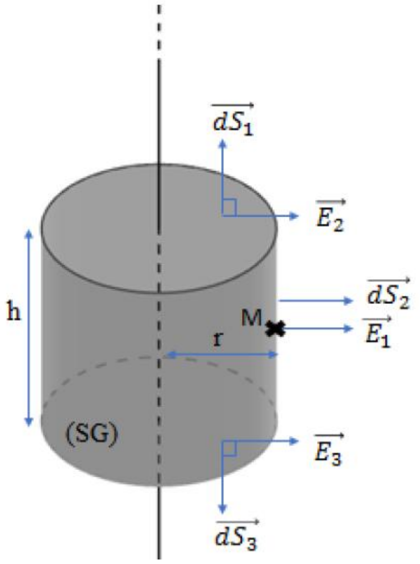
حل السلسلة 3

1-سلك مستقيم لا نهائي الطول يحمل كثافة شحنية خطية λ ثابتة وموجبة



بسبب التناظر يكون الحقل الكهربائي $\vec{E}$ قطريا ولا يتعلق الا بالبعد r اذن نختار سطح غوص S_G اسطوانة نصف قطرها r وارتفاعها h فيكون لدينا التدفق:

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_G} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$=> \Phi_{SG} = \iint \overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{dS_1} + \iint \overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{dS_2} + \iint \overrightarrow{E_3}.\overrightarrow{dS_3} = \iint E_1 dS_1$$

حيث لدينا:

$$\overrightarrow{E_1} \parallel \overrightarrow{dS_1}, \overrightarrow{E_2} \perp \overrightarrow{dS_2} \text{ و} \overrightarrow{E_3} \perp \overrightarrow{dS_3}$$

وبما ان E_1 ثابت على S_3 لانه لا يتعلق الا بالبعد r

$$=> \Phi = E_1 \iint dS_1 = E_1 S_1 = E 2\pi r h$$

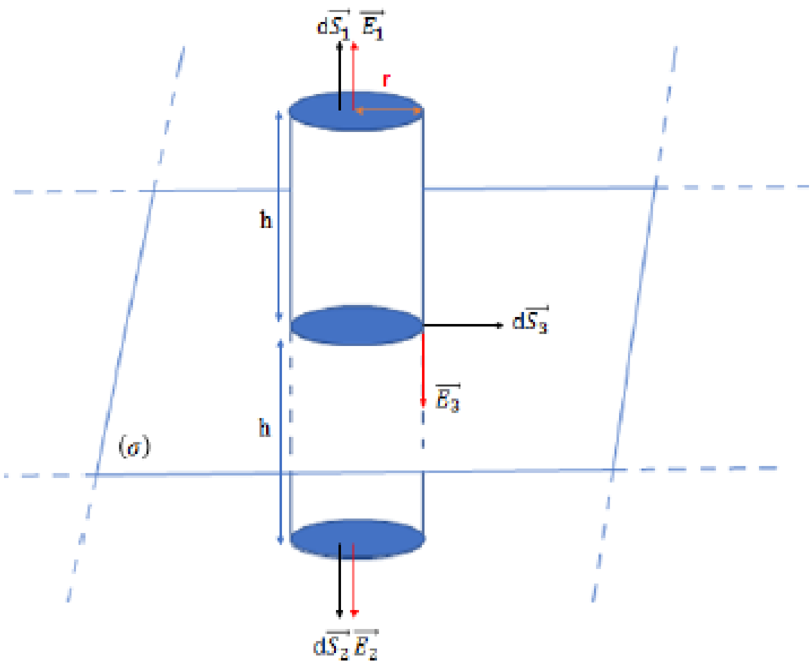
إيجاد Q_{int} :

$$Q_{int} = \int dq = \int \lambda \, dl = \int_0^h \lambda dz = \lambda h$$

اذن:

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi r}}$$

2-مستوي لا نهائي يحمل كثافة شحنية سطحية σ ثابتة وموجبة



بسبب التناظر يكون الحقل الكهربائي $\vec{E}$ عموديا على المستوي ∞ و لا يتعلق الا بالبعد z فنختار سطح عوص S_Gأسطوانة نصف قطرها r و ارتفاعها 2h و ينصفها المستوي ∞

اذن:

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_G} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$=> \Phi_{SG} = \iint \overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{dS_1} + \iint \overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{dS_2} + \iint \overrightarrow{E_3}.\overrightarrow{dS_3} = \iint \overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{dS_1} + \iint \overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{dS_2}$$

لان:

$$\overrightarrow{E_3} \perp \overrightarrow{dS_3} => \iint \overrightarrow{E_3}.\overrightarrow{dS_3} = 0$$

