الفصل الثالث: مقاييس النزعة المركزية

الفصل الثالث: مقاييس النزعة المركزية

في الفصول السابقة رأينا كيفية عرض البيانات الإحصائية وتلخيصها في جداول تكرارية ورسوم بيانية، بهدف الحصول على بعض الخصائص للمجتمع الإحصائي المراد دراسته. لكن الرسوم البيانية تتصف بعدم الدقة، لذا يجب أن يكون لدينا مقاييس عددية تصف لنا هذه البيانات. لهذا الغرض سنتطرق في هذا الفصل إلى نوع مهم من المقاييس الإحصائية وتدعى بمقاييس النزعة المركزية و هي تستعمل أساسا من أجل المقارنة مع سلاسل إحصائية أخرى.

يقصد بالنزعة المركزية ميل البيانات إلى التمركز حول قيمة معينة في منتصف هذه البيانات، و هذه المقاييس تساعد بواسطة قياس واحد على فهم وتفسير واختيار النموذج المثالي للبيانات، أي هي تتمركز حول رقم واحد يعبر عن جميع البيانات في مجموعة ما.

تتمثل مقاييس النزعة المركزية في إيجاد قيمة المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال.

I. المتوسط الحسابي $(\overline{X})$ Moyenne Arithmétique:

يعرف الوسط (المتوسط) الحسابي لمجموعة من المشاهدات بأنه عبارة عن مجموع المشاهدات مقسوما على عددها، ويمكن كتابة هذه العلاقة الرياضية بالشكل التالي:

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المشاهدات}}{\text{عدد المشاهدات}}$$

1. حالة المتغير المتقطع:

أ- المتوسط الحسابي العادي (البسيط):

يساوي مجموع القيم مقسوما على عددها. مثلا إذا كان لدينا القيم: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$، المتوسط الحسابي العادي يساوي:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$$

حيث:

$\overline{x}$ = المتوسط الحسابي.

x_i= قيم المفردات.

N= عدد المفردات.

➢ ***مثال:*** البيانات التالية تمثل طول أحذية ل 10 أشخاص:

36-37-38-39-40-41-42-43-44-45.

➢ ***المطلوب:*** أحسب المتوسط الحسابي.

➢ ***الحل:***

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{N} = \frac{405}{10}$$

$$\rightarrow \overline{x} = 40{,}5$$

ب- المتوسط الحسابي المرجح:

هو مجموع حاصل ضرب قيم عناصر السلسلة الإحصائية في تكرارها مقسوما على مجموع هذه التكرارات، وهو يساوي في هذه الحالة:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$$

يمكن حساب المتوسط الحسابي المرجح $\overline{X}$بدلالة التكرارات النسبية f_i كما يلي:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} \rightarrow \boxed{\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i}$$

f_i

- ***مثال:*** لديك الجدول الإحصائي التالي يمثل أوزان 100 طالب.

الجدول (3-1): توزيع عدد الطلبة حسب أوزانهم

أوزان الطلبة x_i	55	60	62	64	70	72	75	المجموع
عدد الطلبة n_i	10	05	20	30	15	12	08	$\sum n_i = 100$

- ***المطلوب:*** حساب المتوسط الحسابي
- ***الحل:***

الجدول (3-2): حساب متوسط أوزان الطلبة

x_i	n_i	$x_i n_i$
55	10	550
60	05	300
62	20	1840
64	30	1920
70	15	1050
72	12	864
75	08	600
Σ	**100**	**6524**

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i}$$

$$\overline{X} = \frac{6524}{100} = 65{,}24$$

2. حالة المتغير المستمر:

يحسب المتوسط الحسابي في حالة المتغير المستمر باتباع الخطوات التالية:

- إيجاد مجموعة التكرارات.
- حساب مراكز الفئات حيث أن: مركز الفئة $= \frac{\text{الحد الأعلى+الحد الأدنى}}{2}$
- ضرب مركز كل فئة في التكرار المناظر لها.

وبالتالي المتوسط الحسابي (المرجّح) في متغير مستمر يساوي:

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}}$$

حيث:

x_i : مركز الفئة.

n_i : تكرار الفئة.

➢ ***مثال:*** أحسب متوسط أعمار التلاميذ للبيانات التالية:

الجدول (3-3): توزيع التلاميذ حسب أعمارهم

العمر c_i	5-6	7-8	9-10	11-12	13-14
عدد التلاميذ n_i	2	5	8	4	1

➢ ***الحل:***

الجدول (3-4): حساب متوسط أعمار التلاميذ

c_i	n_i	x_i مركز الفئات	$x_i n_i$
5-6	2	$\frac{5+6}{2} = 5,5$	5.5×2=11
7-8	5	7,5	37,5
9-10	8	9,5	76
11-12	4	11,5	46
13-14	1	13,5	13,5
Σ	**20**	**-**	**148**

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{148}{20} = 9,2 \text{سنة}$$

3. **خواص المتوسط الحسابي:**

مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي الصفر.

