

## Chapitre 5 : Calcul de sections en béton armé soumises à la flexion simple

### 5.1. Définition :

Un élément (poutre, dalle, semelle de fondation, etc.) est soumis à la flexion simple (Figure.5.1) lorsque, dans chaque section transversale le long de cet élément, les efforts internes (ou sollicitations) résultant des charges appliquées se réduisent uniquement à deux composantes :

- **Un Moment Fléchissant ( $M_f$  ou  $M$ )** : est un couple de forces qui tend à provoquer la flexion (courbure) d'un élément structural. Il génère des contraintes asymétriques dans la section transversale : des contraintes de compression apparaissent sur une face de l'axe neutre, tandis que des contraintes de traction se développent sur la face opposée.

- **Un Effort Tranchant ( $T$  ou  $V$ )** : est une force sollicitant un élément structural perpendiculairement à son axe longitudinal, tendant à provoquer un cisaillement (glissement relatif des sections adjacentes). Il génère principalement des contraintes de cisaillement dans un élément chargé. Cette sollicitation est déterminante pour le ferrailage transversal.

- **L'Exigence Fondamentale : Effort Normal Nul ( $N = 0$ )** : cette exigence signifie qu'aucune force résultante ne sollicite la section perpendiculairement à sa surface, suivant l'axe longitudinal de l'élément. L'effort normal  $N$  génère habituellement des contraintes normales uniformes (de compression ou de traction) sur toute la section. Son absence ( $N = 0$ ) implique que les contraintes normales présentes sont exclusivement induites par le moment fléchissant.

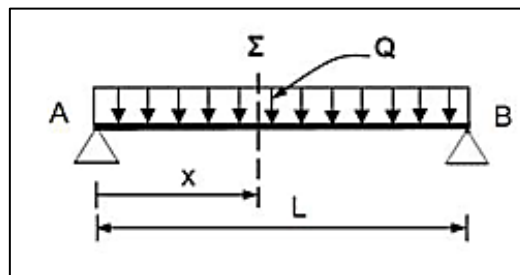


Figure. 5.1 : Schéma mécanique d'une poutre soumise à la flexion,

### 5.2 Calcul des armatures longitudinales à l'E.L.U.

#### 5.2.1 Hypothèses de calcul - Explications :

##### 5.2.1.1. Hypothèse de Navier-Bernoulli :

Les sections planes perpendiculaires à l'axe de la poutre avant déformation restent planes et perpendiculaires à l'axe déformé après chargement.

##### 5.2.1.2. Pas de glissement relatif entre l'acier et le béton :

Il y a une parfaite adhérence entre les armatures en acier et le béton qui les entoure.

##### 5.2.1.3. La résistance du béton en traction est négligée Signification

##### 5.2.1.4. La section d'acier est concentrée en son centre de gravité :

L'aire totale des armatures longitudinales ( $A_s$  ou  $A_s'$ ) est considérée comme ponctuelle, située à son centre de gravité (distance  $d$  de la fibre comprimée extrême pour les aciers tendus, distance  $d'$  pour les aciers comprimés).

### 5.2.1.5. Lois de comportement des matériaux :

**(a) Béton (Compression) :** Diagramme rectangulaire simplifié (Parabole-rectangle simplifié) :

La distribution réelle complexe des contraintes de compression dans le béton (parabole) est remplacée par un diagramme rectangulaire équivalent.

- Contrainte uniforme :  $\sigma_{bc} = f_{bu} = 0.85 \cdot f_{cj} / \gamma_b$  ( $\gamma_b \approx 1.5$ ).
- Hauteur de la zone comprimée :  $y = \alpha \cdot d$  ( $\alpha < 1$ ).
- Hauteur du bloc rectangulaire de contraintes :  $y = \beta \cdot y$  ( $\beta \approx 0.8$  pour  $f_{cj} \leq 50$  MPa).

La résultante des efforts de compression dans le béton  $N_{bc} = f_{bu} \cdot (\text{largeur } b) \cdot y$ .

$y$ : est de son bras de levier par rapport aux aciers tendus.

**(b) Acier : Diagramme bilinéaire de calcul (Traction et Compression) :**

Le comportement élasto-plastique réel de l'acier est modélisé par deux droites.

**Zone élastique ( $\varepsilon \leq \varepsilon_{su}$ ) :**  $\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$ . (Loi de Hooke, pente = module d'Young  $E_s \approx 200000$  MPa).

**Zone plastique ( $\varepsilon_{su} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ud}$ ) :**  $\sigma_s = f_{su} = f_e / \gamma_s$  ( $\gamma_s \approx 1.15$ ) = constante (palier plastique).

**Déformation limite :**  $\varepsilon_{ud} \approx 45\%$  à  $90\%$  selon les aciers (souvent prise à  $10\%$  pour le pivot A).

la force de traction ( $N_{st} = A_s \cdot \sigma_{st}$ ) ou de compression ( $N_{sc} = A_s' \cdot \sigma_{sc}$ ).

### 5.2.1.6. Déformations limites : Méthode des « trois pivots » (Flexion simple) :

Pour qu'une section atteigne sa capacité portante ultime (rupture), la déformation de l'un des matériaux doit atteindre sa limite ultime définie par les pivots.

**(a) Pivot A (Rupture par allongement excessif de l'acier tendu) :**

- $\varepsilon_{st} = \varepsilon_{ud}$  (limite d'allongement de l'acier, souvent **10%** pour les calculs ELU courants).
- $\varepsilon_{bc}$  peut varier entre **0% et 3.5%** (limite de raccourcissement du béton).
- **Situation :** Axe neutre relativement bas. Rupture ductile (acier très déformé avant écrasement béton).

**(b) Pivot B (Rupture par écrasement du béton comprimé) :**

- $\varepsilon_{bc} = 3.5\%$  (limite de raccourcissement ultime du béton).
- $\varepsilon_{st}$  peut varier entre **0% et 10%**.
- **Situation :** Axe neutre relativement haut. Rupture plus brutale (béton écrasé avant que l'acier n'ait pu pleinement se déformer).

**(c) Pivot C :** Pertinent pour les sections entièrement comprimées (flexion composée avec forte compression), non considéré ici.

**Signification :** Cette méthode définit les **états de déformation admissibles à la rupture** pour dimensionner la section. Le calcul consiste à trouver la position de l'axe

neutre ( $y$  ou  $\alpha = y/d$ ) qui, sous l'effet du moment ultime  $M_u$ , amène la section dans un état de déformation correspondant soit au Pivot A, soit au Pivot B.

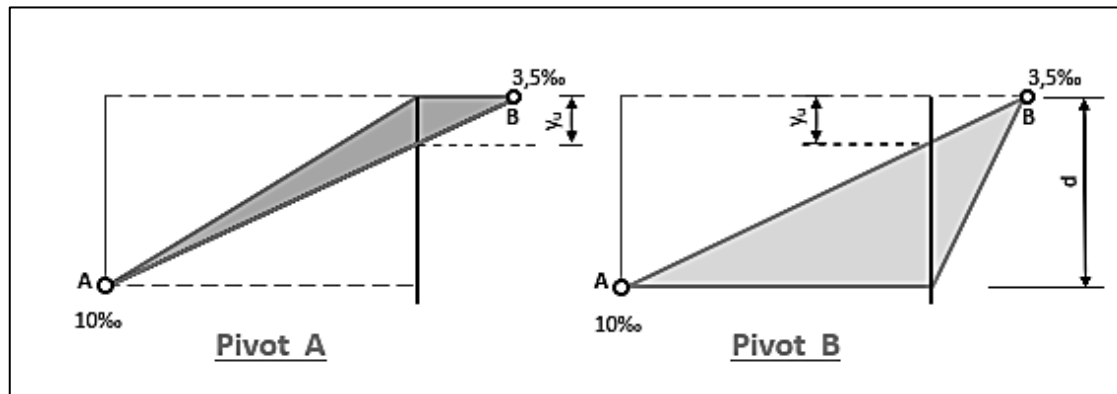


Fig. 5.2 : Diagramme des déformations limites d'une section soumise à la flexion simple

### 5.2.2. Relation fondamentale des déformations et positions particulières de l'axe neutre

L'hypothèse de Navier-Bernoulli (déformation linéaire) et l'absence de glissement (déformations égales au même niveau) conduisent à la relation géométrique fondamentale (Figure 4.3) suivante entre les déformations dans le béton comprimé ( $\varepsilon_{bc}$ ) et dans l'acier tendu ( $\varepsilon_{st}$ ):

$$\frac{y_u}{\varepsilon_{bc}} = \frac{d - y_u}{\varepsilon_{st}} \quad (\text{Eq.5.1})$$

où :

- $y_u$  = hauteur de l'axe neutre,
- $d$  = hauteur utile.