وحيث لدينا:

$$\overrightarrow{E_1} \parallel \overrightarrow{dS_1} \text{ و } \overrightarrow{E_2} \parallel \overrightarrow{dS_2}$$

و بما ان E_1 ثابت على S_3 لانه لا يتعلق الا بالبعد r

$$=> \Phi = \iint E_1 dS_1 + \iint E_2 dS_2 = E_1 \iint dS_1 + E_2 \iint dS_2 = E_1 S_1 + E_2 S_2$$

نلاحظ ان $E_1=E_2=E$ لانهما على نفس البعد h و ($S_1=S_2=S$= القاعدة)

اذن:

$$\phi = 2ES = 2E\pi r^2$$

إيجاد Q_{int} :

$$Q_{int} = \int dq = \int \sigma\, dS = \sigma S = \sigma \pi r^2$$

اذن:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

3-أسطوانة لا نهائية الطول نصف قطرها R تحمل كثافة شحنية حجمية ρ ثابتة وموجبة

بسبب التناظر يكون الحقل الكهربائي $\vec{E}$ قطريا و لا يتعلق الا بالبعد القطري r اذن نختار سطح غوص S_G اسطوانة نصف قطرها r وارتفاعها h فيكون لدينا التدفق:

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_G} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$=> \Phi_{SG} = \iint \overrightarrow{E_1}.\overrightarrow{dS_1} + \iint \overrightarrow{E_2}.\overrightarrow{dS_2} + \iint \overrightarrow{E_3}.\overrightarrow{dS_3} = \iint E_1 dS_1$$

حيث لدينا:

$$\overrightarrow{E_1} \parallel \overrightarrow{dS_1}, \overrightarrow{E_2} \perp \overrightarrow{dS_2} \text{ و } \overrightarrow{E_3} \perp \overrightarrow{dS_3}$$

وبما ان E_1 ثابت على S_3 لأنه لا يتعلق الا بالبعد r

$$=> \Phi = E_1 \iint dS_1 = E_1 S_1 = E 2\pi r h$$

إيجاد Q_{int} :

$$Q_{int} = \int dq = \int \rho\, dV = \rho \pi r^2 h$$

أ- المنطقة I (r <R) :

$$E_I 2\pi r h = \frac{Q_I}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0}$$

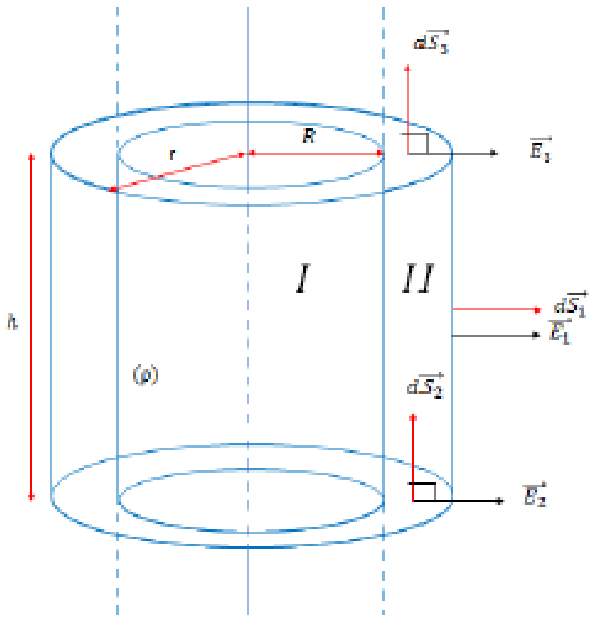
$$\boxed{E_I = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r}$$

ب- المنطقةII(r >R):

$$E_{II} 2\pi r h = \frac{Q_{II}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \pi R^2 h}{\varepsilon_0}$$

اذن:

$$\boxed{E_{II} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$



4-كره نصف قطرها R تحمل كثافة شحنية سطحية σ ثابتة وموجبة

بسبب التناظر يكون الحقل الكهربائي $\vec{E}$ قطريا و لا يتعلق الا بالبعد القطري r اذن نختار سطح غوص S_G كره نصف قطرها r ومتمركزه مع الكره المشحونةفيكون لدينا التدفق:

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{dS_G} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

وبما ان $\vec{dS} \parallel \vec{E}$ وE مستقل عن $S(\varphi,\theta)$ فيكون

$$\Phi = ES = E4\pi r^2$$

إيجاد Q_{int} :