$$\boxed{\sum (x_i - \overline{x}) = 0}$$

➢ ***البرهان:***

$$\sum (x_i - \overline{x}) = \sum x_i - \sum \overline{x}$$

$$= \sum x_i - \quad N\overline{x}$$

$$= \frac{\sum x_i}{N} - \frac{N\overline{x}}{N}$$

$$= \overline{x} - \overline{x} = 0$$

عند إضافة أو حذف ثابت (c) إلى كل قيمة من قيم المشاهدات، فإن الوسط الحسابي للقيم الجديدة يساوي المتوسط الحسابي للقيم الأصلية ± المتوسط الحسابي للعدد الثابت (c):

$$y_i = x_i \pm c$$

$$\rightarrow \boxed{\overline{y} = \overline{x} \pm c}$$

➢ ***البرهان:***

$$y_i = x_i \pm c \rightarrow \sum y_i = \sum x_i + Nc$$

$$\rightarrow \frac{\sum y_i}{N} = \frac{\sum x_i}{N} + \frac{Nc}{N}$$

$$\bar{y} = \bar{x} \pm c$$

لدينا المجتمع (P) يتكون من مجموعتين:

$$\begin{cases} P_1 = (\overline{X_1}, N_1) \\ P_2 = (\overline{X_2}, N_2) \end{cases}$$

إذا يكون في هذه الحالة $\bar{X}$ للمجتمع (P) هو:

$$\bar{X} = \frac{\overline{X_1}N_1 + \overline{X_2}N_2}{N_1 + N_2}$$

➢ ***ملاحظة:***

يمكن حساب المتوسط الحسابي بدلالة التكرارات النسبية كما يلي:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} \rightarrow \boxed{\bar{X} = \sum x_i f_i}$$

$\mathbf{f_i}$

4. **مشتقات المتوسط الحسابي:**

في بعض الحالات تكون قيم المشاهدات لأي ظاهرة ما عباره عن نسب أو معدلات. في هذه الحالة، فإن المتوسط الحسابي لا يصلح لوصف هذه الظاهرة، لذا وجب استخدام متوسطات أخرى ومن أشهرها: المتوسط الهندسي، المتوسط التوافقي والمتوسط التربيعي.

أ- **المتوسط الهندسي (Moyenne Géométrique):**

يرمز له بالرمز $\bar{G}$، ويعرف المتوسط الهندسي لمجموعة من القيم $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$، عددها n، على أنه الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم.

في حالة البيانات الغير المبوّبة، فإن المتوسط الهندسي يعرف حسب المعادلة التالية:

$$\boxed{\bar{G} = \sqrt{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_k}}$$

في حالة حجم كبير للبيانات، نقوم بتسهيل العملية الحسابية وذلك من خلال استخدام اللوغاريتم لإيجاد العلاقة التالية:

$$\boxed{\log \bar{G} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i}$$

ومنه يصبح المتوسط الهندسي كما يلي:

$$\overline{G} = \int \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

مثال: أحسب المتوسط الهندسي السلسلة الإحصائية التالية: 08 -15 -10 -02 -04.

$$\overline{G} = \sqrt[5]{4 \times 2 \times 10 \times 15 \times 8}$$

$$\overline{G} = 6{,}26$$

أما في حالة البيانات المبوّبة، فالمتوسط الهندسي يعرف بالعلاقة التالية:

$$\overline{G} = \sqrt[\sum N_i]{{x_1}^{n_1} \times {x_2}^{n_2} \times \dots \times {x_k}^{n_k}}$$

عند إدخال اللوغاريتم تصبح لدينا المعادلة التالية:

$$\log \overline{G} = \frac{1}{\sum n_i}[n_1 \log x_1 \times n_2 \log x_2 \times \dots \times n_k \log x_k]$$

$$\log \overline{G} = \frac{1}{\sum n_i}\sum_{i=1}^{n} n_i \log x_i$$

- ***مثال:*** الجدول التالي يبين توزيع عمال أحد المصانع حسب الأجور اليومية:

الجدول (3-5): توزيع العمال حسب أجورهم اليومية

الأجر اليومي x_i	100	120	125	110
عدد العمال n_i	20	10	8	12

- ***المطلوب:*** إيجاد الوسط الهندسي

$$\log \overline{G} = \frac{1}{50}[20 \log 100 + 10 \log 120 + 8 \log 125 + 12 \log 110]$$

$$= \frac{1}{50}[(20 \times 2) + (10 \times 2{,}079) + (8 \times 2{,}09) + (20 \times 2{,}04)]$$

$$\log \overline{G} = 2{,}0398$$

$$\overline{G} = 109{,}59$$

ب- المتوسط التوافقي (Moyenne Harmonique):

يرمز له بالرمز $\overline{H}$ ويعرف على أنه مقلوب الوسط الحسابي لمقلوب القيم، ويحسب وفقا للقانون التالي:

حالة البيانات الغير المبوّبة:

$$\overline{H} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

حالة البيانات المبوّبة:

$$\overline{H} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{x_i}}$$

➢ ***مثال:*** من خلال الجدول التالي، قم بحساب الوسط التوافقي.