De cette relation on peut déduire l'équation suivante :

$$\frac{y_u}{d} = \frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_{st} + \varepsilon_{bc}} \quad (\text{Eq.5.2})$$

En introduisant :  $\alpha_u = \frac{y_u}{d}$ ,  $\alpha_u$  (position relative de la fibre neutre par rapport à la fibre la plus comprimée), on obtient l'équation suivante :

$$\alpha_u = \frac{y_u}{d} = \frac{\varepsilon_{bc}}{\varepsilon_{st} + \varepsilon_{bc}} \quad (\text{Eq.5.3})$$

Valeurs particulières de  $\alpha_u$

- Voir Fig. 4.3.
- Si la droite des déformations passe par les pivots A et B alors :

$$\alpha_u = \alpha_{AB} = \frac{3.5}{10 + 3.5} = \mathbf{0.2591} \quad (\text{Eq.5.4})$$

- **Valeurs particulières de  $\alpha_u$  et domaines de pivot**

Le tableau 5.1. Rassemble les valeurs de  $\alpha_u$  et limite des déformations du béton et de l'acier (Voir Figure. 4.3 pour illustration)

Tableau 5.1. Valeurs de  $\alpha_u$ , et déformations limites

Valeur de $\alpha_u$	Domaine de pivot	Déformations	Interprétation technique
$\alpha_u = 0.259$	Pivot A-B	$\varepsilon_{bc} = 3.5\text{‰}$ , $\varepsilon_{st} = 10\text{‰}$	Frontière entre pivots A et B.
$\alpha_u < 0.167$	Pivot A	$\varepsilon_{bc} < 2\text{‰}$ , $\varepsilon_{st} = 10\text{‰}$	Béton sous-utilisé → section surdimensionnée.
$0.167 \leq \alpha_u < 0.259$	Pivot A	$2\text{‰} \leq \varepsilon_{bc} \leq 3.5\text{‰}$ , $\varepsilon_{st} = 10\text{‰}$	Zone optimale pour l'acier.
$0.259 \leq \alpha_u \leq \alpha_l$	Pivot B	$\varepsilon_{bc} = 3.5\text{‰}$ , $\varepsilon_l \leq \varepsilon_{st} \leq 10\text{‰}$	Zone optimale pour le béton ( $\varepsilon_l = f_e / (\gamma_s \cdot E_s)$ ).
$\alpha_u > \alpha_l$	Pivot B	$\varepsilon_{bc} = 3.5\text{‰}$ , $\varepsilon_{st} < \varepsilon_l$	Acier sous-utilisé → sections d'armatures excessives.

Avec :

- $\varepsilon_l$  : Déformation limite de l'acier ( $\varepsilon_l = \varepsilon_e = \frac{f_e}{(\gamma_s \cdot E_s)}$ ).
- $\alpha_l$  : Valeur minimale en pivot B ( $\alpha_l = \frac{3.5}{\varepsilon_l + 3.5}$ ).

Si  $\alpha_l \leq \alpha_u \leq 1 \Rightarrow$  pivot B ( $\varepsilon_{bc} = 3.5 \text{‰}$  et  $\varepsilon_l \geq \varepsilon_{st} \geq 0$ ) : l'acier travaille insuffisamment, ce qui conduit à de grandes sections d'armatures.

Conclusion : Pour une utilisation efficace des matériaux, il est préconisé de prendre :

$$0.167 \leq \alpha_u \leq \alpha_l$$

- **En pivot A** ( $\alpha_u < 0.259$ ) : L'acier est pleinement sollicité ( $\varepsilon_{st} = 10\text{‰}$ ).
- **En pivot B** ( $\alpha_u \geq 0.259$ ) : Le béton est pleinement sollicité ( $\varepsilon_{bc} = 3.5\text{‰}$ ).

→ Cette plage garantit un équilibre entre la résistance du béton et la ductilité de l'acier, évitant le gaspillage de matériaux.

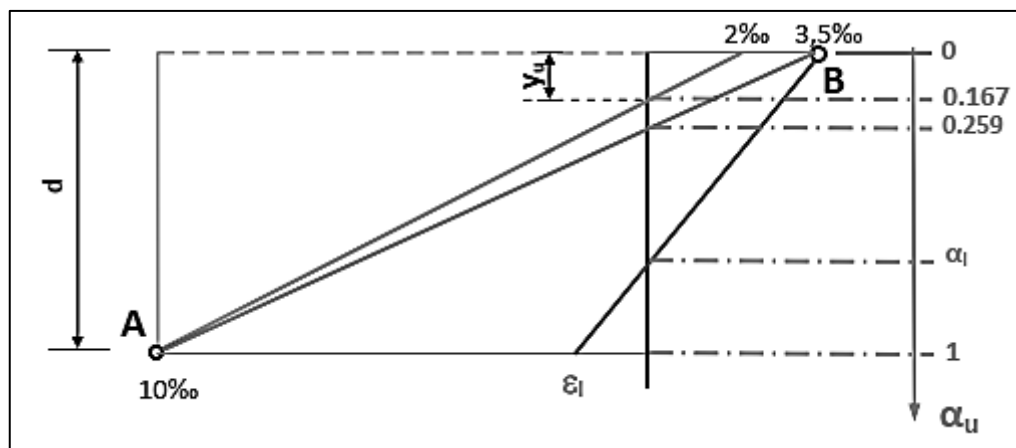


Figure 5.3. Position particulière de l'axe neutre

### 5.2.3 Section rectangulaire

Les poutres rectangulaires en béton armé constituent l'élément de base des structures fléchies (planchers, poutres porteuses, etc.). Soumises à un moment fléchissant, ces sections développent des contraintes internes complexes :

- **Zone comprimée** : Le béton travaille en compression au-dessus de l'axe neutre.
- **Zone tendue** : L'acier absorbe les tractions sous l'axe neutre, le béton étant considéré *fissuré et non résistant* (hypothèse fondamentale).

#### 5.2.3.1 Section sans aciers comprimés :

##### (a) définition :

Les sections rectangulaires simplement armées sont la forme la plus élémentaire des poutres en béton armé soumises à la flexion. La figure 5.4 présente les diagrammes contrainte-déformation parabolé-rectangle et rectangulaire simplifié dans la section de béton comprimé.

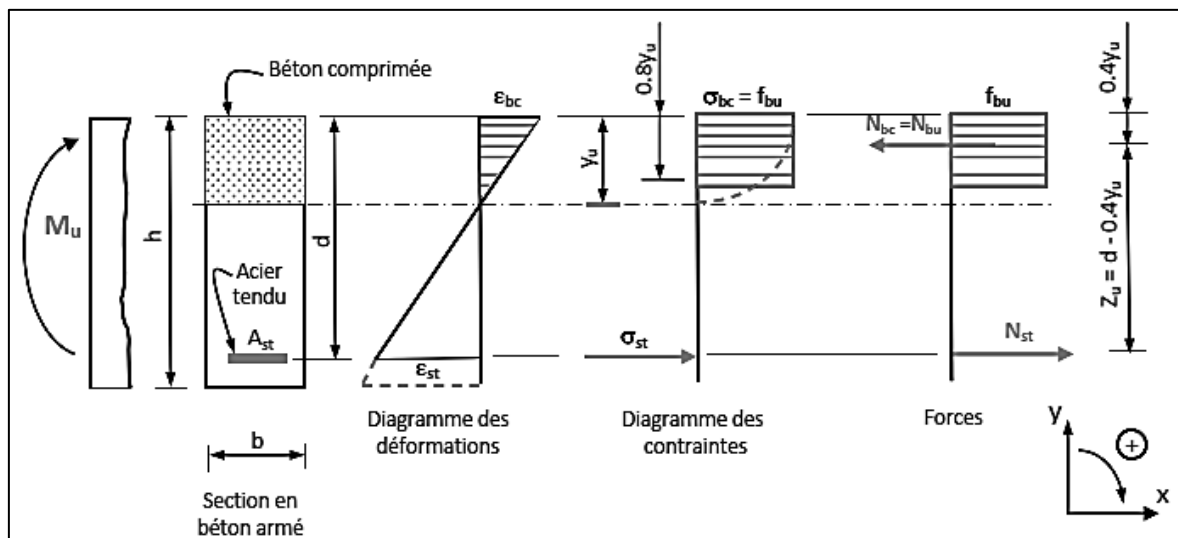


Figure. 5.4 : Diagrammes contrainte-déformation parabolé-rectangle et rectangulaire simplifié dans la section de béton comprimé.

L'équilibre des forces horizontales ( $\Sigma F_x = 0$ ) permet de déduire l'équation suivante :

$$0.8y_u \cdot b \cdot f_{bu} = A_{st} \cdot \sigma_{st} \quad (\text{Eq.5.5})$$

Avec:

- $A_{st}$  : Section d'acier tendu
- $\sigma_{st}$  : Contrainte dans l'acier
- $y_u$  : Hauteur de l'axe neutre
- $b$  : Largeur de la poutre
- $f_{bu}$  : Résistance du béton en compression

L'équilibre des moments ( $\Sigma M = 0$ ) permet de déduire l'équation suivante :

$$M_u = A_{st} \cdot \sigma_{st} \cdot Z_u \quad (\text{Eq.5.6})$$

Avec :  $Z_u = d - 0.4 \cdot y_u$

- Bras de levier  $Z_u$  : Distance entre la résultante béton et les aciers tendus
- $d$  : Hauteur utile

Le tableau 5.2 résume les paramètres adimensionnels fondamentaux d'une section rectangulaire

Tableau 5.2. Paramètres adimensionnels fondamentaux

Paramètre	Formule	Signification
$\alpha_u$	$\alpha_u = y_u d$	Profondeur relative axe neutre
$\beta_u$	$\beta_u = 1 - 0.4\alpha_u$	Bras de levier réduit
$\mu_u$	$\mu_u = M_u / b \cdot d^2 \cdot f_{bu}$	Moment réduit

- $\mu_u = 0.8\alpha_u (1 - 0.4\alpha_u)$
- $\alpha_u = 1.25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu_u})$

**(b) Domaines de rupture (Pivots A et B) (Voir Tableau 5.3)**

Tableau. 5.3. Domaines de rupture d'une section soumise à la flexion

Condition	Pivot	Déformations	Intervalle $\mu_u$
$\alpha_u < 0.167$	A	$\varepsilon_{bc} < 2\text{‰}$ , $\varepsilon_{st} = 10\text{‰}$	$\mu_u < 0.125$
$0.167 \leq \alpha_u < 0.259$	A	$2\text{‰} \leq \varepsilon_{bc} \leq 3.5\text{‰}$ , $\varepsilon_{st} = 10\text{‰}$	$0.125 \leq \mu_u < 0.186$
$0.259 \leq \alpha_u$	B	$\varepsilon_{bc} = 3.5\text{‰}$ , $\varepsilon_{st} \geq \varepsilon_l$	$\mu_u \geq 0.186$

**(c) Étapes de calcul à l'ELUR pour une section rectangulaire sans aciers comprimés**

Détermination de la section d'acier tendu  $A_s$  nécessaire pour équilibrer un moment ultime  $M_u$ .

