثال:01

التابع : $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ يقبل الأشتقاق مالانهاية مرة على $\mathbb{R}-\{1\}$ ولدينا من أجل $n\geq 0$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+,...,+x^n+x^n\varepsilon(x)\quad / \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

إذا:

$$\forall n\geq 0: f^{(n)}(0)=n!$$

مثال:02

ليكن f تابع حيث: $f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \wedge & \\ x^{n+1}\sin\frac{1}{x^{n+1}}, & x\neq 0\end{cases}$، التابع f يقبل النشر المحدود التالي:

$$f(x)=0+0.x+0.x^2+0.x^3+0.x^4+,...,+0.x^n+x^n\varepsilon(x)$$

حيث:

$$a_0=a_1=a_2=a_3=a_4=...=a_n=0$$

في حين أن f غير مستمر عند الصفر (0).

مثال:03

ليكن g تابع حيث: $g(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \wedge & \\ x^{n+1}\sin\frac{1}{x^{n+1}}, & x\neq 0\end{cases}$، التابع g يقبل نشرا محدودا مطابقا للنشر المحدود لـ f السابق (المثال:02)، لكن التابع g هذه المرة مستمر $x=0=a_0$ $\left(\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^{n+1}\sin\frac{1}{x^{n+1}}=0\right)$، بل إنه يقبل الإشتقاق :

$$g'(x)=\begin{cases}0=a_0, & x=0 & (1)\\ \wedge & & \\ (n+1)x^n\sin\frac{1}{x^{n+1}}-\frac{n+1}{x}\cos\frac{1}{x^{n+1}}, & x\neq 0 & (2)\end{cases}$$

وبما أن g' في الحالة (2) لا يقبل نهاية لما $x\to 0$ فإن المشتقات $g^{(k)}(0), k\geq 2$ غير موجودة .

نتيجة 1.1.0:

1 إذا كان f تابعا زوجيا فإن معاملات كثير الحدود الفردية معدومة

$$a_1=a_3=...=a_{2n+1}=0 \quad , \quad n\in\mathbb{N}$$

2 إذا كان f تابعا فرديا فإن معاملات كثير الحدود الزوجية معدومة

$$a_0=a_2=...=a_{2n}=0 \quad , \quad n\in\mathbb{N}$$

أمثلة:

مثال01: النشر المحدود للدالة الزوجية cos في جوار الصفر هو:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o\left(x^{2n}\right)$$

مثال02 : النشر المحدود للدالة الفردية sin في جوار الصفر هو:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

الحصول على النشر المحدود بإستعمال نشر ثايلور - يونغ

نظرية 2،1،0: (دستور ثايلور) ليكن f عنصرا من $C^n([a,b] \longrightarrow \mathbb{R})$ ، لنفض أن $f^{(n+1)}$ موجود على $[a,b]$ عندئذ يوجد $c \in]a,b[$ حيث:

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

نسمي العبارة : $f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$ الجزء النظامي ذا الرتبة n لنشر ثايلور للدالة f .

وتسمى العبارة: $R_n(a,b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ باقي لاغرونج من الرتبة n .

صيغ أخرى لدستور ثايلور :

1. إذا وضعنا $b = a + h$ يكتب العدد c على النحو $c = a + \theta h$ مع $0 < \theta < 1$ عندئذ يصبح دستور ثايلور على النحو التالي:

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

تسمى العبارة : $R_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$ بباقي كوشي.

2. إذا كتبنا دستور ثايلور من أجل $a = 0$.

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \;,\; \theta \in]0,1[$$

فإننا نحصل على دستور ماك - لوران (من الرتبة $n+1$ بباقي لاغرونج).

0.2 عمليات على النشر المحدود

نشير إلا أنه حتى لو كان تطبيق دستور ماك لوران - يونغ ممكننا من الناحية النظرية، فإن هذا الدستور لايليق من الناحية العملية إلا إذا تمكنا بسرعة من حساب الشتقات المتوالية لـ التابع f عند القيمة 0

إن ما نقوم به عادة هو إنشاء نشور جديدة إنطلاقا من النشور السابقة بواسطة عمليات جبرية والمكاملة أو الإشتقاق.