الجدول (3-6): المسافة حسب السرعة

السرعة (كم/سا)x_i	40	50	80	100	**المجموع**
المسافة (كلم) n_i	2	4	3	8	**17**

$$\overline{H} = \frac{17}{\frac{2}{40} + \frac{4}{50} + \frac{3}{80} + \frac{8}{100}}$$

$$\overline{H} = 68{,}687 \text{ كلم/سا}$$

ج- المتوسط التربيعي $\overline{\mathbf{Q}}$(Moyenne Quadratique):

يرمز له بالرمز $\overline{\mathbf{Q}}$ ويعرف على أنه الجذر التربيعي للوسط الحسابي لمربعات القيم.

حالة البيانات الغير المبوّبة:

$$\overline{\mathbf{Q}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{N}}$$

حالة البيانات المبوّبة:

$$\overline{\mathbf{Q}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}}$$

➢ ***مثال:*** يمثل الجدول التالي عدد القاعات في مدرسة ما حسب طول الضلع.

➢ **الجدول (3-7): طول ضلع القاعات**

طول الضلع x_i	4	8	9
عدد القاعات n_i	2	4	4

➢ ***المطلوب:*** احسب المتوسط التربيعي (متوسط المساحة).

➢ **الجدول (3-8): حساب المتوسط التربيعي**

طول الضلع x_i	عدد القاعات n_i	المساحة x_i^2	$x_i^2 n_i$
4	2	16	32
8	4	64	256
9	4	81	324
Σ	**10**	**-**	**612**

$$\overline{Q} = \frac{612}{10} = 61{,}2$$

➢ ***ملاحظة***: هناك علاقة أساسية ما بين هذه المتوسطات:

$$\boxed{\overline{H} < \overline{G} < \overline{X} < \overline{Q}}$$

II. المنوال (Le Mode) Mo :

هو القيمة الأكثر شيوعا أو تكرارا، ويستخدم المنوال بكثرة في العديد من المجالات وخاصة في مجال التسويق.

1. حالة المتغير المتقطع:

المنوال في المتغير المتقطع يعبر عن قيمة المتغير x_i التي تقابل أكبر تكرار مطلق.

➢ ***مثال:*** لديك الجدول التالي يمثل أوزان 100 طالب:

الجدول (3-9): توزيع الطلبة حسب أوزانهم

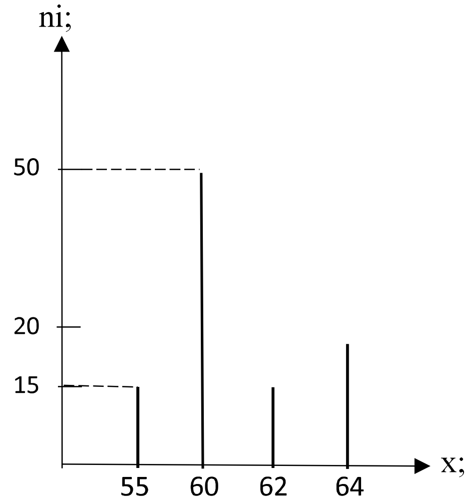
الوزن x_i	عدد الطلبة n_i
55	15
60	50
62	15
64	20
Σ	**100**

- ➢ ***المطلوب:*** أحسب المنوال ومثله بيانيا.
- ➢ ***الحل:***

أكبر تكرار هو 50 إذن **Mo=60**

الشكل (3 – 1): التمثيل البياني للمنوال

(حالة المتغير المتقطع)



2. **حالة المتغير المستمر:**

لإيجاد المنوال في حالة المتغير المستمر، نتبع الخطوات التالية:

- نجد الفئة المنوالية التي تقابل أكبر تكرار مطلق.
- نحسب المنوال حسب القانون التالي:

$$Mo = a + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} . d\right]$$

حيث:

a : الحد الأدنى للفئة المنوالية.

d : طول الفئة المنوالية.

Δ_1: تكرار الفئة المنوالية-التكرار السابق.

Δ_2: تكرار الفئة المنوالية-التكرار الموالي.

- ➢ ***مثال:*** احسب المنوال من خلال المثال السابق و مثله بيانيا:

➢ ***الحل:***

الفئة المنوالية: [7-8[.

$$\Delta_1 = 8 - 5 = 3$$

$$\Delta_2 = 8 - 4 = 2$$

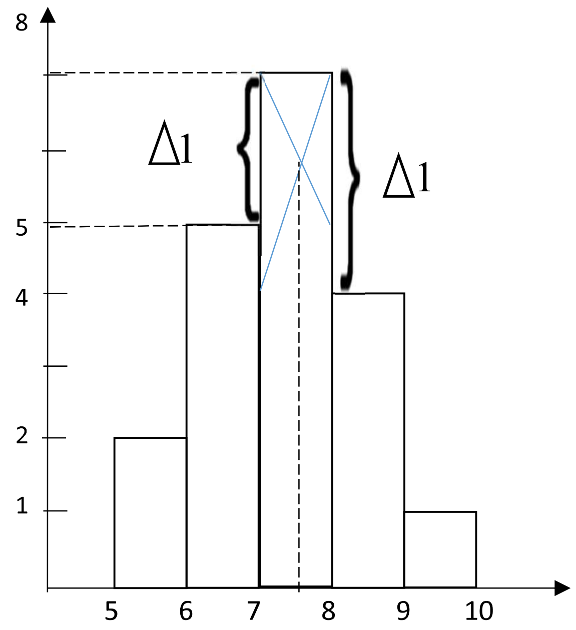
$$Mo = a + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot d\right]$$

