Abdelhafid Boussouf University - Mila
Faculty of Science and Technology
Common Core ST Department
Module: Analysis 2

Academic Year: 2025/2026
1st Year Common Core ST
And 1st Year Engineering
Semester II

Analysis II: Tutorial Exercise Sheet 1

Exercise 01:

Classify each of the following differential equations by determining the **order**, the **dependent** and **independent variables**, and whether the equation is **ordinary** or **partial**.
صنف كلا من المعادلات التفاضلية التالية من خلال تحديد الرتبة و المتغير التابع و المتغير المستقل وإذا ماكانت عادية أو جزئية.

1. $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + (t^2 - n^2)y = 0$
2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
3. $\dfrac{dx}{dy} + x = y^3$
4. $\left(\dfrac{d^3r}{d\theta^3}\right)^2 + \dfrac{dr}{d\theta} = \cos(\theta)$
5. $(x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy = 0$
6. $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$

Exercise 02:

For each of the following differential equations, determine whether the given function is a solution. If it is a solution, state whether it is a **general solution** or not.
من أجل كل من المعادلات النفاضلية التالية، حدد إذا ما كانت المعادلة المعطاة حلا. إذا كانت حلا، حدد إذا ماكانت حلا عاما أو لا.

1. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0, \quad y = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)$
2. $xy' - 2y = 0, \quad y = 5x^2$
3. $y'' - y' = 0, \quad y = Ce^x$
4. $(y')^2 + y^2 = 1, \quad y = \sin(x + C)$

Exercise 03:

For each of the following differential equations, the general solution is given. Determine the **particular solution** that satisfies the indicated initial conditions.
من أجل كل من المعادلات التفاضلية التالية، الحل العام معطى. عين الحل الخاص الذي يحقق الشروط الإبتدائية المشار إليها.

1. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0,\ y = Ce^{-2x},\ y(0) = 5$
2. $y'' - y = 0,\ y = C_1e^x + C_2e^{-x},\ y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$
3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,\ x(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t),\ x(0) = A, \quad x'(0) = 0.$
4. Verify if $y = x^3$ is the **general solution** for $y' = 3x^2$. Explain why or why not.
تحقق مما إذا كانت المعادلة $y = x^3$ هي الحل العام للمعادلة $y' = 3x^2$. اشرح السبب أو عدمه.

Exercise 04:

Show that the indicated function is the exact solution for the given boundary-value or initial-value problem. (أثبت أن الدالة المشار إليها هي الحل الدقيق لمسألة القيمة الحدية أو القيمة الابتدائية المعطاة.)

1. $y''(x) + y(x) = 2\cos x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \quad y(x) = x\sin x.$
2. $\frac{dy}{dt} - 2y = 4, \quad y(0) = 1,\ y(t) = 3e^{2t} - 2.$

Exercise 05:

Solve the following differential equations: (حل المعادلات التفاضلية التالية)

1. $\frac{dy}{dx} - 2x = 0,$
2. $\frac{dy}{dx} + 3y = 0.$
3. $y'(x^2 + 1) - 2xy = 0,$
4. $\sqrt{x^2 + 1}\, dy = xy\, dx.$
5. $y\, dx - x\, dy = 0.$
6. $(1 + u)v\, du + (1 - v)u\, dv = 0.$
7. $(1 + y)\, dx - (1 - x)\, dy = 0.$
8. $(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$
9. $(y - a)\, dx + x^2\, dy = 0.$
10. $z\, dt - (t^2 - a^2)\, dz = 0.$
11. $\frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}.$
12. $(1 + s^2)\, dt - \sqrt{t}\, ds = 0.$
13. $(1 + x^2)\, dy - \sqrt{1 - y^2}\, dx = 0.$
14. $\sqrt{1 - x^2}\, dy - \sqrt{1 - y^2}\, dx = 0.$
15. $(t - y^2 t)\, dt + (y - t^2 y)\, dy = 0.$

Exercise 06:

Find the particular solution of the differential equations: (أوجد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية:)

1. $(1 + e^{-x})y' = e^{-x}, \quad y(0) = 0.$
2. $(4x + xy^2)dx + (y + x^2 y)dy = 0, \quad y(1) = 2.$
3. $2xy\, dx + (x^2 + 1)\, dy = 0. \quad y(0) = 2$
4. $\frac{dy}{dx} + 3y = 8, \quad y(0) = 2 \text{ and } y(0) = 4.$

Exercise 07:

Solve the following differential equations: (حل المعادلات التفاضلية التالية:)

1. $(2x + y)dx - xdy = 0.$
2. $(2x^3 + y^3)\, dx - 3xy^2\, dy = 0.$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x+4y}{2x-y}.$
4. $\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 6x^2.$
5. $y' + 2xy = 1.$
6. $x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3 \cos 4x.$

Exercise 08:

Solve the following differential equations: (حل المعادلات التفاضلية التالية:)

1. $\frac{dx}{dt} - x = t + 2t^2$
2. $\frac{dx}{dt} - 4tx = t^3$
3. $\frac{dy}{dx} + 3y = 5x^2 + 2$
4. $\frac{dy}{dx} - 2xy = e^{x^2}\sin x$
5. $x\frac{dy}{dx} + 3y = \frac{\ln x}{x^2}$
6. $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sec^3 x$
7. $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^3$
8. $\frac{dx}{dt} + \frac{2x}{t} = \cos t$
9. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = (x + 1)^2 e^{-x}$
10. $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 2x\csc x$
11. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x\ln x} = \frac{1}{x^2}$
12. $\frac{dy}{dx} + 4y = 3e^{-4x} + 2\sin 2x$
13. $t\frac{dx}{dt} + 4x = e^t$
14. $\frac{dx}{dt} - (2\cot 2t)x = \cos t$
15. $\frac{dx}{dt} + 6t^2 x = t^2 + 2t^5$