1 الجمع:

لتكن f و g دالتين قابلتين للنشر المحدود في جوار الصفر من الرتبة n و A، B كثيري حدود.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=A(x)+0(x^n) \\ g(x)=B(x)+0(x^n) \end{array}\right\} \Rightarrow (f+g)(x)=A(x)+B(x)+0(x^n)$$

مثال

كتابة النشر المحدود من الرتبة 3 في جوار الصفر للدالة f حيث: $f(x)=\exp(x)+\cos(x)$.

لدينا النشر المحدود من الرتبة n للدالة exp في جوار الصفر هو:

$$e^x \underset{0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+0(x^n)$$

وبالتالي من الرتبة 3 هو :

$$e^x \underset{0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+0\left(x^3\right)$$

ولدينا النشر المجدود من الرتبة n للدالة cos في جوار الصفر هو:

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}$$

وبالتالي من الرتبة 3 هو:

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+0\left(x^3\right)$$

$$f(x) \underset{0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+1-\frac{x^2}{2}+0\left(x^3\right)=2+x+\frac{x^3}{6}+0\left(x^3\right)$$

لنحسب مثلا : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x-2}{x}$

نلاحظ وجود حالة عدم التعيين $\left(\frac{0}{0}\right)$ لإزالتها نستعمل النشر المحدود للدالتين exp، cos في جوار الصفر

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x-2}{x} \underset{0}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2+x+\frac{x^3}{6}+0\left(x^3\right)-2}{x} \underset{0}{=} \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2}{6}+0\left(x^2\right)\right)=1$$

2 الضرب:

لتكن f و g دالتين قابلتين للنشر المحدود في جوار الصفر من الرتبة n و A، B كثيري حدود.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=A(x)+0(x^n) \\ g(x)=B(x)+0(x^n) \end{array}\right\} \Rightarrow (f.g)(x)=A(x)B(x)+0(x^n)=C(x)+0(x^n)$$

حيث: C هي مجموع الحدود ذات الدرجة أقل من أو تساوي n.

مثال

كتابة نشر محدود من الرتبة 3 في جوار الصفر للدالة f حيث: $f(x)=\exp(x)\sin(x)$.
لدينا النشر المحدود من الرتبة 3 في جوار الصفر للدالة exp هو:

$$e^x \underset{0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+0\left(x^3\right)$$

ولدينا النشر المحدود من الرتبة 3 في جوار الصفر للدالة sin هو:

$$\sin x \underset{0}{=} x-\frac{x^3}{3!}+0\left(x^3\right)$$

$$\exp(x)\sin(x) \underset{0}{=} \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+0\left(x^3\right)=x+x^2+\frac{x^3}{3}+0\left(x^3\right)$$

لنحسب مثلا : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp(x).\sin(x)}{x}$
نلاحظ وجود حالة عدم التعيين $\left(\frac{0}{0}\right)$ لإزالتها نستعمل النشر المحدود للدالتين exp، sin

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+0\left(x^2\right)}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x+0(x))=1$$

---

3 **القسمة :**
لتكن f و g دالتين قابلتين للنشر المحدود في جوار الصفر من الرتبة n و A، B كثيري حدود.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=A(x)+0(x^n) \\ g(x)=B(x)+0(x^n) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{A(x)}{B(x)}+0(x^n)=D(x)+0(x^n)$$

حيث: D هي مجموع الحدود ذات الدرجة أقل من أو تساوي n والذي نحصل عليه بإستعمال القسمة الإقليدية حسب القوى المتزايدة (نتوقف عند الرتبة n) .

مثال

كتابة النشر المحدود من الرتبة 5 في جوار الصفر للدالة f حيث: $f(x)=\tan(x)$.

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+0\left(x^5\right)}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+0\left(x^5\right)}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+0\left(x^5\right)$$

0.3 النشر المحدود لتابع مركب

قضية 1.3.0: ليكن f ، g تابعان قابلتان للنشر المحدود في جوار الصفر من الرتبة n ، و ليكن A ، B الجزئين العاديين (النظاميين) لنشريهما على التوالي.
إذا كان $g(0)=0$ فإن التابع المركب $f\circ g$ يقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار 0 ونتحصل على جزئه العادي بنقل الجزء العادي لنشر g إلى الجزء العادي لنشر f والإحتفاظ فقط بالحدود ذات الدرجة أقل من أو يساوي n .