$$= 7 + \left[\frac{3}{3+4} \cdot 1\right]$$

$$\boxed{=7{,}42}$$

التمثيل البياني ل Mo:

الشكل (3-2) التمثيل البياني للمنوال (حالة متغير مستمر)



➢ ***ملاحظة:***

في حالة عدم تساوي أطوال الفئات، لابد من تصحيح التكرارات قبل حساب المنوال، ويصبح التكرار المصحح (n_c) يساوي: $n_c = \frac{n_i}{\text{طول الفئة}}$، ثم نختار الفئة المنوالية على أساس أكبر n_c ونطبق القانون السابق.

➢ ***مثال:*** الجدول التالي يبين توزيع عدد المناطق حسب كمية الأمطار المتساقطة:

الجدول (3-10): توزيع عدد المناطق حسب كمية الأمطار المتساقطة

كمية الأمطار c_i	عدد المناطق n_i	مركز الفئة	x_in_i	d	n_i
2-5	9	3,5	31,5	3	3
5-10	17	7,5	127,5	5	3,4
10-16	36	13	468	6	6
16-23	50	19,5	975	7	7,14
23-31	21	27	567	8	2,625
Σ	**133**	-	**2169**	-	-

➢ ***المطلوب:***

1- حساب المتوسط الحسابي.

2-حساب الكمية التي تساقطت في أكبر عدد من المناطق ثم مثلها بيانيا.

➢ ***الحل:***

1- حساب المتوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{2169}{133}$$

$$\boxed{\bar{X} = 16,30}$$

2- حساب المنوال:

$$Mo = a + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot d\right]$$

الفئة المنوالية هي: [16-23[.

$$\Delta_1 = 7,16 - 6 = 1,14$$

$$\Delta_2 = 7,14 - 2,625 = 4,515$$

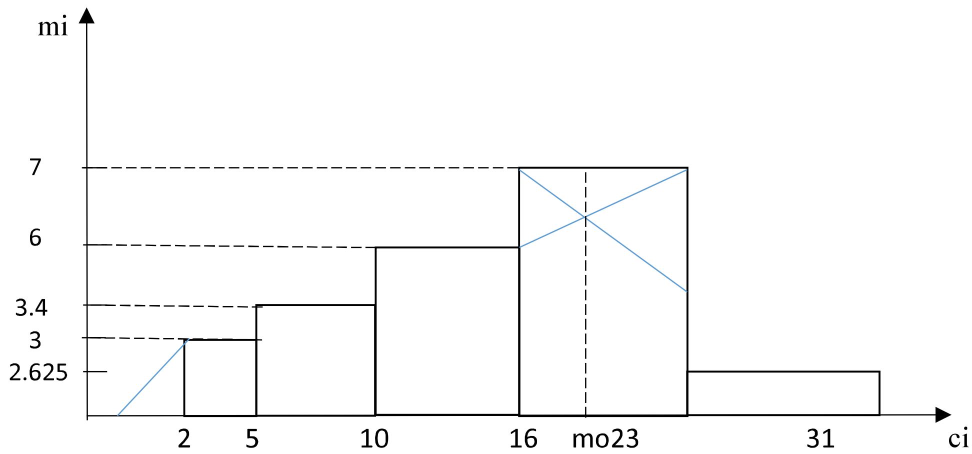
$$Mo = 16 + \left[\frac{1,14}{1,14 + 4,515} \cdot 7\right]$$

$$\boxed{=17,41}$$

التمثيل البياني للمنوال:

الشكل (3-3) التمثيل البياني لكمية الأمطار

التي تساقطت في لأكبر عدد من المناطق (mo)



III. الوسيط Me (La Mediane) :

الوسيط هو قيمة المتغير الإحصائي x_i التي تفصل السلسلة الاحصائية إلى قسمين متساويين بعد ترتيب القيم. فهي تضع 50% من المعطيات على اليمين و 50% من المعطيات على اليسار.

1. **حالة المتغير المتقطع:**

أ- **سلسلة بسيطة:**

إذا كان لدينا عدد معين من المشاهدات (n) نقوم أولا بترتيب القيم ترتيبا تصاعديا أو تنازليا.

إذا كان عدد القيم فرديا فإن الوسيط يقع في المرتبة $\frac{n+1}{2}$

- ***مثال:*** n=9.

3، 3، 5، 7، 8، 10، 13، 16، 17.