- **Étape 1 : Calculer le moment réduit  $\mu_u$**  : par l'utilisation de l'équation suivante

$$\mu_u = \frac{M_u}{b \cdot d^2 \cdot f_{bu}} \quad (\text{Eq.5.7})$$

Avec,

$$f_{bu} = 0.85 \cdot \frac{f_{c28}}{\gamma_b} \quad (\text{Eq.5.8})$$

- **Étape 2 : Vérifier la nécessité d'aciers comprimés**

- **Condition** :  $\mu_u \leq \mu_{lim}$
- **Si  $\mu_u > \mu_{lim}$**  : → Section avec aciers comprimés (non traité ici).
- **Si  $\mu_u \leq \mu_{lim}$**  : → Poursuite sans aciers comprimés.

- **Etape 3 : Calculer la profondeur relative de l'axe neutre  $\alpha_u$** : par l'utilisation de l'équation suivante :

$$\alpha_u = 1.25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu_u}) \quad (\text{Eq.5.9})$$

• **Contraintes :**

- $\alpha_u$  doit être  $\leq \alpha_{lim} = 0.259$ .

- **Etape 4 : Déterminer la contrainte dans l'acier  $\sigma_{st}$**  : (Equation 4.10)

- Si  $\alpha_u \leq 0.259 \rightarrow \sigma_{st} = \frac{f_e}{\gamma_s}$  ( $\gamma_s = 1.15$ ) (Eq.5.10)

- **Justification** : L'acier est plastifié ( $\varepsilon_{st} \geq \varepsilon_{su} = 10\%$ ).

- **Etape 5 : Calculer le bras de levier réduit  $\beta_u$**  (Equation 4.11)

$$\beta_u = 1 - 0.4\alpha_u \quad (\text{Eq.5.11})$$

**Bras de levier** :  $Z_u = \beta_u \cdot d$

- **Etape 6 : Calculer la section d'acier  $A_{st}$**  : (Equation 4.12)

$$A_{st} = \frac{M_u}{(\sigma_{st} \cdot \beta_u \cdot d)} \quad (\text{Eq.5.12})$$

### 5.2.3.2 Section avec aciers comprimés

Lorsque le moment réduit  $\mu_u$  dépasse la limite  $\mu_{li}$  dans une section rectangulaire aux dimensions fixées ( $\mu_u > \mu_{li}$ ), le moment ultime  $M_u$  ne peut être équilibré par les seuls aciers tendus. On doit alors :

- **Placer des armatures comprimées ( $A_{sc}$ )** dans la zone comprimée (ces armatures participent à la reprise du moment excédentaire).
- **Renforcer la zone tendue** avec des aciers supplémentaires.

**Principe de calcul des sections d'armatures** (Voire la figure 5.5) :

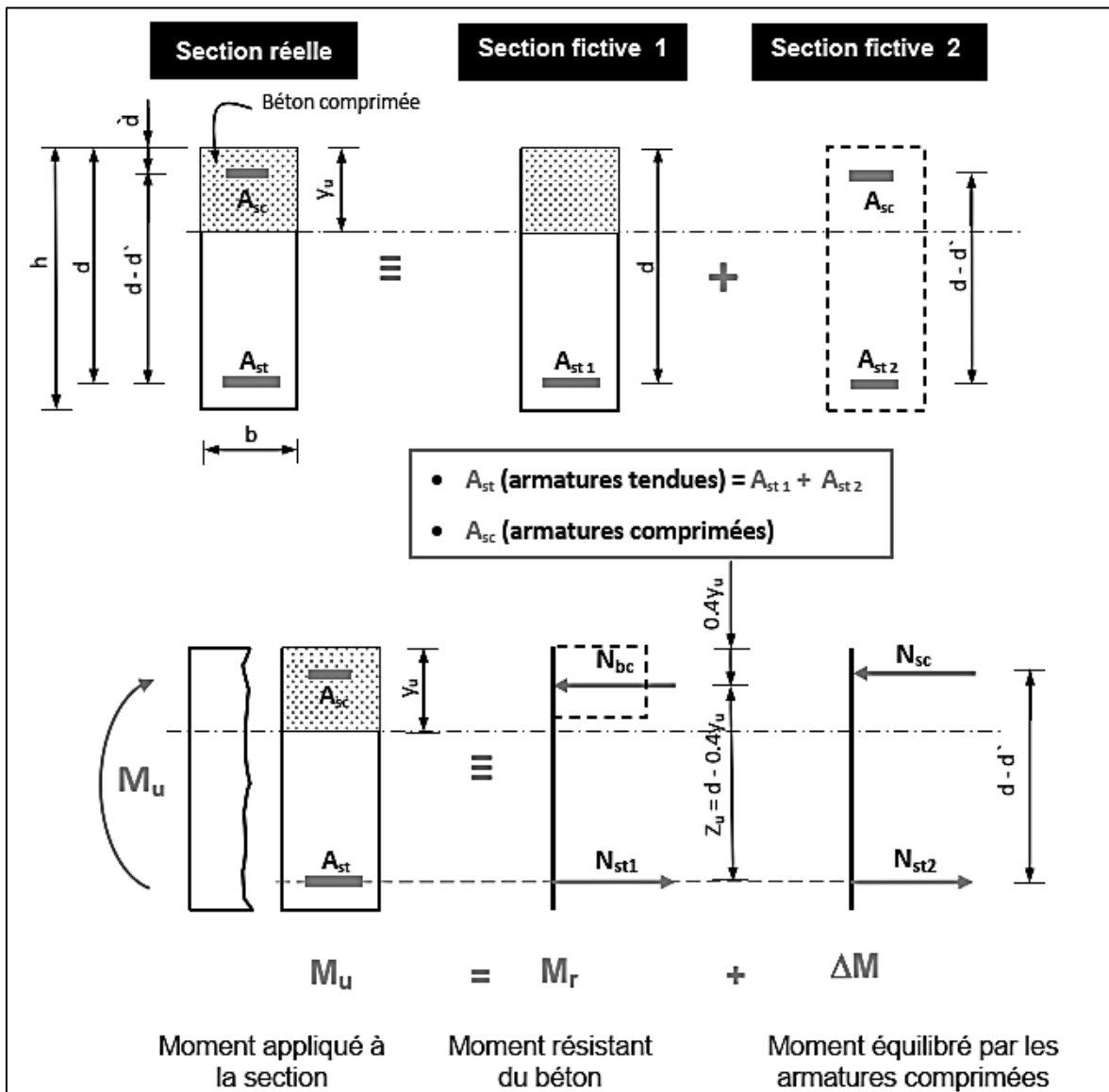


Figure. 5.5 : Principe de calcul à l'ELU d'une section rectangulaire avec aciers comprimés

- $M_r$  : Moment résistant maximal de la section sans aciers comprimés.
- $\Delta M$  : Moment résiduel à équilibrer par les aciers comprimés :

$$\Delta M = M_u - M_r$$

- **Section fictive 1** : Équilibre  $M_r$  avec les aciers tendus  $A_{st1}$ .
- **Section fictive 2** : Équilibre  $\Delta M$  avec un couple  $A_{st2}/A_{sc}$ .

$$N_{st} = N_{st1} + N_{st2} \quad (\text{Eq.5.13})$$

- **Calcul du moment résistant du béton  $M_r$  :**

Le moment résistant est calculé par l'utilisation de l'équation (Eq.5.7) pour déduire la formule suivante :

$$M_r = \mu_l b \cdot d^2 \cdot f_{bu} \quad (\text{Eq.5.14})$$

ou :  $\mu_l$  : le moment ultime réduit limite

- **Calcul du moment résiduel  $\Delta M$  :**

Le moment résiduelle présente la différence entre le moment ultime et le moment résistant selon l'équation suivante :

$$\Delta M = M_u - M_r \quad (\text{Eq.5.15})$$

- **Calcul des armatures tendues de la section fictive 1 ( $A_{st1}$ ):**

$$A_{st1} = \frac{M_r}{\sigma_{st} \cdot \beta_1 \cdot d} \quad (\text{voir paragraphe 5.2.2.1}),$$

On a :  $\varepsilon_{st} = \varepsilon_l \Rightarrow \sigma_{st} = f_{su}$  (voir Figure. 5.2 et Figure. 5.3)

Donc la section  $A_{st1}$  peut être écrite sous la forme suivante :

$$A_{st1} = \frac{M_r}{\sigma_{st} \cdot \beta_1 \cdot d} \quad (\text{Eq.5.16})$$

- **Calcul des armatures tendues de la section fictive 2 ( $A_{st2}$ ):**

Le moment résiduel en fonction de la force et de bras de levier peut être écrit sous la forme suivante :

$$\Delta M = N_{st2} \cdot (d - d') \quad (\text{Eq.5.17})$$

Avec :

$$N_{st2} = f_{su} \cdot A_{st2} \quad (\text{Eq.5.18})$$

En remplaçant (Eq. 4.18) dans (Eq. 5.17), on a :

$$\Delta M = f_{su} \cdot A_{st2} \cdot (d - d') \Rightarrow$$

$$A_{st2} = \frac{\Delta M}{f_{su} \cdot (d - d')} \quad (\text{Eq.5.19})$$

- **Calcul des armatures comprimées de la section fictive 2 ( $A_{sc}$ ):**

L'utilisation de la figure 5.5 permet de déduire l'égalité suivante :

$$N_{sc} = N_{st2} \quad (\text{Eq.5.20})$$

Avec

$$\Delta M = N_{sc} \cdot (d - d') \quad (\text{Eq.5.21})$$

La force de compression dans les aciers est donnée par l'équation suivante :

$$N_{sc} = \sigma_{sc} \cdot A_{sc} \quad (\text{Eq.5.22})$$

En remplaçant (Eq.5.22) dans (Eq.5.21)), on a :

$$\Delta M = \sigma_{sc} \cdot A_{sc} \cdot (d - d') \quad (\text{Eq.5.23})$$

Donc la section d'armature dans la section comprimée du béton est donnée par la formule suivante :

$$A_{sc} = \frac{\Delta M}{\sigma_{sc} \cdot (d - d')} \quad (\text{Eq.5.24})$$

- **Détermination de la contrainte de l'acier comprimé ( $\varepsilon_{sc}$ ):**

En se basant sur le principe des triangles semblables (Figure. 5.6), on a :

$$\frac{\varepsilon_{sc}}{3.5 \cdot 10^{-3}} = \frac{y_u - d'}{y_u} \Rightarrow \varepsilon_{sc} = 3.5 \cdot 10^{-3} \cdot \left( \frac{\alpha_l \cdot (d - d')}{\alpha_l \cdot d} \right) \quad (\text{Eq.5.25})$$