أمثلة:

مثال 01 : كتابة النشر المحدود من الرتبة 3 في جوار 0 للدالة f حيث: $f(x)=\exp\left(x^2+x\right)$.

نضع: $g(x)=x^2+x$, $f(x)=\exp(x)$ ، نلاحظ أن: $g(0)=0$.

لدينا: $\exp(y)\underset{0}{=}1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3!}+0\left(y^3\right)$ ، لنضع: $y=x^2+x$.

$$e^y\underset{0}{=}1+\left(x^2+x\right)+\frac{\left(x^2+x\right)^2}{2}+\frac{\left(x^2+x\right)^3}{3!}+0\left(\left(x+x^2\right)^3\right)$$

$$e^{\left(x+x^2\right)}\underset{0}{=}1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{6}x^3+0\left(x^3\right)$$

مثال 02: كتابة النشر المحدود من الرتبة 3 في جوار 0 للدالة f حيث: $f(x)=\exp(\cos(x))$.

نضع: $g(x)=\cos(x)$, $f(x)=\exp(x)$ ، نلاحظ أن: $\cos(0)=1\neq 0$

لدينا: $e^{\cos(x)}=e^{\cos(x)-1+1}=e\left(e^{\cos(x)-1}\right)$

لنضع: $g(x)=e^{\cos(x)-1}\Rightarrow g(0)=0$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+0\left(x^3\right)$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+0\left(x^3\right)$$

$$\cos(x)-1=-\frac{x^2}{2!}+0\left(x^3\right)$$

$$e^{\cos(x)-1}=e^{-\frac{x^2}{2!}+0\left(x^3\right)}=1-\frac{x^2}{2!}+0\left(x^3\right)$$

$$e.e^{\cos(x)-1}=e-\frac{e}{2}x^2+e.0\left(x^3\right)$$

0.4 تكامل وإشتقاق نشر محدود

تكامل نشر محدود

نظريـة 1.4.0:
ليكن : $f:[a,a]\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعا قابلا للمكاملة ويقبل بجوار الصفر (0) النشر المحدود من الرتبة n .

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+x^n\varepsilon(x)=p_n(x)+x^n\varepsilon(x);a_0,...,a_n\in\mathbb{R}$$

عندئذ يقبل التابع : $F:x\mapsto\int\limits_0^x f(t)dt$ من أجل $x\in[a,a]$ النشر المحدود من الرتبة ($n+1$) :

$$F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+...+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+x^{n+1}\varepsilon(x)=\int\limits_0^x p_n(t)dt+x^{n+1}\eta(x);a_0,...,a_n\in\mathbb{R}$$

مثال

كتابة نشرا محدودا للدالة : $f(x)=\ln(x+1)$ في جوار الصفر من الرتبة $n+1$.
نعلم أن:

$$\int\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)$$

ولدينا:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^nx^n+0(x^n)$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned}\ln(1+x)&=\int\left(1-x+x^2-x^3+...+(-1)^nx^n+0(x^n)\right)dx\\&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+0\left(x^{n+1}\right)\end{aligned}$$

إشتقاق نشر محدود

في الحالة العامة وجود نشر محدود لـ تابع f لا يسمح لنا بإستنتاج أي شيء حول وجود النشر المحدود لـ f' إذ رأينا سابقا أن وجود النشر المحدود لـ f لا يتطلب حتى وجود f' لهذا يمكننا تقديم النظرية التالية.

نظريـة 2.4.0:
إذا كان التابع f قابل للإشتقاق على المجال $]-a,a[$ ويقبل نشرا محدودا في جوار 0 من الرتبة n وكان التابع المشتق f' يقبل نشرا محدودا من الرتبة $(n-1)$ في جوار 0 فإن الجزء النظامي لـ f' هو مشتق الجزء النظامي لنشر f .