4 قيم   4 قيم

الوسيط Me يشغل المرتبة $\frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$ وبالتالي: $\boxed{Me=8}$.

- إذا كان عدد القيم زوجي، في هذه الحالة يكون لنا مجال للوسيط وليس قيمة منفردة، وبالتالي يأخذ الوسيط قيمتين تفصل السلسلة وتشغلان المرتبة $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$ والوسيط يساوي مجموع هاتين القيمتين مقسوم على 2.

➢ ***مثال:*** n=10.

20, 19, 17, 15, 11, 10, 9, 6, 4, 3.

الوسيط Me يقع في المرتبة $\frac{10}{2}=5$ و $\frac{10}{2}+1=6$،أي يقع بين القيمتين 10 و 11 ويكون مركز المجال[10-11] ويساوي $\frac{10+11}{2}$ =Me $\leftarrow$ $\boxed{Me=10{,}5}$

ب- قيم معبر عنها بجدول إحصائي:

نقوم بتحديد موقع نصف القيمة n أي القيمة $\frac{\sum n_i}{2}$، إذا كان $\sum n_i$ زوجي و القيمة $\frac{\sum n_i+1}{2}$إذا كان $\sum n_i$ فردي، وإذا كانت موجودة ضمن التكرارات المتجمعة الصاعدة، فإن الوسيط يساوي مجموع القيمة التي تقابل $n_i\nearrow$ والقيمة التي بعدها ونقسم على 2. أما إذا كانت القيمة $\frac{\sum n_i}{2}$غير موجودة ضمن التكرارات المتجمعة الصاعدة فإن قيمة الوسيط تساوي قيمة x_i التي تقابل $n_i\nearrow$ الذي يكون مباشرة أكبر من $\frac{\sum n_i}{2}$.

➢ ***مثال1:*** ليكن الجدول الإحصائي التالي:

x_i	n_i	$n_i\nearrow$
0	3	3
1	5	8
2	6	14
3	5	19
4	4	23
5	2	25
6	3	28
Σ	**28**	**-**

$$\frac{\sum n_i}{2}=\frac{28}{2}=14$$

القيمة 14 موجودة ضمن التكرار المتجمع الصاعد، إذن الوسيط محصور بين القيمة 2 و 3 وهو يساوي:

$$Me=\frac{2+3}{2}=\boxed{2{,}5}$$

➢ ***مثال2:*** ليكن الجدول الإحصائي التالي:

x_i	n_i	$n_i\nearrow$
0	2	2
1	3	5
2	5	10 ←
3	4	14
4	2	16
5	2	18
Σ	**18**	-

$$\frac{\sum n_i}{2}=\frac{18}{2}=9$$

القيمة 9 غير موجودة ضمن التكرار المتجمع الصاعد، إذن نأخذ قيمة x_i التي تقابل $n_i\nearrow$ الذي يكون أكبر من 9 وهو $n_i\nearrow=10$ وبالتالي: $\boxed{Me = 2}$.

➢ ***ملاحظة:*** إذا كان العدد فردي نحسب ب $\frac{\sum n_i+1}{2}$

2. **حالة متغير مستمر:**

في هذه الحالة لا يهمنا إذا كان طول الفئات متساوي أو غير متساوي.

لحساب الوسيط نقوم بالمراحل التالية:

نختار الفئة الوسيطية، نقوم بتحديد موقع نصف القيمة $\frac{\sum n_i}{2}$ (أو $\frac{\sum n_i+1}{2}$،إذا كانت قيمة فردية). إذا كانت هذه القيمة موجودة ضمن $n_i\nearrow$، فنختار الفئة التي بعدها، وإذا كانت غير موجودة فنلجأ إلى $n_i\nearrow$ الذي يكون أكبر من $\frac{\sum n_i}{2}$ ونختار الفئة التي تقابله.

نطبق القانون التالي:

$$\boxed{Me = a+\left(\frac{\frac{\sum n_i}{2}-\boldsymbol{n_{i-1}}\nearrow}{n_i}\right).d}$$

حيث:

a : الحد الأدنى للفئة الوسيطية.

$n_{i-1}\nearrow$: الذي يسبق التكرار المتجمع الصاعد للفئة الوسيطية.

n_i: تكرار الفئة الوسيطية.

d : طول الفئة الوسيطية.

يمكن أيضا حساب الوسيط من خلال التكرار النسبي f_i أو التكرار النسبي المئوي $f_i\%$ بالقوانين الآتية:

حساب الوسيط ب f_i:

