Series of Exercises $N°2$

Exercise 1

Using the Riemann sums, calculate the following integrals:

❶ $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$

❷ $\displaystyle\int_0^1 e^x dx$

❸ $\displaystyle\int_1^2 x \ \ dx$ such that $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercise 2

Using the Riemann sum of an appropriate function, determine the limit of the following sequences

❶ $\displaystyle U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2 + n^2}$

❷ $\displaystyle V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{(n+k)^2}$

Exercise 3

Calculate the following primitives

❶ $\displaystyle\int x^2(1-x^3)^4 dx$

❷ $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^3} dx$

❸ $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x} dx$

❹ $\displaystyle\int x\ e^{-4x^2+9} dx$

❺ $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+2x^3}} dx.$

Exercise 4

By integration by parts, calculate the following integrals

❶ $\displaystyle\int x^2 \sin x \, dx$

❷ $\displaystyle\int (\ln x)^2 dx$

❸ $\displaystyle\int_0^1 x\ e^{2x}\, dx$

❹ $\displaystyle\int_0^1 x\ \ \arctan x \, dx.$

Exercise 5

Using integration by changing the variable, calculate the following integrals

❶ $\int \cos(\sqrt{x})\,dx$

❷ $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

❸ $\int_0^{\pi} \cos^4(x)\sin x\,dx$

❹ $\int_1^{e} \frac{(\ln x)^n}{x}dx.$

Exercise 6

Calculate the following integrals

❶ $\int \frac{1}{\sin x}dx$

❷ $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

❸ $\int_1^2 \frac{x^2+3x-1}{2x-1}dx,$

❹ $\int_2^3 \frac{3x+2}{x^2+x-2}dx$

❺ $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}dx$

❻ $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$

Opérations et primitives

On suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle I

- Une primitive de $u'u^n$ sur I est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
- Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ sur I est $-\frac{1}{u}$.
- Une primitive de $\frac{u'}{u^n}$ sur I est $-\frac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}.(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2.$
- Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I est $2\sqrt{u}$ (En supposant $u > 0$ sur I.)
- Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln|u|$.
- Une primitive de $u'e^u$ sur I est e^u.

En particulier, si $u > 0$ sur I et si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, une primitive de $u'u^a$ sur I est :

$$\boxed{\int u'u^a = \begin{cases} \frac{1}{a+1}u^{a+1} + C & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln u \ + C & \text{si } a = -1 \end{cases}}$$