

Processus linéaires en séries temporelles

Cours de Séries Temporelles

Université d'Algérie

5 avril 2026

Plan

- 1 Introduction
- 2 Stationnarité
- 3 Transformations de processus stationnaires
- 4 Processus ARMA(1,1)
- 5 Modèles ARMA(p,q)
- 6 Estimation des fonctions caractéristiques
- 7 Tableau récapitulatif
- 8 Conclusion

Définition d'un processus linéaire

Définition

Un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit **linéaire général** de moyenne μ s'il peut s'écrire :

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

- ε_t : bruit blanc faible (moyenne nulle, variance σ_ε^2)
- (ψ_i) : coefficients réels tels que $\sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2 < \infty$ (condition de carré sommable)

Définition d'un processus linéaire

Définition

Un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit **linéaire général** de moyenne μ s'il peut s'écrire :

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

- ε_t : bruit blanc faible (moyenne nulle, variance σ_ε^2)
- (ψ_i) : coefficients réels tels que $\sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2 < \infty$ (condition de carré sommable)

Interprétation

Un processus linéaire est la sortie d'un filtre linéaire excité par un bruit blanc.

Opérateur de retard

Definition (Opérateur de retard B)

$$B^k X_t = X_{t-k}$$

Opérateur de retard

Definition (Opérateur de retard B)

$$B^k X_t = X_{t-k}$$

Écriture compacte

$$X_t = \Psi(B)\varepsilon_t, \quad \Psi(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i B^i$$

avec $\psi_0 = 1$.

Opérateur de retard

Definition (Opérateur de retard B)

$$B^k X_t = X_{t-k}$$

Écriture compacte

$$X_t = \Psi(B)\varepsilon_t, \quad \Psi(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i B^i$$

avec $\psi_0 = 1$.

Exemple

Application à l'Algérie La température moyenne quotidienne à Alger peut être modélisée comme :

$$T_t = \mu + \sum_{i=1}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

où ε_t représente des chocs météorologiques.

Stationnarité des processus linéaires

Theorem (Proposition 1)

Tout processus linéaire général $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire (faiblement stationnaire) et on a :

$$\begin{cases} \gamma_X(0) = \text{Var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2 \\ \gamma_X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_{i+h} \psi_i \end{cases}$$

Stationnarité des processus linéaires

Theorem (Proposition 1)

Tout processus linéaire général $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire (faiblement stationnaire) et on a :

$$\begin{cases} \gamma_X(0) = \text{Var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2 \\ \gamma_X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_{i+h} \psi_i \end{cases}$$

Idée.

La condition $\sum \psi_i^2 < \infty$ garantit la convergence des séries. Les autocovariances ne dépendent que de h , pas de t . □

Exemple algérien : Température à Alger

Modélisation

$$T_t = 18^\circ\text{C} + \sum_{i=1}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

- Moyenne $\mu \approx 18^\circ\text{C}$ (température moyenne annuelle à Alger)
- ε_t : chocs météo (vent, humidité, etc.)
- ψ_i décroît rapidement

Exemple algérien : Température à Alger

Modélisation

$$T_t = 18^\circ\text{C} + \sum_{i=1}^{+\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

- Moyenne $\mu \approx 18^\circ\text{C}$ (température moyenne annuelle à Alger)
- ε_t : chocs météo (vent, humidité, etc.)
- ψ_i décroît rapidement

Interprétation

La covariance entre deux jours ne dépend que de leur écart temporel. La température fluctue autour d'une moyenne constante (après élimination de la saisonnalité).

Stabilité par filtrage linéaire

Theorem (Proposition 2)

Soit $(W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire et $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite absolument sommable :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\alpha_i| < \infty$$

Alors le processus $Z_t = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i W_{t-i}$ est stationnaire.

Stabilité par filtrage linéaire

Theorem (Proposition 2)

Soit $(W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire et $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une suite absolument sommable :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\alpha_i| < \infty$$

Alors le processus $Z_t = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i W_{t-i}$ est stationnaire.

Exemple

Prix du gaz naturel en Algérie

$$P_t = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i P_{t-i} + \varepsilon_t$$

avec $\alpha_i = \lambda^i$ (poids exponentiellement décroissants). Cette transformation préserve la stationnarité.

Définition du processus ARMA(1,1)

Définition (ARMA(1,1))

Un processus stochastique X_t est un **ARMA(1,1)** s'il est stationnaire et satisfait :

$$X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

où ε_t est un bruit blanc de moyenne nulle et variance σ^2 .