$\frac{\sum f_i}{2} \_ \frac{1}{2}$

$$Me = a + \left(\frac{0{,}5 \; - \boldsymbol{f_{i-1}} \nearrow}{f_i}\right).d$$

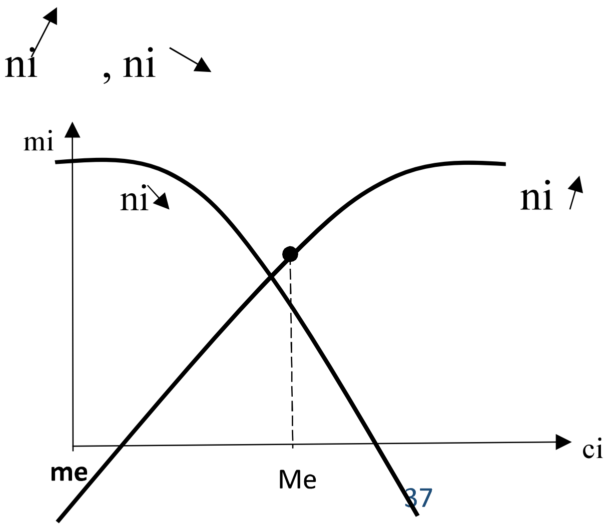
حساب الوسيط ب $f_i\%$:

$100 \times 0{,}5$

$$Me = a + \left(\frac{50 \; - \boldsymbol{f_{i-1}}\% \nearrow}{f_i\%}\right).d$$

➢ ***ملاحظة:*** نمثل الوسيط بيانيا من خلال الرسم البياني للتكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة، إسقاط نقطة التلاقي ما بين المنحنيين على محور x_i، يمثل الوسيط.

الشكل (3-4) التمثيل البياني للوسيط



IV. مشتقات الوسيط:

إذا كان الوسيط هو قيمة المتغير الإحصائي الذي يقسم السلسلة الاحصائية إلى قسمين متساويين، فإن الربيعيات هي عبارة عن 3 قيم تقسم السلسلة الاحصائية إلى 4 أقسام متساوية، كل قسم يمثل 25% (الرّبع) من المعطيات. نرمز لهذه القيم بالحروف Q_3, Q_2, Q_1 . الربيعي الثاني هو نفسه الوسيط.

العشريات هي عبارة عن 9 قيم تقسم السلسلة الإحصائية إلى عشرة أقسام متساوية، كل قسم يمثل 10% (عشر) المعطيات. نرمز لهذه القيم بالحروف $D_1 , D_2 , \ldots , D_9$. العشري الخامس هو نفسه الربيعي الثاني Q_2 وفي نفس الوقت الوسيط.

المؤينات هي عبارة عن 99 قيمة تقسم السلسلة الإحصائية إلى 100 جزء. كل جزء يمثل 1% (مائوي) من المعطيات. نرمز لهذه القيم بالحروف $C_1 , C_2 , \ldots , C_{99}$. المؤون الخمسون C_{50} هو نفسه الوسيط والربيعي الثاني Q_2 وكذلك العشري الخامس D_5.

المؤون C_{25} هو نفسه الربيعي الأول Q_1.

المؤون 75 هو نفسه الربيعي الثالث Q_3.

1. حساب الربيعيات: (Quartiles)

أ- حالة متغير متقطع:

لحساب الربيعي Q_i نقوم بتحديد موقع القيمة $\frac{\Sigma n_i}{4}$ بالنسبة للتكرارات المتجمعة الصاعدة. فإذا كانت هذه القيمة موجودة ضمن التكرارات المتجمعة، فإن الربيعي يكون محصورا بين قيمتين ويساوي معدلهما. أما إذا لم تكن موجودة ضمن التكرارات المتجمعة فإن الربيعي Q_i يكون قيمة منفردة.

➢ ***مثال:*** أحسب الربيعي الأول، الثاني والثالث.

x_i	n_i	$n_i\nearrow$
0	3	3
Q_1 → 1	5	8
Q_2 → 2	6	14
3	5	19
Q_3 → 4	4	23
5	2	25
6	3	28
Σ	**28**	-

❖ **حساب الربيعي الأول:**

$\frac{\sum n_i}{4} = \frac{28}{4} = 7 \leftarrow$ غير موجودة ضمن **n**$n_i\nearrow$ وبالتالي نأخذ قيمة x_i التي تقابل $n_i\nearrow$ الأكبر من 7

$\leftarrow Q_1 = 1$

❖ **حساب الربيعي الثاني:**

$\frac{2\sum n_i}{4} = \frac{2\times 28}{4} = 14$ موجودة ضمن $n_i\nearrow$

$\leftarrow Q_2 = \frac{2+3}{2} = 2,5 \leftarrow Q_2 = 2,5$

❖ **حساب الربيعي الثالث:**

$\frac{3\sum n_i}{4} = \frac{3\times 28}{4} = 21$ غير موجودة ضمن $n_i\nearrow$

$\leftarrow Q_3 = 4$

ب- **حالة متغير مستمر:**

هنا نطبق نفس مراحل الوسيط لإيجاد الفئة الربيعية

❖ **الربيعي الأول:**

$$Q_1 = a + d\,.\left(\frac{\frac{\sum n_i}{4} - \boldsymbol{n_{i-1}}\nearrow}{n_i}\right)$$

❖ **الربيعي الثاني:**

$$Q_2 = a + d\,.\left(\frac{\frac{2\sum n_i}{4} - \boldsymbol{n_{i-1}}\nearrow}{n_i}\right)$$