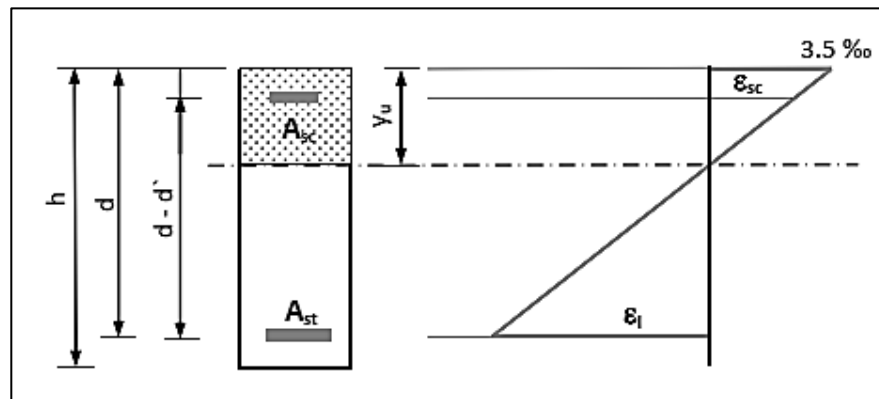


Figure 5.6. Diagramme de déformation d'une section doublement armée

- **Contrainte  $\sigma_{sc}$ :**

La contrainte de compression dans les aciers est donnée par la relation suivante :

$$\sigma_{sc} = \begin{cases} E_s \cdot \varepsilon_{sc} & \text{si } \varepsilon_{sc} < \varepsilon_l \\ f_{su} & \text{si } \varepsilon_{sc} \geq \varepsilon_l \end{cases}$$

Avec

$$\varepsilon_l = \frac{f_e}{E_s} \text{ (Déformation élastique de l'acier)}$$

- **Section totale d'armatures**

$$A_{st} = A_{st1} + A_{st2}$$

(Eq.5.26)

### 5.2.4 Section en T

Dans les structures en béton armé (bâtiments, ponts, etc.), les poutres principales supportent fréquemment des dalles pleines ou hourdis. Physiquement, ces éléments travaillent ensemble sous les charges :

- La dalle repose sur les poutres et leur transmet les charges verticales.
- Sous flexion positive (moment fléchissant vers le bas), la partie supérieure de la poutre est comprimée.

Pour les poutres associées à des dalles (bâtiments, ponts), le BAEL permet d'intégrer une portion du hourdis comme table de compression. Cette largeur effective  $b_{eff}$  est calculée en ajoutant à la largeur de l'âme  $b_0$  des extensions symétriques de part et d'autre, limitées par trois conditions (Figure. 5.7) :

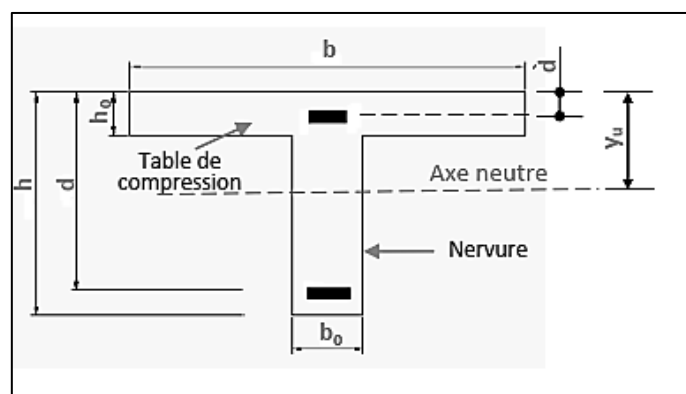


Figure. 5.7 : Élément en béton armé de section en forme d'un T

**Les 3 limites réglementaires (par côté de l'âme) sont :**

Pour chaque côté de la nervure, la largeur participante ne doit pas dépasser la plus petite valeur parmi :

1.  $\frac{\ell}{2}$ 
  - $\ell$  = distance entre faces externes des nervures adjacentes.
  - Justification : Évite le chevauchement des zones de compression entre poutres voisines.
2.  $\frac{L}{10}$ 
  - L = portée libre de la travée.
  - Justification : Limite l'influence des effets de bord et du cisaillement longitudinal.
3.  $\frac{2}{3}d_a$ 
  - $d_a$  = distance entre la section calculée et l'appui extrême le plus proche.
  - Justification : Prend en compte la réduction de l'efficacité de la table près des appuis (effort tranchant élevé).

**Formule de calcul complète** : la largeur efficace de la table est donnée par l'équation suivante :

$$b_{\text{eff}} = b_0 + 2 \times \min \left\{ \frac{\ell}{2}, \frac{L}{10}, \frac{2}{3} d_a \right\} \quad (\text{Eq.5.27})$$

Où :

- $b_0$  = largeur de l'âme,
- Le terme  $\min \{ \dots \}$  s'applique **symétriquement** de chaque côté de l'âme.

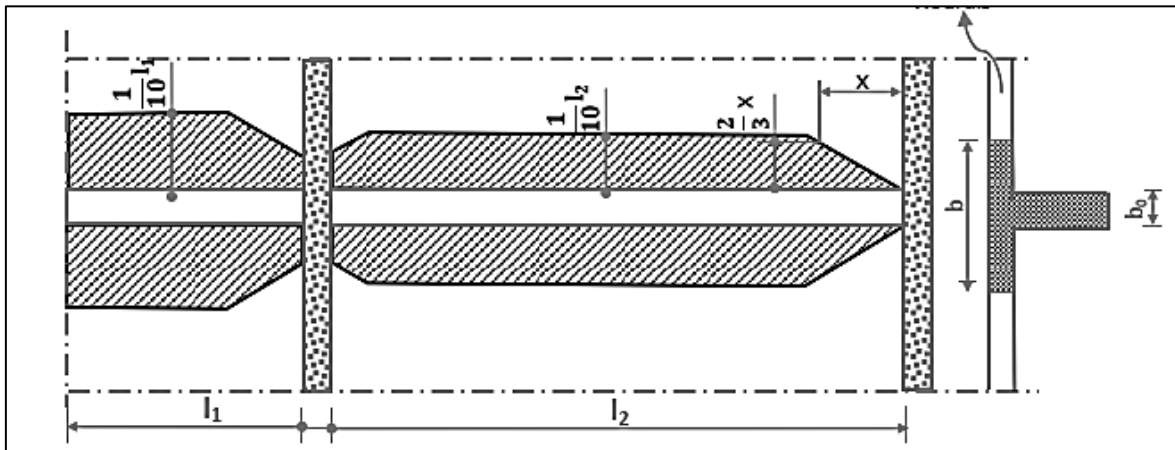


Figure 5.8. Largeur de la table de compression

### • Exemple

Contexte :

- Largeur âme ( $b_0$ ) : 30 cm
- Distance entre nervures ( $\ell$ ) : 250 cm
- Portée (L) : 800 cm

- Distance à l'appui ( $d_a$ ) : 200 cm

Calcul des limites (par côté) :

1.  $\frac{l}{2} = \frac{250}{2} = 125 \text{ cm}$
2.  $\frac{L}{10} = \frac{800}{10} = 80 \text{ cm}$
3.  $\frac{2}{3}d_a = \frac{2}{3} \cdot 200 = 133.33 \text{ cm}$

Valeur retenue :  $\{125, 80, 133.33\} = 80 \text{ cm}$  (par coté)

Longueur totale  $b_{eff} := 30 + 2 \times 80 = 190 \text{ cm}$

#### 5.2.4.1 Section sans aciers comprimés

Dans une poutre en T, la partie comprimée peut se situer soit uniquement dans la table de compression (la dalle), soit s'étendre aussi dans la nervure (l'âme verticale). La position de la fibre neutre (l'axe où les déformations sont nulles) détermine laquelle de ces deux situations se produit. Savoir si la fibre neutre est dans la table ou dans la nervure est crucial pour le calcul de la section d'acier nécessaire.

Pour trancher entre les deux cas sans avoir à résoudre complètement l'équation d'équilibre, on utilise un moment de référence appelé moment équilibré par la table ( $M_t$ ). C'est le moment maximal que la section peut supporter si toute la compression est reprise uniquement par la table de compression, et que la fibre neutre est juste à la base de cette table.

$$M_t = b \cdot h_0 \cdot \left(d - \frac{h_0}{2}\right) f_{bu} \quad (\text{Eq 5.28})$$

$b$  : Largeur de la table de compression (mm)

$h_0$  : Épaisseur de la table de compression (mm)

$d$  : Hauteur utile de la section (distance de la fibre comprimée extrême au centre de gravité des aciers tendus) (mm)

$f_{bu}$  : Contrainte de calcul du béton en compression à l'ELU ( $\text{N/mm}^2$  ou MPa).

Cette formule représente le bras de levier ( $d - h_0/2$ ) (distance entre le centre de gravité des aciers tendus et le centre de gravité de la table comprimée) multiplié par la force de compression maximale que peut développer la table ( $b \cdot h_0 \cdot f_{bu}$ ). C'est bien le moment maximal que la table seule peut équilibrer.

#### Les deux cas : Comparaison entre $M_t$ et $M_u$

##### (a) Premier Cas : $M_t \geq M_u$

Le moment de flexion sollicitant la section ( $M_u$ ) est inférieur ou égal au moment maximal que la table seule peut équilibrer ( $M_t$ ). La zone comprimée est entièrement contenue dans l'épaisseur de la table ( $h_0$ ). La fibre neutre est située dans la table (au-dessus de la nervure) (Figure 5.9). Dans ce cas, la nervure n'intervient pas dans la reprise de la compression. On peut donc ignorer complètement la nervure pour le calcul des aciers.