Définition du processus ARMA(1,1)

Définition (ARMA(1,1))

Un processus stochastique X_t est un **ARMA(1,1)** s'il est stationnaire et satisfait :

$$X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

où ε_t est un bruit blanc de moyenne nulle et variance σ^2 .

Avec l'opérateur de retard B

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

où $\Phi(B) = 1 - \phi B$ et $\Theta(B) = 1 + \theta B$.

Causalité

Theorem (Condition de causalité)

Si $|\phi| < 1$, alors $1/\Phi(B)$ admet un développement en série entière convergente :

$$\frac{1}{1 - \phi B} = \sum_{i=0}^{+\infty} \phi^i B^i$$

On obtient la représentation $MA(\infty)$ causale :

$$X_t = \Psi(B)\varepsilon_t$$

avec $\psi_0 = 1$ et $\psi_i = (\phi + \theta)\phi^{i-1}$ pour $i \geq 1$.

Causalité

Theorem (Condition de causalité)

Si $|\phi| < 1$, alors $1/\Phi(B)$ admet un développement en série entière convergente :

$$\frac{1}{1 - \phi B} = \sum_{i=0}^{+\infty} \phi^i B^i$$

On obtient la représentation $MA(\infty)$ causale :

$$X_t = \Psi(B)\varepsilon_t$$

avec $\psi_0 = 1$ et $\psi_i = (\phi + \theta)\phi^{i-1}$ pour $i \geq 1$.

Conséquence

Si $|\phi| < 1$, la solution stationnaire unique est **causale** (dépend uniquement des erreurs passées et présentes).

Représentation explicite

Formule explicite de X_t

$$X_t = \varepsilon_t + (\phi + \theta) \sum_{i=1}^{+\infty} \phi^{i-1} \varepsilon_{t-i}$$

Représentation explicite

Formule explicite de X_t

$$X_t = \varepsilon_t + (\phi + \theta) \sum_{i=1}^{+\infty} \phi^{i-1} \varepsilon_{t-i}$$

Exemple

Taux de change DZD/EUR

- $\phi = 0.6$: persistance (inertie du marché)
- $\theta = 0.3$: effet retardé d'un choc
- Condition $|\phi| < 1$ vérifiée \Rightarrow processus stationnaire et causal

Definition (Inversibilité)

Un processus est **inversible** si ε_t peut s'exprimer comme une fonction des valeurs passées et présentes de X_t .

Inversibilité

Definition (Inversibilité)

Un processus est **inversible** si ε_t peut s'exprimer comme une fonction des valeurs passées et présentes de X_t .

Theorem (Condition d'inversibilité pour ARMA(1,1))

Si $|\theta| < 1$, alors $1/\Theta(B)$ admet un développement convergent :

$$\varepsilon_t = \Pi(B)X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i X_{t-i}$$

avec $\pi_0 = 1$ et des coefficients absolument sommables.

Résumé ARMA(1,1)

Condition	Propriété	Représentation
$ \phi < 1$	Causalité	$X_t = \sum \psi_i \varepsilon_{t-i}$ (MA(∞))
$ \theta < 1$	Inversibilité	$\varepsilon_t = \sum \pi_i X_{t-i}$ (AR(∞))
$ \phi = 1$	Non stationnaire	Racine unité

Table 1 – Propriétés du processus ARMA(1,1)

Résumé ARMA(1,1)

Condition	Propriété	Représentation
$ \phi < 1$	Causalité	$X_t = \sum \psi_i \varepsilon_{t-i}$ (MA(∞))
$ \theta < 1$	Inversibilité	$\varepsilon_t = \sum \pi_i X_{t-i}$ (AR(∞))
$ \phi = 1$	Non stationnaire	Racine unité

Table 1 – Propriétés du processus ARMA(1,1)

Exemple

Application Pour le taux de change DZD/EUR, on vérifie $|\phi| < 1$ (stationnarité) et $|\theta| < 1$ (inversibilité) afin de pouvoir faire des prévisions.

Généralisation aux ordres supérieurs

Definition (ARMA(p,q))

Un processus ARMA(p,q) est défini par :

$$\phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

avec :

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$$

Généralisation aux ordres supérieurs

Definition (ARMA(p,q))

Un processus ARMA(p,q) est défini par :

$$\phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

avec :

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$$

Conditions

- **Causalité** : toutes les racines de $\phi(z)$ sont à l'extérieur du cercle unité ($|z| > 1$)
- **Inversibilité** : toutes les racines de $\theta(z)$ sont à l'extérieur du cercle unité

Exemple algérien : Production d'électricité

Modèle ARMA(1,1) pour la production

$$P_t = 0.7P_{t-1} + \varepsilon_t + 0.2\varepsilon_{t-1}$$

- $\phi = 0.7$: forte persistance
- $\theta = 0.2$: effet modéré des chocs

Exemple algérien : Production d'électricité

Modèle ARMA(1,1) pour la production

$$P_t = 0.7P_{t-1} + \varepsilon_t + 0.2\varepsilon_{t-1}$$

- $\phi = 0.7$: forte persistance
- $\theta = 0.2$: effet modéré des chocs

Interprétation

Une panne (choc ε_t) affecte la production :

- Immédiatement ($+\varepsilon_t$)
- Le mois suivant ($+0.2\varepsilon_{t-1}$)

L'effet se propage via $\phi = 0.7$.