❖ **الربيعي الثالث:**

$$Q_3 = a + d\,.\left(\frac{\frac{3\sum n_i}{4} - \boldsymbol{n_{i-1}}\nearrow}{n_i}\right)$$

يمكن حساب الربيعيات باستعمال التكرارات النسبية أو باستعمال التكرارات النسبية المئوية.

$$Q_1 = a + d\,.\left(\frac{0.25 - \boldsymbol{f_{i-1}}\nearrow}{f_i}\right) \qquad Q_1 = a + d\,.\left(\frac{25 - \boldsymbol{f_{i-1}}\%\nearrow}{f_i\%}\right)$$

$$Q_2 = a + d.\left(\frac{0.5 - \boldsymbol{f_{i-1}} \nearrow}{f_i}\right) Q_2 = a + d.\left(\frac{50 - \boldsymbol{f_{i-1}}\% \nearrow}{f_i\%}\right)$$

$$Q_3 = a + d.\left(\frac{0.75 - \boldsymbol{f_{i-1}} \nearrow}{f_i}\right) Q_3 = a + d.\left(\frac{75 - \boldsymbol{f_{i-1}}\% \nearrow}{f_i\%}\right)$$

2. حساب العشريات: (Déciles)

أ- حالة متغير متقطع:

نطبق نفس مراحل الربيعيات ولكن نقوم بتحديد مركز القيمة $\frac{\sum n_i}{10}$، فإذا كانت موجودة ضمن التكرارات المتجمعة الصاعدة، فالعشري D_i يكون محصورا بين قيمتين ويساوي معدلهما، أما إذا لم تكن موجودة ضمن التكرارات المتجمعة الصاعدة، فإن العشري D_i يكون قيمة منفردة.

مثال: حساب كل من العشري الأول، العشري الخامس والعشري التاسع.

x_i	n_i	$n_i\nearrow$
0	5	5
D_1 → 1	8	13
2	4	17
3	9	26
4	7	33
5	10	43
6	5	48
D_5 → 7	9	57
8	8	65
9	12	77
10	6	83
D_9 → 11	8	91
12	9	100
Σ	**100**	-

❖ **حساب العشري الأول:**

$\frac{\sum n_i}{10} = \frac{100}{10} = 10$ ←غير موجودة ضمن $n_i\nearrow$ إذن $D_1 = 1$

❖ حساب العشري الخامس:

$\frac{5\sum n_i}{10} = \frac{5\times100}{10} = 50$ ←غير موجودة ضمن $n_i\nearrow$ إذن $D_5 = 7$

❖ حساب العشري التاسع:

$\frac{9\sum n_i}{10} = \frac{900}{10} = 90$ ←غير موجودة ضمن $n_i\nearrow$ إذن $D_9 = 11$

ب- حالة متغير مستمر:

❖ العشري الأول:

$$D_1 = a + d\,.\left(\frac{\frac{\sum n_i}{10} - \boldsymbol{n_{i-1}} \nearrow}{n_i}\right)$$

❖ العشري الخامس:

$$D_5 = a + d\,.\left(\frac{\frac{5\sum n_i}{10} - \boldsymbol{n_{i-1}} \nearrow}{n_i}\right)$$

❖ العشري التاسع:

$$D_9 = a + d\,.\left(\frac{\frac{9\sum n_i}{10} - \boldsymbol{n_{i-1}} \nearrow}{n_i}\right)$$

يمكن حساب العشريات باستعمال التكرارات النسبية أو باستعمال التكرارات النسبية المئوية:

$$D_1 = a + d\,.\left(\frac{0.10 - \boldsymbol{f_{i-1}} \nearrow}{f_i}\right) \quad D_1 = a + d\,.\left(\frac{10 - \boldsymbol{f_{i-1}}\% \nearrow}{f_i\%}\right)$$

$$D_5 = a + d\,.\left(\frac{0.50 - \boldsymbol{f_{i-1}} \nearrow}{f_i}\right) \quad D_5 = a + d\,.\left(\frac{50 - \boldsymbol{f_{i-1}}\% \nearrow}{f_i\%}\right)$$

$$D_9 = a + d\,.\left(\frac{0.90 - \boldsymbol{f_{i-1}} \nearrow}{f_i}\right) \quad D_9 = a + d\,.\left(\frac{90 - \boldsymbol{f_{i-1}}\% \nearrow}{f_i\%}\right)$$

3. حساب المؤينات: (Centiles)

أ- حالة متغير متقطع:

نقوم بتحديد مركز قيمة $\frac{\sum n_i}{100}$، إذا كانت موجودة ضمن التكرارات المتجمعة الصاعدة فإن المؤين يكون محصورا بين قيمتين ويساوي معدلهما، أما إذا لم تكن موجودة ضمن التكرارات الصاعدة، فإن المؤين يكون قيمة منفردة.