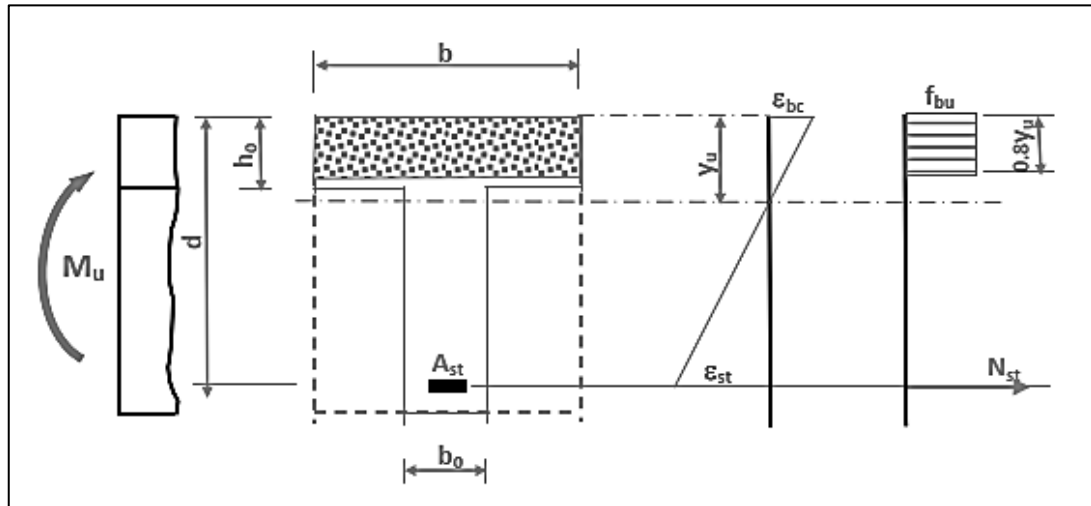


Figure 5.9. Principe de calcul à l'ELU d'une section en T, avec :  $M_t \geq M_u$

On dimensionne la section d'acier tendu ( $A_s$ ) comme s'il s'agissait d'une section rectangulaire classique (Voir paragraphe : 5.2.3).

Les dimensions de cette section rectangulaire fictive sont :

- **Largeur** : La largeur de la table ( $b$ )
- **Hauteur utile** : La hauteur utile réelle de la poutre ( $d$ )

On utilise la méthode standard pour les sections rectangulaires sans aciers comprimés (paragraphe 5.2.2 de votre document), par exemple :

(b) **Deuxième Cas** :  $M_t < M_u$  (Non détaillé dans votre extrait, mais c'est la suite logique)

Le moment de flexion sollicitant la section ( $M_u$ ) est **supérieur** au moment maximal que la table seule peut équilibrer ( $M_t$ ). La table seule est **insuffisante** pour reprendre toute la compression. La zone comprimée **s'étend nécessairement dans la nervure**. La fibre neutre est située dans la nervure.

Le calcul devient plus complexe. Il faut alors considérer la section réelle en T. Généralement, on décompose la section (Figure 5.10) :

- Une partie rectangulaire de largeur  $b$  (la table) équilibrant un moment  $M_t$ .
- Une partie rectangulaire de largeur  $b_0$  (largeur de la nervure) équilibrant le moment résiduel  $M_u - M_a$ .
- On calcule la section d'acier correspondant à chacune de ces parties et on les additionne.

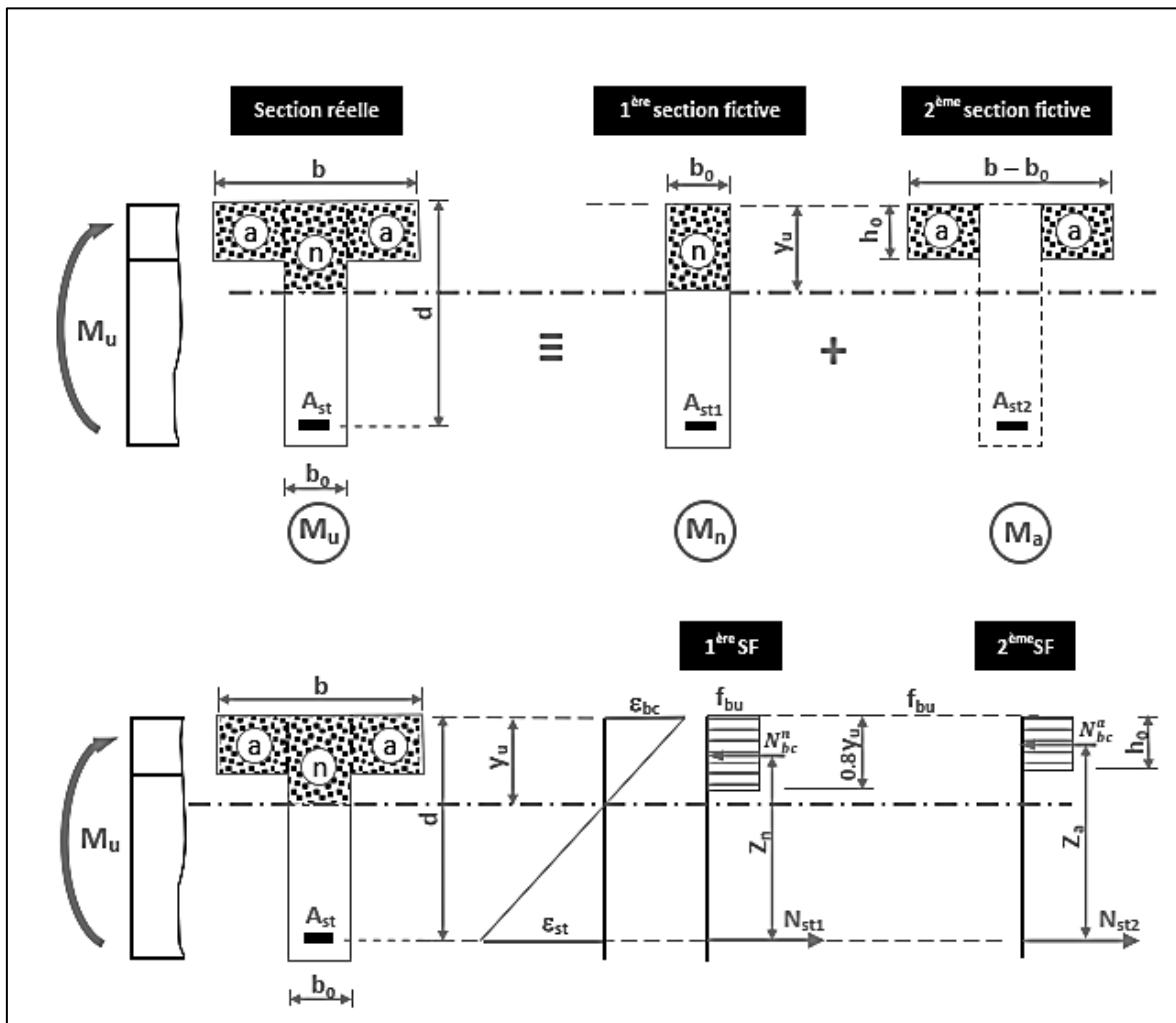


Fig. 5.10: Principe de calcul à l'ELU d'une section en T, avec :  $M_t < M_u$

$M_u$  : Moment ultime appliqué

$M_a$  : Moment repris par la table

$M_n$  : Moment repris par la nervure comprimée

- **Section d'acier totale :**

$$A_{st} = A_{st1} + A_{st2} \quad (\text{Eq.5.29})$$

$A_{st1}$  : Acier nécessaire pour équilibrer  $M_n$  (nervure)

$A_{st2}$  : Acier nécessaire pour équilibrer  $M_a$  (table)

- **Calcul de  $M_a$  (Moment équilibré par la table) :**

Le moment équilibré par la table est donné par la relation suivante :

$$M_a = (b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu} \cdot \left(d - \frac{h_0}{2}\right) \quad (\text{Eq.5.30})$$

Avec :

$(b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu}$  : Force de compression dans la table (aire  $\times$  contrainte).

$\left(d - \frac{h_0}{2}\right)$  : Bras de levier (distance entre aciers tendus et centre de gravité de la table).

Concrètement : C'est le même calcul que  $M_t$  dans l'étape précédente, mais appliqué uniquement aux "débords" de la table (largeur  $b-b_0$ ).

- **Calcul de  $M_n$  (Moment équilibré par la nervure) :**

Le moment équilibré par la nervure présente la différence entre le moment ultime et le moment de la table (aile) selon la relation suivante :

$$M_n = M_u - M_a \quad (\text{Eq.5.31})$$

Le moment non repris par la table ( $M_u - M_a$ ) doit être repris par la partie comprimée de la nervure.

- **Calcul de  $A_{st1}$  (Acier pour la nervure)**

On traite la nervure comme une section rectangulaire de largeur  $b_0$  :

**Étape 1 :** Moment réduit de la nervure :

$$\mu_{bu} = \frac{M_n}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}} \quad (\text{Eq.5.32})$$

**Étape 2 :** Comparer  $\mu_{bu}$  au moment réduit limite  $\mu_l$  (dépendant de l'acier et du béton):

- Si  $\mu_{bu} \leq \mu_l \rightarrow$  **Pas d'aciers comprimés** (pivot A ou B).
- Si  $\mu_{bu} > \mu_l \rightarrow$  **Aciers comprimés nécessaires** (pivot B).