مثال

كتابة نشر محدود من الرتبة $(n-1)$ في جوار 0 للدالة $\frac{1}{(1-x)^2}$.
نعلم أن:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

ولدينا:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n+0\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(1+x+x^2+x^3+...+x^n+0\left(x^n\right)\right)'$$

$$=1+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1}+0\left(x^{n-1}\right)$$

ملاحظة

يمكن أن يقبل f نشرا محدودا في جوار ∞ من الرتبة n إذا وجد كثير حدود p_n درجته أصغر من أو تساوي n في جوار ∞ ويحقق: $f(x)=p\left(\frac{1}{x}\right)+0\left(\frac{1}{x^n}\right)$ أي نجري إستبدال المتغير التالي $t=\frac{1}{x}$ ، نلاحظ أنه لما $x\longrightarrow\infty$ فإن $t\longrightarrow 0$ ومنه: $f(x)=f\left(\frac{1}{t}\right)$

0.5 النشر المحدود في جوار قيمة x_0

تعريف 1.5.0: نقول عن تابع f معرف في جوار x_0 (قد يكون غير معرف عند x_0) أنه يقبل نشرا محدودا من الرتبة n في جوار x_0 إذا كان التابع : $F(t) = f(x_0 + t)$ $t \longmapsto$ قابلا للنشر المحدود من الرتبة n في جوار 0.

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + ... + a_n t^n + t^n \varepsilon_1(t) \quad , \quad \lim_{t\to 0} \varepsilon_1(t) = 0$$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \quad , \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

حيث: $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x - x_0)$ ، وهكذا حولنا الجوار من x_0 إلى 0 وذلك بوضع $t = x - x_0$
يمعنى : للبحث عن النشر المحدود في جوار نقطة $x_0 \neq 0$ نقوم بإستبدال المتغير $t = x - x_0$ ثم نبحث عن النشر المحدود للدالة f في جوار الصفر لأنه إذا كان $x \longrightarrow x_0$ فإن $t \longrightarrow 0$

أمثلة:

مثال 01 :
كتابة نشر محدود من الرتبة n في جوار 3 للتابع f حيث: $f(x) = \exp(x)$.
نضع: $t = x - 3$ ومنه $x = t + 3$

$$e^x = e^{t+3} = e^3.e^t = e^3 \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + ... + \frac{t^n}{n!} + 0(t^n)\right)$$
$$= e^3 \left(1 + (x-3) + \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(x-3)^3}{3!} + ... + \frac{(x-3)^n}{n!} + 0((x-3)^n)\right)$$

مثال 02 :
كتابة نشر محدود من الرتبة 4 في جوار 2 للتابع f حيث: $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
نضع: $t = x - 2$ ومنه $x = t + 2$.

$$f(t+2) = \frac{1}{-1-t} = -\frac{1}{1+t} = -\left(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + 0\left(t^4\right)\right)$$

ومنه:

$$\frac{1}{1-x} = -\left(1 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + (x-2)^4 + 0\left((x-2)^4\right)\right)$$

0.6 النشر المحدود المعمم

تعريف 1.6.0:
ليكن f تابع معرف في جوار 0 (قد يكون غير معرف عند 0) ، نفرض أن f لايقبل نشرا محدودا في جوار الصفر (0) ، لكن التابع $x \longmapsto x^{\alpha} f(x), \alpha \in \mathbb{R}_{+}$ يقبل النشر في جوار الصفر أي:

$$\forall x \neq 0 : x^{\alpha} f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + 0(x^n)$$

وبالتالي:

$$\forall x \neq 0 : f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + 0(x)\right) \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

تسمى العبارة $(*)$ الأخيرة النشر المحدود المعمم للتابع f في جوار الصفر .

مثال

التابع f حيث : $f(x) = \cot(x)$ $\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ لا يقبل نشرا محدودا في جوار الصفر من الرتبة 3
لأن: $\lim_{x \to 0} \cot(x) = +\infty$ لكن التابع g حيث: $g(x) = x \cot(x)$
يقبل نشرا محدودا في جوار الصفر من الرتبة 4 .

$$x \cot x = x \frac{\cos x}{\sin x} = x \left(\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + 0\left(x^4\right)}{x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^4)} \right) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + 0\left(x^4\right)$$

$$\cot x \underset{0}{=} \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + 0\left(x^3\right)$$