مثال: أحسب المؤين الأول C_1، المؤين الخمسون C_{50} والمؤين التاسع والتسعون C_{99} .

x_i	n_i	$n_i\nearrow$
C_1 → 0	5	5
1	8	13
2	4	17
3	9	26
4	7	33
5	10	43
6	5	48
C_{50} → 7	9	57
8	8	65
9	12	77
10	6	83
11	8	91
C_{99} → 12	9	100
Σ	**100**	**-**

❖ **حساب المؤين الأول:**

$\frac{\sum n_i}{100} = \frac{100}{100} = 1$ ←غير موجودة ضمن $n_i\nearrow$ إذن $C_1 = 0$

❖ **حساب المؤين الخمسون:**

$\frac{50\sum n_i}{100} = \frac{50\times100}{100} = 50$ ←غير موجودة ضمن $n_i\nearrow$ إذن $C_{50} = 7$

❖ حساب المؤين التاسع والتسعون:

$\frac{99\sum n_i}{100} = \frac{99\times100}{100} = 99$ ← غير موجودة ضمن $n_i\nearrow$ إذن $C_{99} = 12$

ب- حالة المتغير المستمر

❖ المؤين الأول:

$$C_1 = a + d.\left(\frac{\frac{\sum n_i}{100} - \boldsymbol{n_{i-1}} \nearrow}{n_i}\right)$$

المؤين الخمسون:

$$C_{50} = a + d.\left(\frac{\frac{50\sum n_i}{100} - \boldsymbol{n_{i-1}} \nearrow}{n_i}\right)$$

❖ المؤين التاسع والتسعون:

$$C_{99} = a + d.\left(\frac{\frac{99\sum n_i}{100} - \boldsymbol{n_{i-1}} \nearrow}{n_i}\right)$$

يمكن حساب المؤينات باستعمال التكرارات النسبية أو باستعمال التكرارات النسبية المئوية

$$C_1 = a + d.\left(\frac{0.01 - \boldsymbol{f_{i-1}} \nearrow}{f_i}\right) \quad C_1 = a + d.\left(\frac{1 - \boldsymbol{f_{i-1}}\% \nearrow}{f_i\%}\right)$$

$$C_{50} = a + d.\left(\frac{0.5 - \boldsymbol{f_{i-1}} \nearrow}{f_i}\right) \quad C_{50} = a + d.\left(\frac{50 - \boldsymbol{f_{i-1}}\% \nearrow}{f_i\%}\right)$$

$$C_{99} = a + d.\left(\frac{0.99 - \boldsymbol{f_{i-1}} \nearrow}{f_i}\right) \quad C_{99} = a + d.\left(\frac{99 - \boldsymbol{f_{i-1}}\% \nearrow}{f_i\%}\right)$$

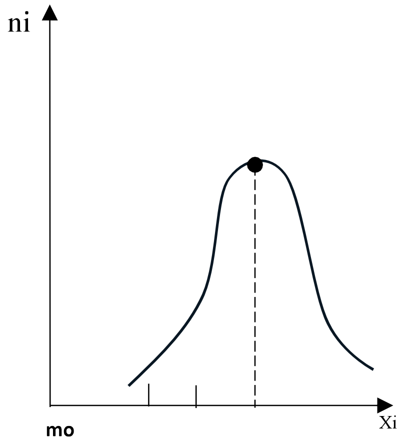
➢ ***ملاحظة:***

$$\boxed{\mathbf{Me = Q_2 = D_5 = C_{50}}}$$

V. العلاقة ما بين مقاييس النزعة المركزية:

من خلال استعمال مقاييس النزعة المركزية الثلاث (Me و Mo , $\overline{X}$) يمكن استنتاج شكل منحنى التوزيع التكراري:

الشكل 01:

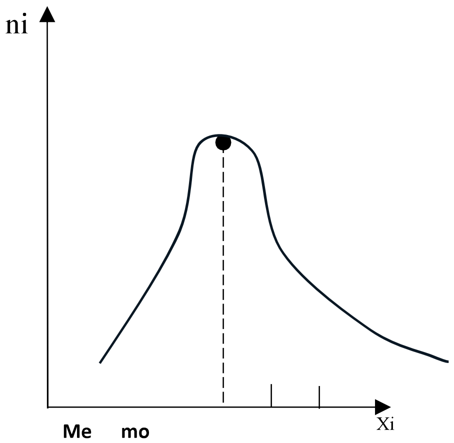


الشكل المتماثل (المتناظر)

IX

< ME < MO

الشكل 02:



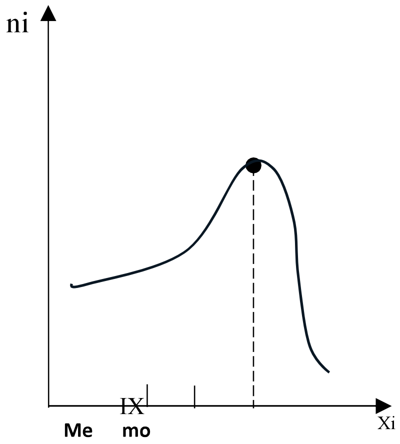
شكل الإلتواء موجب

نحو اليمين

IX

< ME < MO

الشكل 03:



شكل الإلتواء سالب

نحو اليسار

IX

< ME< MO