**Étape 3** (sans aciers comprimés) :

- Calculer  $\alpha_u = 1.25(1 - 1 - 2\mu_{bu})$
- Calculer  $\beta_u = 1 - 0.4\alpha_u$  (coefficient de bras de levier).
- Calculer  $\sigma_{st}$  (contrainte dans les aciers tendus) :
- Pivot A :  $\sigma_{st} = f_{su}$
- Pivot B :  $\sigma_{st} = \frac{f_{su}}{\gamma_s} \cdot \frac{\alpha_u - 0.8}{\alpha_u}$

La section d'acier au niveau de la nervure est donnée par l'équation ci-dessous :

$$A_{st1} = \frac{M_n}{\sigma_{st} \cdot \beta_u \cdot d} \quad (\text{Eq.5.33})$$

- **Calcul de  $A_{st2}$  (Acier pour la table) :**

La section des aciers tendus au niveau de la table est la suivante :

$$A_{st2} = \frac{(b-b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu}}{f_{su}} \quad (\text{Eq.5.34})$$

Ou :

$(b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu}$  : Force de compression dans la table.

$f_{su}$  : Contrainte de calcul de l'acier ( $f_{su} = f_e / \gamma_s$ ).

Équilibre des forces : La compression dans la table est équilibrée par  $A_{st2}$ , donc

$$A_{st2} \cdot f_{su} = (b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu}$$

- **Section d'acier totale**

$$A_{st} = A_{st1} + A_{st2}$$

#### 5.2.4.2 Section avec aciers comprimés

Cette méthode s'applique lorsque la nervure seule ne peut équilibrer le moment  $M_n$  sans dépasser la capacité de compression du béton (Figure. 5.11). On ajoute alors des aciers comprimés ( $A_{sc}$ ) pour renforcer la zone comprimée.

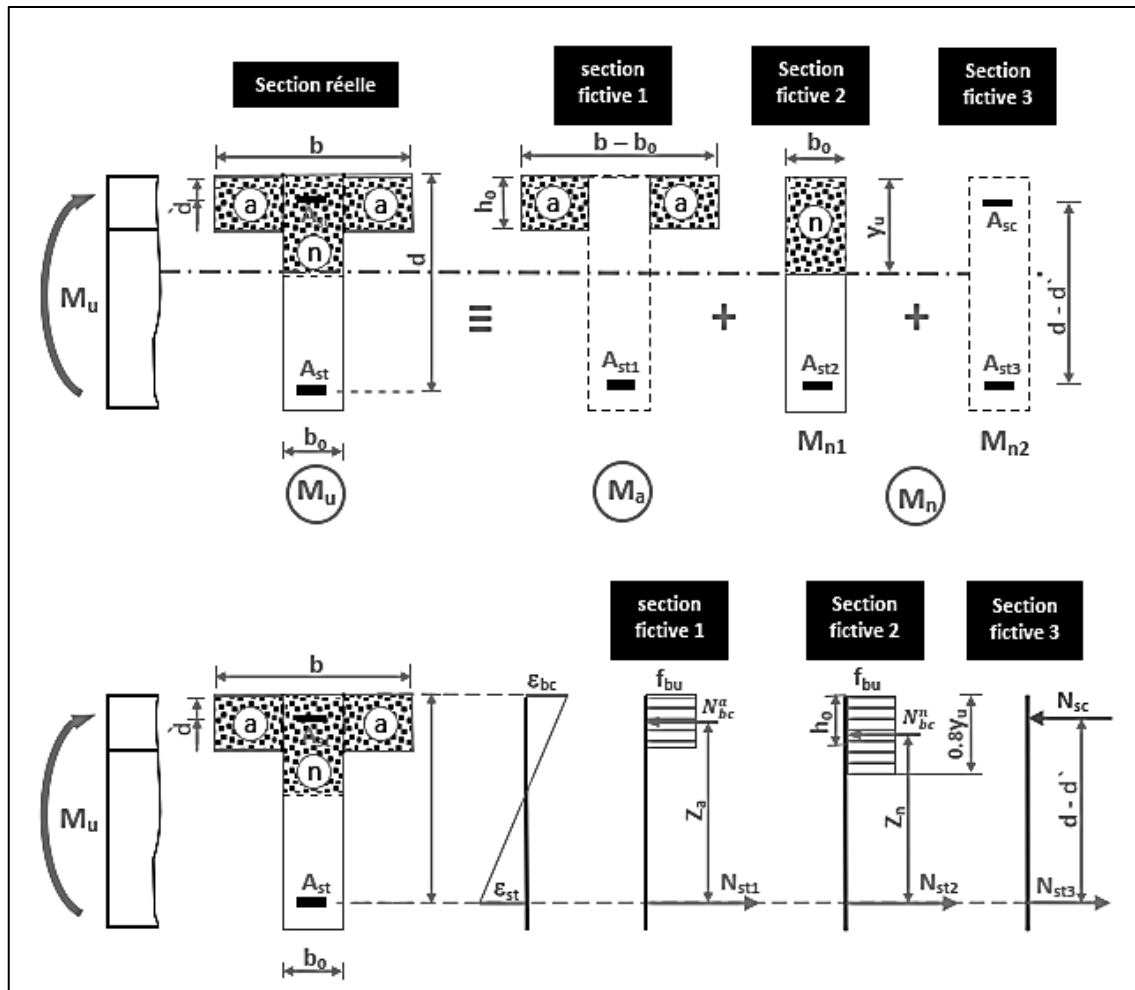


Figure. 5.11 : Principe de calcul à l'ELU d'une section en T avec aciers comprimés

**Principe de superposition** permet d'écrire :  $M_u = M_a + M_n$

Donc :  $M_n = M_{n1} + M_{n2} \Rightarrow M_u = M_a + M_{n1} + M_{n2}$

et :  $A_{st} = A_{st1} + A_{st2} + A_{st3}$

Etape de calcul de la section des armatures d'une poutre en forme T :

**(a) Calcul de  $M_a$  et de  $M_n$  :**

Identique à la méthode des sections en T *sans* aciers comprimés..

**(b) Calcul de la section fictive 1 (table comprimée)**

Moment équilibré par la table :

$$M_a = N_{bc}^a \cdot Z_a = N_{st1} \cdot Z_a = A_{st1} \cdot f_{su} \cdot \left(d - \frac{h_0}{2}\right) \quad (\text{Eq.5.35})$$

Section d'acier tendu associée est donnée par la relation suivante :

$$A_{st1} = \frac{M_a}{f_{su} \cdot \left(d - \frac{h_0}{2}\right)} \quad (\text{Eq.5.36})$$

**(c) Calcul de la section fictive 2 (Nervure sans aciers comprimés)**

On a comme donnés  $\mu_l$ ,  $\alpha_l$  et  $\beta_l$

- **Moment résistant maximal du béton (contrainte limite) :**

$$M_r = \mu_l \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{bu} = M_{n1}$$

- **Moment résiduel à équilibrer  $M_{n2}$  :**

$$M_{n2} = M_n - M_{n1}$$

- **Acier tendu pour la nervure (la section fictive  $A_{st2}$ ) :**

$$A_{st2} = M_{n2} / (f_{su} \cdot \beta_l \cdot d) \quad (\text{Eq.5.37})$$

### **Calcul de la section fictive 3 (Aciers comprimés)**

- **Section théorique des armatures comprimées ( $A_{sc}$ ):**

$$M_{n2} = \sigma_{sc} \cdot A_{sc} \cdot (d - d') \Rightarrow A_{sc} = M_{n2} / (\sigma_{sc} \cdot (d - d')) \quad (\text{Eq.5.38})$$

Où  $\sigma_{sc}$  est déterminé via la déformation  $\varepsilon_{sc} = 3.5 \cdot 10^{-3} \cdot \left( \frac{\alpha_l \cdot (d - d')}{\alpha_l \cdot d} \right)$

- **Aciers tendus complémentaires ( $A_{st3}$ ) :**

$$M_{n2} = N_{st3} \cdot (d - d') \quad (\text{Eq.5.39})$$

$$N_{st3} = f_{su} \cdot A_{st3} \quad (\text{Eq.5.40})$$

En remplaçant (5.39) dans (5.37), on a:  $M_{n2} = f_{su} \cdot A_{st3} \cdot (d - d')$

$$A_{st3} = \frac{M_{n2}}{f_{su} \cdot (d - d')} \quad (\text{Eq.5.41})$$

- **Section théorique totale des armatures tendues :**

$$A_{st} = A_{st1} + A_{st2} + A_{st3}$$

- **Section théorique des armatures comprimées :  $A_{sc}$**

## **5.3 Les justifications vis-à-vis de l'E.L.S**

### **5.3.1. Objectif des vérifications à l'E.L.S**

Les justifications à l'E.L.S concernent la durabilité de la structure en phase d'exploitation. Elles visent à contrôler :

- La fissuration des éléments en béton armé
- Les déformations excessives
- La stabilité à long terme

### **5.3.2. Méthodes de justification**

Deux approches sont possibles :

- **Vérification directe des contraintes**

Contrôle du respect des limites réglementaires :

- Contrainte de compression du béton
- Contrainte de traction des aciers

- **Méthode comparative :** Calcul de la section d'armature requise à l'E.L.S et comparaison avec celle obtenue à l'E.L.U.R.

### **5.3.3. Règles de priorité selon le degré de fissuration :**

Justification : En cas de FTP (milieux agressifs), la maîtrise de la fissuration est primordiale pour la durabilité, d'où la priorité donnée à l'E.L.S (Tableau 5.4).

Tableau 5.4 Dimensionnement et vérification des sections selon le type de fissuration

Type de fissuration	Dimensionnement initial	Vérification
Peu préjudiciable (FPP)	E.L.U	E.L.S
Préjudiciable (FP)	E.L.U	E.L.S
Très préjudiciable (FTP)	E.L.S	E.L.U

### 5.3.4. Hypothèses de calcul

Les hypothèses de calcul pour les vérifications à l'État Limite de Service (E.L.S) reposent sur les postulats suivants :

#### 5.3.4.1. Hypothèse de Navier-Bernoulli

Les sections planes restent planes après déformation :

La distribution des déformations est linéaire sur la hauteur de la section.