Estimation de la moyenne

Definition (Moyenne empirique)

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Estimation de la moyenne

Definition (Moyenne empirique)

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- **Sans biais** : $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mu$
- **Variance** :

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{|h| < n-1} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \gamma_X(h)$$

Estimation de la moyenne

Definition (Moyenne empirique)

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- **Sans biais** : $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mu$
- **Variance** :

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{|h| < n-1} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \gamma_X(h)$$

Conséquence

La variance de l'estimateur dépend des autocovariances. Si les X_t sont i.i.d., $\text{Var}(\bar{X}) = \gamma_X(0)/n \rightarrow 0$.

Estimation de l'autocovariance

Definition (Autocovariance empirique)

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-|h|} (x_i - \bar{X})(x_{i+|h|} - \bar{X})$$

Estimation de l'autocovariance

Definition (Autocovariance empirique)

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-|h|} (x_i - \bar{X})(x_{i+|h|} - \bar{X})$$

- $\hat{\gamma}(h)$ est un estimateur **biaisé** de $\gamma(h)$
- Mais **asymptotiquement sans biais**
- Si X_t est gaussien stationnaire et $\sum |\gamma(h)| < \infty$, alors $\hat{\gamma}(h)$ converge en moyenne quadratique vers $\gamma(h)$

Exemple algérien : Taux de chômage

Application au chômage en Algérie

Soit U_t le taux de chômage mensuel (désaisonnalisé).

- \bar{U} : estimation du taux de chômage moyen sur 10 ans
- $\hat{\gamma}(1)$: autocorrélation entre un mois et le suivant
- $\hat{\gamma}(12)$: autocorrélation annuelle (si données brutes)

Exemple algérien : Taux de chômage

Application au chômage en Algérie

Soit U_t le taux de chômage mensuel (désaisonnalisé).

- \bar{U} : estimation du taux de chômage moyen sur 10 ans
- $\hat{\gamma}(1)$: autocorrélation entre un mois et le suivant
- $\hat{\gamma}(12)$: autocorrélation annuelle (si données brutes)

Ces estimateurs permettent de :

- Caractériser la persistance du chômage
- Identifier un éventuel modèle ARMA sous-jacent

Résumé théorique

Concept	Condition	Représentation
Processus linéaire	$\sum \psi_i^2 < \infty$	$X_t = \mu + \sum \psi_i \varepsilon_{t-i}$
Stationnarité	Toujours vérifiée	$\gamma_X(h) = \sigma^2 \sum \psi_{i+h} \psi_i$
Causalité (ARMA)	Racines de $\phi(z)$ hors cercle unité	$X_t = \Psi(B)\varepsilon_t$
Inversibilité (ARMA)	Racines de $\theta(z)$ hors cercle unité	$\varepsilon_t = \Pi(B)X_t$
Estimation moyenne		$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum x_i$
Estimation autocovariance		$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{X})(x_{i+h} - \bar{X})$

Conclusion

Points clés à retenir

- 1 Les processus linéaires généralisent les modèles AR, MA et ARMA
- 2 La stationnarité est garantie par la condition $\sum \psi_i^2 < \infty$
- 3 Les conditions $|\phi| < 1$ (causalité) et $|\theta| < 1$ (inversibilité) sont essentielles pour ARMA(1,1)
- 4 L'estimation de la moyenne et de l'autocovariance permet d'identifier le modèle

Conclusion

Points clés à retenir

- 1 Les processus linéaires généralisent les modèles AR, MA et ARMA
- 2 La stationnarité est garantie par la condition $\sum \psi_i^2 < \infty$
- 3 Les conditions $|\phi| < 1$ (causalité) et $|\theta| < 1$ (inversibilité) sont essentielles pour ARMA(1,1)
- 4 L'estimation de la moyenne et de l'autocovariance permet d'identifier le modèle

Applications en Algérie

- Température à Alger
- Prix du gaz naturel
- Taux de change DZD/EUR
- Production d'électricité
- Taux de chômage

Merci pour votre attention

Questions ?