أ- المنطقة I $(r < R)$:

$$Q_I = \iint \sigma dS = 0 \;\; =>$$

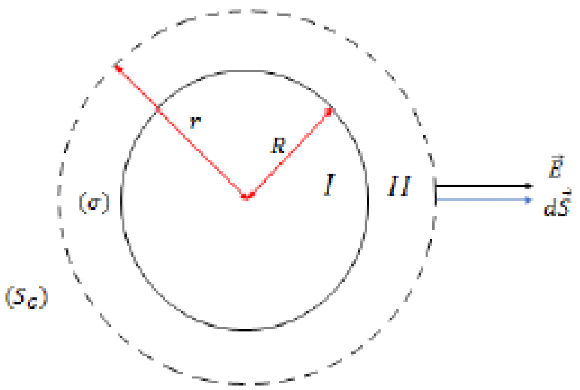
$$\boxed{E_I = 0}$$

ب- المنطقةII(r >R):

$$Q_{II} = \iint \sigma dS = \iint \sigma R^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = \sigma R^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\theta} d\theta = \sigma 4\pi R^2$$

اذن:

$$\boxed{E_{II} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}}$$



التمرين2:

1- احسب المجال والكمون الكهربائيين في نقطة M كيفية لكرة نصف قطرها R تحمل شحنة حجمية ρ ثابتة وموجبة. نأخذ $V(\infty) = 0$.

2-ارسم كل من E(r) و V(r) و استنتج سطوح تساوي الكمون.

الحل:

1- حساب المجال والكمون الكهربائيين في نقطة M كيفية لكرة نصف قطرها R تحمل شحنة حجمية ρ ثابتة وموجبة. بأخذ $V(\infty) = 0$.

$E\ =?$

بسبب التناظر يكون الحقل الكهربائي $\vec{E}$ قطريا و لا يتعلق الا بالبعد القطري r اذن نختار سطح غوص S_G كرة نصف قطرها r ومتمركزة مع الكرة المشحونة فيكون لدينا التدفق:

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_G} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

وبما ان $d\vec{S} \parallel \vec{E}$ و E مستقل عن $S(\varphi,\theta)$ فيكون

$$\Phi = ES = E4\pi r^2$$

إيجاد Q_{int} :

أ- المنطقة I $(r < R)$:

$Q_I = \iiint_0^r \rho dV = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$ وبعد التعويض نجد: $\boxed{E_I = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r}$

ب- المنطقة II $(r > R)$:

$$Q_{II} = \iiint_0^R \rho dV = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

اذن:

$$\boxed{E_{II} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}}$$

$V\ =?$

بالتعريف لدينا: $V(r) = -\int \vec{E}.d\vec{r} + C$

أ- المنطقة II $(r > R)$:

$$V_{II} = -\int \overrightarrow{E_{II}}.d\vec{r} + C_{II} = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int \frac{\overrightarrow{U_r}.d\vec{r}}{r^2} + C_{II}\ ;\ \overrightarrow{U_r}.d\vec{r} = dr$$

$$V_{II} = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2} + C_{II} = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right) + C_{II} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}.\frac{1}{r} + C_{II}$$

$$V(\infty) = 0 => \boxed{V_{II} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} . \frac{1}{r}} \qquad (C_{II} = 0)$$

ب'- المنطقةI(r <R):

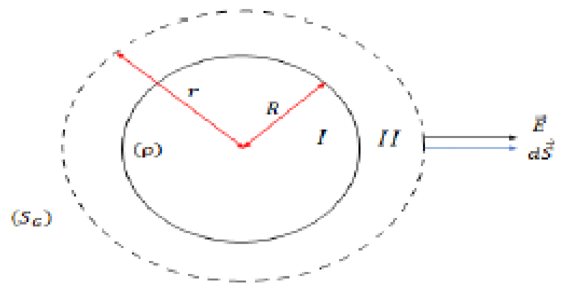
$$V_I = -\int \overrightarrow{E_I} . d\vec{r} + C_I = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r dr + C_I V_I = -\int \overrightarrow{E_I} . d\vec{r} + C_I$$

بسبب استمرارية الكمون فان:

$$V_I(R) = V_{II}(R) => C_I = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

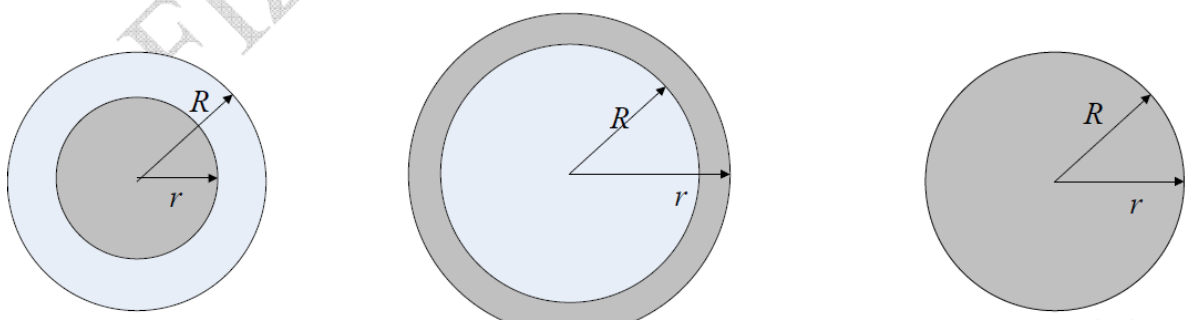
اذن:

$$\boxed{V_I = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}}$$



مساحة غوص الملائمة هنا هي كرة نصف قطرها r. بتطبيق قانون غوص:

$$\Phi = \oint \vec{E}.d\vec{S} \Rightarrow \Phi = \oint_S E.dS \Rightarrow E.S = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \qquad (55.1)$$