#### 5.3.4.2. Adhérence parfaite

Absence de glissement entre aciers et béton :

Les déformations sont compatibles à l'interface acier-béton ( $\varepsilon_s = \varepsilon_b$ ).

#### 5.3.4.3. Négligence du béton tendu

Le béton tendu est considéré comme non résistant :

Seule la zone comprimée participe à la résistance.

#### 5.3.4.4. Comportement élastique linéaire

Lois de Hooke applicables :

- Béton :  $\sigma_{bc} = E_b \cdot \varepsilon_{bc}$
- Acier :  $\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s$

- Coefficient d'équivalence n

Paramètre	Valeur	Signification
n	15	Rapport $n = E_s / E_b$

Une section d'acier  $A_s$  est équivalente à une section fictive de béton  $n \cdot A_s$ .

L'homogénéisation permet de ramener toute la section à un matériau unique (béton fictif). Les contraintes dans l'acier s'en déduisent par amplification d'un facteur n.

Ces hypothèses permettent d'appliquer la méthode des sections homogénéisées :

1. Calcul du centre de gravité de la section homogène (béton + acier transformé en béton)
2. Détermination du moment d'inertie équivalent  $I_{\text{equiv}}$

### 3. Calcul des contraintes de flexion :

La méthode privilégiée est la vérification directe des contraintes. Elle exige :

- **Respect de la contrainte limite de compression du béton :** (Voire chapitre 2)
- **Respect de la contrainte limite de traction des aciers :** (Voire Chapitre 2)

#### 5.3.5 Combinaisons d'actions

Pour les vérifications à l'État Limite de Service (E.L.S), la combinaison d'actions de base dans les cas courants est :  $G + Q$

#### 5.3.6. Caractéristiques géométriques

##### 5.3.6.1. Position de 'axe neutre pour une section rectangulaire homogénéisée :

L'axe neutre (AN) passe par le centre de gravité de la section homogénéisée. Le moment statique par rapport à l'AN est nul (Figure 5.12):

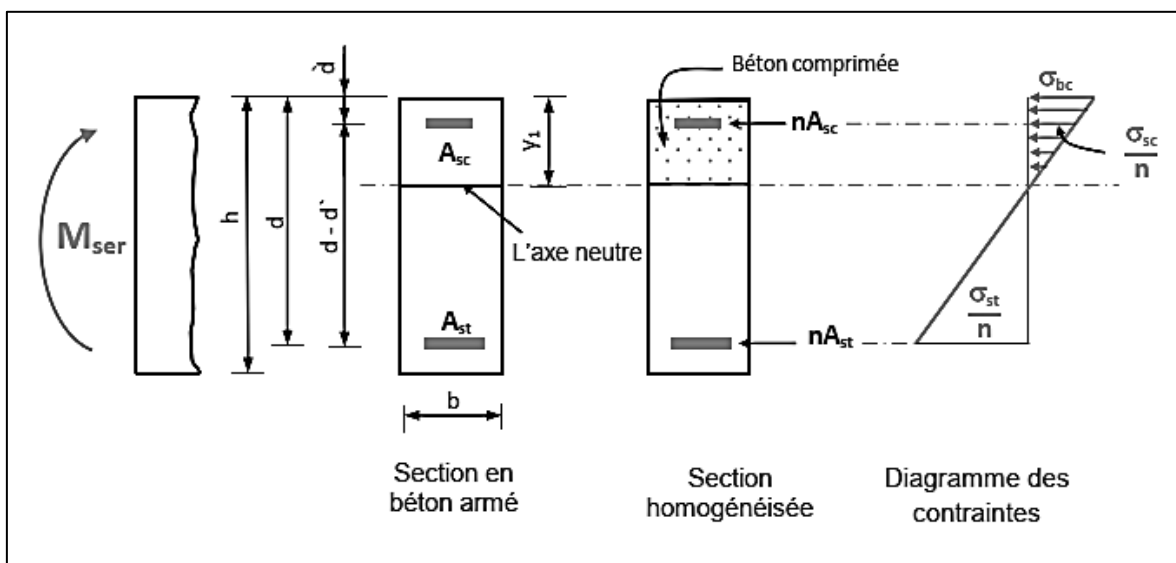


Figure 5.12. Section rectangulaire avec armatures comprimées

- Pour une section rectangulaire avec armatures comprimées ( $A_{sc} \neq 0$ ) (Fig. 5.12):

$$M_s/G_x=0 \Rightarrow b \frac{y_1^2}{2} + nA_{sc}(y_1 - d') - nA_{st}(d - y_1) = 0 \quad (\text{Eq.5.42})$$

Les valeurs de  $y_1$  sont obtenues en résolvant cette équation de deuxième degré à une inconnue.

$y_1$  : la distance entre la fibre la plus comprimée de la section et l'axe neutre.

- Pour une section rectangulaire sans armatures comprimées ( $A_{sc} = 0$ ), l'équation (5.42) devient :

$$b \frac{y_1^2}{2} - nA_{st}(d - y_1) = 0 \quad (\text{Eq.5.43})$$

##### 5.3.6.2. Position de 'axe neutre pour une section en T homogénéisée :

Pour déterminer la position de l'axe neutre (AN) dans une section en T homogénéisée, on utilise la propriété fondamentale :

Le moment statique de la section homogénéisée par rapport à l'AN est nul.

$$H = \frac{b}{2} h_0^2 + nA_{sc}(h_0 - d') - nA_{st}(d - h_0) = 0 \quad (\text{Eq.5.44})$$

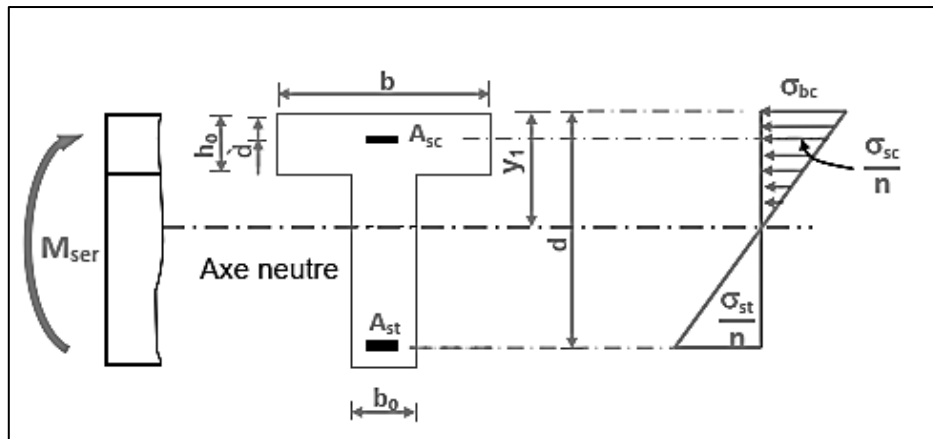


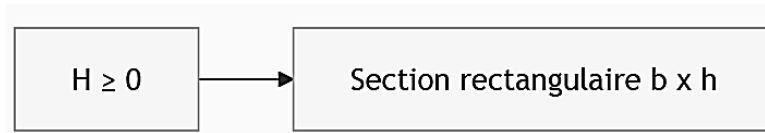
Figure. 5.13. Section en T avec armatures comprimées.

La position de l'axe neutre ( $y$ ) dans une section en T homogénéisée est déterminée par le signe du paramètre  $H$  (moment statique relatif). Deux cas distincts se présentent :

**(a) . Cas où l'axe neutre est dans la table de compression**

- **Condition** :  $H \geq 0$
- **Position** :  $y \leq h_0$

La section se comporte comme une **section rectangulaire pleine** de largeur  $b$  (largeur de la table).

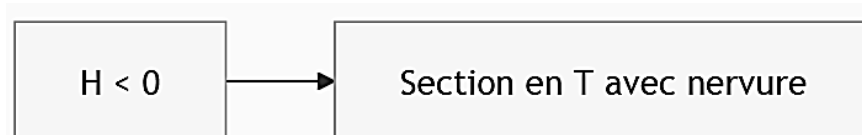


$$b \frac{y_1^2}{2} + nA_{sc}(y_1 - d') - nA_{st}(d - y_1) = 0$$

**(b) Cas où l'axe neutre est dans la nervure**

- **Condition** :  $H < 0$
- **Position** :  $y > h_0$

La section fonctionne comme une véritable section en T (nécessitant le calcul spécifique des caractéristiques de la nervure)



$$b \frac{y_1^2}{2} - (b - b_0) \frac{(y_1 - h_0)^2}{2} + nA_{sc}(y_1 - d') - nA_{st}(d - y_1) = 0 \quad (\text{Eq.5.45})$$

**5.3.6.3 Moment d'inertie par rapport à l'axe neutre pour une section rectangulaire**

- (a) Pour une section rectangulaire avec armatures comprimées ( $A_{sc} \neq 0$ ) (Figure. 5.12)

$$I_x = b \frac{y_1^3}{3} + nA_{sc}(y_1 - d')^2 + nA_{st}(d - y_1)^2 \quad (\text{Eq.5.46})$$

(b) Pour une section rectangulaire sans armatures comprimées ( $A_{sc} = 0$ )

$$I_x = b \frac{y_1^3}{3} + nA_{st}(d - y_1)^2 \quad (\text{Eq.5.47})$$

### 5.3.6.3 Moment d'inertie par rapport à l'axe neutre pour une section T é

(a) L'axe neutre est dans la table, dans ce cas, le moment d'inertie est donné comme suit :

$$I_x = \frac{y_1^3}{3} + nA_{sc}(y_1 - d')^2 + nA_{st}(d - y_1)^2 \quad (\text{Eq.5.48})$$

(b) L'axe neutre est dans la nervure, dans ce cas,  $y_1$  est déterminé par l'équation des moments statiques par rapport à l'axe neutre:

$$I_x = b \frac{y_1^3}{3} - (b - b_0) \frac{(y_1 - h_0)^3}{3} + nA_{sc}(y_1 - d')^2 - nA_{st}(d - y_1)^2 \quad (\text{Eq.5.49})$$

### 5.3.7. Calcul des contraintes du béton et de l'acier

À l'État Limite de Service, le comportement élastique linéaire du béton et de l'acier permet de déterminer les contraintes par la théorie des poutres en flexion

Contrainte de compression du béton est donnée par l'équation suivante :

$$\sigma_{bc} = \frac{M_{ser}}{I_x} y_1 \quad (\text{Eq.5.50})$$

Contrainte de compression des aciers selon la formule ci-dessous:

$$\sigma_{sc} = n \frac{M_{ser}}{I_x} (y_1 - d') \quad (\text{Eq.5.51})$$

Contrainte de traction des aciers (Eq.5.52):

$$\sigma_{st} = n \frac{M_{ser}}{I_x} (d - y_1) \quad (\text{Eq.5.52})$$

### 5.3.8 Vérification des contraintes

Les valeurs de  $\sigma_{bc}$ ,  $\sigma_{sc}$  et  $\sigma_{st}$  sont comparées avec les contraintes limites :

$$\overline{\sigma}_{bc}, \overline{\sigma}_{sc}, \text{ et } \overline{\sigma}_{bt}, \quad (\text{Eq.5.53})$$

### 5.4. Condition de non-fragilité

La condition de non fragilité conduit à placer une section minimale d'armatures tendues pour une dimension de coffrage donnée.