(ا) (ب) (ج)

❖ $R \succ r$: الشكل 33.1 –ا– جزء فقط من الشحنة التي تحملها الكرة محصور داخل سطح غوص:

$$E.4\pi r^2 = \frac{\rho.V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho.\frac{4}{3}\pi.r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.r} \qquad (56.1)$$

E يتناسب طردا مع البعد r .

❖ $R \prec r$: الشكل33.1 –ب- كل الشحنة التي تحملها الكرة موجودة داخل سطح غوص:

$$E.4\pi r^2 = \frac{\rho.V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho.\frac{4}{3}\pi.R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.\frac{R^3}{r^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \qquad (57.1)$$

الكرة و كأنها شحنة نقطية.

❖ $r = R$:الشكل 33.1 –ج- سطح غوص منطبق مع سطح الكرة:

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.\frac{R^3}{R^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}.R} \qquad (58.1)$$

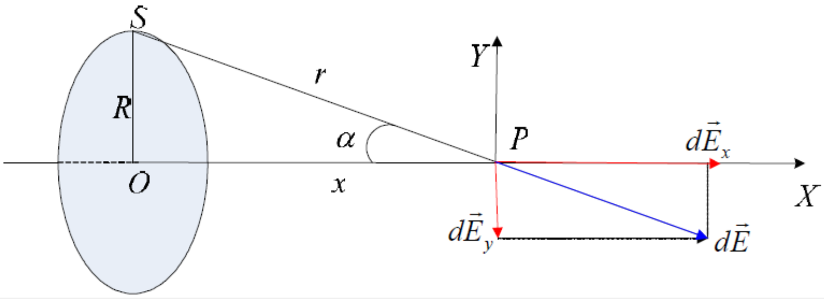
شدة الحقل الكهربائي على سطح الكرة ثابت.

التمرين 9.1

الحقل الكهربائي العنصري $d\vec{E}$ الناتج في النقطة P عن شحنة عنصرية dq من السلك هو :
$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y \Rightarrow d\vec{E} = dE_x.\vec{i} + dE_y.\vec{j}$$

بسبب التناظر فإن $\vec{E}_y = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_x$

$$\left.\begin{array}{l} dE = k\dfrac{dq}{r^2} \\ dE_x = dE.\cos\alpha \\ dq = \lambda.dl \end{array}\right| \Rightarrow dE_x = k\frac{dq}{r^2}.cos\alpha \Rightarrow dE_x = k\frac{\lambda dl}{r^2}.cos\alpha$$



في المثلث القائم POS:
$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \Rightarrow dE_x = \frac{k\lambda x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}dl \quad ;$$
$$E_x = \frac{k\lambda x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow E_x = \frac{k\lambda x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}.2\pi R$$
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda x R}{2.\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\vec{i}} \Leftrightarrow \boxed{E = \frac{\lambda x R}{2.\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}}(V.m^{-1})$$

2/حساب الجهد الكهربائي:
$$dV = k\frac{dq}{r} \;,\; dV = k\frac{\lambda dl}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}} \Rightarrow V = k\frac{\lambda}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}}\int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow \boxed{V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{\left(x^2+R^2\right)}}}(V)$$

3/تعيين النقطة ذات الحقل الكهربائي الأعظمي: لكي يكون الحقل أعظميا يجب أن تكون مشتقته بالنسبة لـــ x معدومة: $\left.\frac{dE_x}{dx}\right|_M = 0$ و لذا نبدأ بحساب هذه المشتقة.
$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\left(x^2+R^2\right)^{3/2} - \frac{3}{2}(2x)\left(x^2+R^2\right)^{1/2}x}{(x^2+R^2)^3}\right] = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}\cdot\left(x^2+R^2-3x^2\right)}{(x^2+R^2)^3}\right]$$

العلاقة النهائية: $\boxed{\frac{dE_x}{dx} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R^2-2x^2}{(x^2+R^2)^{5/2}}\right]}$

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \Rightarrow R^2 - 2x_{max} = 0 \Rightarrow \boxed{x_{max} = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}}$$