Pour les pièces de section rectangulaire soumises à la flexion simple, on a:

$$A_{st} \geq 0.23 \cdot b \cdot d \cdot \frac{f_{t28}}{f_e} \quad (\text{Eq.5.54})$$

## 5.5. Application:

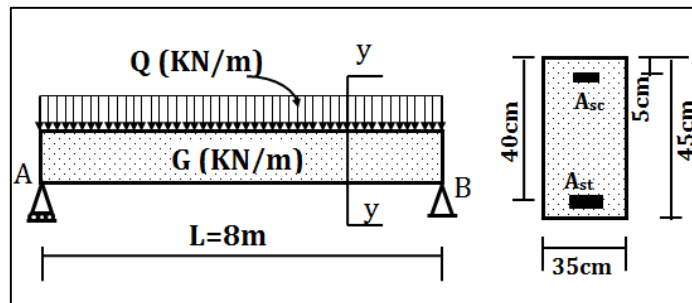
### 5.5.1. Exercice 1

Soit une poutre simplement appuyée (Figure ci-dessous) de longueur  $L = 8$  m.

La poutre est en béton armé, représente les caractéristiques suivantes :

$b=35\text{cm}$ ,  $h=45\text{cm}$ ,  $d=40\text{cm}$ ,  $d' = 5\text{cm}$

- Charges d'exploitation:  $Q = 12 \text{ kN/m}$ , Durée d'application des charges  $> 24\text{h}$
- Béton:  $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$  - Acier: HA FeE 400
- La masse volumique du béton :  $D=25\text{KN/m}^3$
- Calculer la section des armatures longitudinales nécessaires à l'ELU au niveau de la partie la plus sollicitée.



**Solution:**

### Calcul des charges et sollicitations

- **Poids propre de la poutre :**

$$G = b \times h \times \gamma_{\text{béton}} = 0.35 \times 0.45 \times 25 = 3.9375 \text{ kN/m}$$

- **Charge totale à l'ELU :**

$$P_u = 1.35G + 1.5Q = 1.35 \times 3.9375 + 1.5 \times 12 = 23.3156 \text{ kN/m}$$

- **Moment fléchissant maximal (mi-travée) :**

### Caractéristiques des matériaux

- **Béton :**  $f_{c28}=30\text{MPa}$

$$f_{bu}=0.85 \times f_{c28} / 1.5 = 17\text{MPa}$$

- **Acier :** FeE400

$$\sigma_{st}=400/1.15=347.83\text{MPa}$$

### Moment ultime

$$M_u = P_u \cdot L^2 / 8 = 186.52 \text{ kNm}$$

### Calcul du moment réduit et vérification

- **Moment réduit :** (Eq 5.7)

$$\mu_u = \frac{M_u}{b \cdot d^2 \cdot f_{bu}} = \frac{186.52 \cdot 10^3}{350 \cdot (400)^2 \cdot 17}$$

$\mu_u = 0.196 > 0.186$  **Pivot B** (section partiellement comprimée, mais aciers tendus plastifiés). Donc :  $\varepsilon_{bc} = 3.5\text{‰}$

$$\mu_u = 0.196 < \mu_l = 0.392 \text{ (Fe400)} \quad A_{s'}=0$$

$$\alpha_u = 1.25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu_u}) = 0.2752$$

$$\beta_u = 1 - 0.4\alpha_u = 0.8899$$

**Bras de levier :**  $Z_u = \beta_u \cdot d = 35.597 \text{ cm}$

$$A_{st} = \frac{M_u}{(\sigma_{st} \cdot \beta_u \cdot d)} = \frac{186.525 \cdot 10^6}{(347.8355 \cdot 97.400)} = 15.065 \text{ cm}^2$$

**Vérification des sections minimales et maximales**

- **Section minimale** : Chapitre 2 (Eq.2.8)

$$f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 2.4 \text{ MPa}$$

$$A_{smin} \geq \frac{0.23 \cdot b \cdot d \cdot f_{t28}}{f_e} \geq \frac{0.23 \cdot 350 \cdot 400 \cdot 2.4}{400} = 1.932 \text{ cm}^2$$

- **Section maximale** :

$$A_{max} = 0.05 bh = 0.05 \times 35 \times 45 = 78.75 \text{ cm}^2$$

**Vérification :**

$$1.93 \text{ cm}^2 < 15.06 \text{ cm}^2 < 78.75 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{OK.}$$

**5.5.2. Exercice 2:**

On considère une poutre en béton armé de section en T, soumise à un moment fléchissant ultime (Figure ci-dessous).

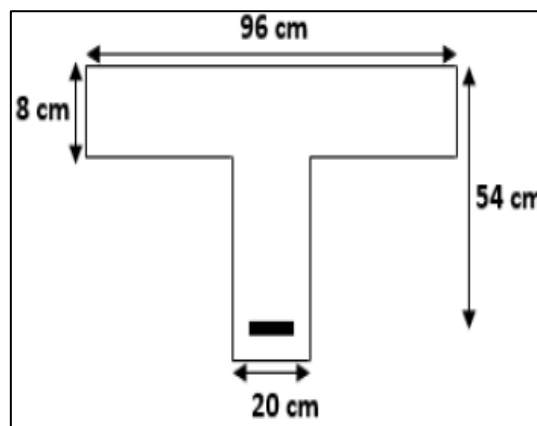
Les données :

- Matériaux : Béton :  $f_{c28} = 16 \text{ MPa}$

Acier : feE400 (type HA)

- Charges appliquées : Moment ultime :  $M_u = 370 \text{ KN.m}$

On demande de calculer la section des armatures nécessaires à l'État Limite Ultime de Résistance (ELUR).

**Solution :**

Position de l'axe neutre :  $f_{bu} = 0,85 \cdot f_{c28} / \gamma_b = 9,07 \text{ MPa}$

$$M_t = b \cdot h_0 \cdot \left( d - \frac{h_0}{2} \right) f_{bu} = 0.96 \cdot 0.08 \cdot \left( 0.54 - \frac{0.08}{2} \right) 9.07$$

$$M_t = 348.16 \text{ KNm}$$

Donc :  $M_u = 370 \text{ KN.m} > M_t = 348,16 \text{ KN.m}$

Axe neutre dans la nervure et le calcul se fait pour section en T

$$M_n = M_u - M_a$$

$$M_u = M_1 + M_2$$

$$M_a = (b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu} \cdot \left( d - \frac{h_0}{2} \right) = (0.96 - 0.2) * 0.08 * 9.07 * \left( 0.54 - \frac{0.08}{2} \right)$$

$$M_a = 275.728 \text{ KNm}$$

$$M_n = M_u - M_a = 370 - 275.728 = 94.272 \text{ KNm}$$

$$\mu_{bu} = \frac{M_n}{b_0 \cdot d^2 \cdot f_{bu}} = \frac{94.272 \cdot 10^6}{200 \cdot 540^2 \cdot 9.07} = 0.178$$

$$\mu = 0, 178 < 0, 187 \rightarrow \text{Pivot A ; } \varepsilon_s = 10 \text{ ‰} \rightarrow \sigma_s = f_e / \gamma_s = 348 \text{ MPa}$$

$$\alpha_u = 1.25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu_u}) = 0.247$$

$$\text{Bras de levier : } Z_u = \beta_u \cdot d = d(1 - 0.4 \alpha) = 48.6648 \text{ cm}$$

$$A_{st1} = \frac{M_n}{\sigma_{st} \cdot \beta_u \cdot d} = \frac{94.272 \cdot 10^6}{(347.83 \cdot 486.648)} = 556.658 \text{ mm}^2$$

$$A_{st1} = 5,56 \text{ cm}^2$$

$$A_{st2} = \frac{(b - b_0) \cdot h_0 \cdot f_{bu}}{f_{su}} = \frac{(960 - 200) * 800 * 9.07}{347.83} = 1548.64 \text{ mm}^2$$

$$A_{st2} = 15.84 \text{ cm}^2$$

**Armature finale en ELUR est :**

$$A_{st} = A_{st1} + A_{st2} = 5.56 + 15.84 = 21.4 \text{ cm}^2, A_{s'} = 0$$

**Vérification des sections minimales et maximales**

- **Section minimale :** Chapitre 2 (Eq.2.8)

$$f_{t28} = 0.6 + 0.06 f_{c28} = 1.56 \text{ MPa}$$

$$A_{smin} \geq \frac{0.23 \cdot b \cdot d \cdot f_{t28}}{f_e} \geq \frac{0.23 * 960 * 400 * 1.56}{400} = 0.97 \text{ cm}^2$$

$$A_{st} = 21.4 \text{ cm}^2 = 7\text{HA}20 = 21.99 \text{ cm}^2$$

Armature dans la section comprimée (Table: 3HA12)