Exercise 09:

Solve the following differential equations: (حل المعادلات التفاضلية التالية:)

1. $(3y - 7x + 7)\,dx - (3x - 7y - 3)\,dy = 0$
2. $(x + 2y + 1)\,dx - (2x + 4y + 3)\,dy = 0$
3. $(x + 2y + 1)\,dx - (2x - 3)\,dy = 0$
4. $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0$
5. $(2x - 3y + 4)\,dx + (3x - 2y + 1)\,dy = 0$
6. $(x - 2y + 5)\,dx - (2x - y + 4)\,dy = 0$
7. $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y + 1)\,dy = 0$
8. $(3x + 2y - 5)\,dx - (2x + 3y - 5)\,dy = 0$
9. $(4x - y + 7)\,dx + (x + 3y - 2)\,dy = 0$
10. $(x - y)\,dx + (x + y + 2)\,dy = 0$
11. $(x + y)\,dx + (x - y + 2)\,dy = 0$
12. $(2x + y - 3)\,dx - (4x + 2y + 5)\,dy = 0$
13. $(2x + 3y - 1)\,dx + (4x + 6y + 2)\,dy = 0$
14. $(3x - 5y + 1)\,dx + (x + y + 2)\,dy = 0$
15. $(x + 3y)\,dx - (3x + y - 6)\,dy = 0$
16. $(x - y - 1)\,dx + (x + y + 3)\,dy = 0$

Exercise 10:

Solve the following differential equations: (حل المعادلات التفاضلية التالية:)

1. $y' + xy = x^3y^3$
2. $(1 - x^2)y' - xy - axy^2 = 0$
3. $y' + \dfrac{2}{x}\,y = x^2y^4$
4. $xy' + y = x^2y^2$
5. $y' + y = e^x y^2$
6. $2xy\,y' + (1 + x)y^2 = e^x$
7. $y' + y\tan x = y^4 \sec x$
8. $xy' + y = x^3y^6$
9. $3y^2y' - ay^3 - x - 1 = 0$
10. $y'(x^2y^3 + xy) = 1$
11. $(y\,\mathrm{Log}\,x - 2)y\,dx = x\,dy$
12. $y - y'\cos x = y^2\cos x(1 - \sin x)$

Exercises 12

Solve the following differential equations using the appropriate substitution (missing dependent or independent variable). (حل المعادلات التفاضلية التالية باستخدام التعويض المناسب (المتغير التابع أو المستقل المفقود).)

1. $y'' + 2y' = 4x$ (missing y)
2. $1 + yy'' + (y')^2 = 0$ (missing x)
3. $y'' = 1 + (y')^2$ (missing x)
4. $xy'' + y' = 0$ (missing y)
5. $y'' + 2y(y')^3 = 0$ (missing x)
6. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$ (missing y)
7. $y'' = (y')^2$ (missing x and y)
8. $yy'' = (y')^2$ (missing x)

Exercises 12:

For each of the following linear homogeneous differential equations with constant coefficients, write the corresponding characteristic equation. Do not solve the differential equation; only write the characteristic polynomial.

من أجل كل معادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات معاملات ثابتة من المعادلات التالية، اكتب المعادلة المميزة المناظرة لها. لا تقم بحل المعادلة التفاضلية؛ اكتب فقط كثير الحدود المميز.

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 2y' + 5y = 0$
4. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
5. $y^{(4)} - y = 0$
6. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
7. $y'' + 9y = 0$
8. $y'' - 2y' + y = 0$
9. $y''' - y' = 0$
10. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$
11. $y''' - 3y' + 2y = 0$
12. $y^{(5)} - y^{(4)} = 0$
13. $y''' + 4y'' + 5y' = 0$
14. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$
15. $y'' + 2y' + 10y = 0$

Exercises 13:

For each of the following sets of functions, compute the Wronskian $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ and determine whether the functions are linearly independent on the given interval (if no interval is specified, assume $\mathbb{R}$).
لِكل مجموعة من الدوال التاليةِ، احسب الفورسكيان $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ ، و حدد ما إذا كانتِ الدوال مستقِلة خطيا على المجال المعطى (إذا لم يحدد المجال، افترِض أنه $\mathbb{R}$).

1. $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$
2. $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$
3. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$
4. $f_1(x) = e^{2x}$, $f_2(x) = e^{-3x}$
5. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$
6. $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^x \cos x$, $f_3(x) = e^x \sin x$
7. $f_1(x) = \cosh x$, $f_2(x) = \sinh x$
8. $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = \ln x^2$ (on $x > 0$)
9. $f_1(x) = e^{ax}$, $f_2(x) = e^{bx}$ where $a \neq b$
10. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |x|$ (on $\mathbb{R}$)
11. $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{x+1}$
12. $f_1(x) = \sin^2 x$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = 1$
13. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = e^x$
14. $f_1(x) = \tan x$, $f_2(x) = \sec x$ (on $(-\pi/2, \pi/2)$)

Exercise 14:

Given that $y_1(x) = x$ is a solution of the differential equation $x^2y'' - xy' + y = 0, \quad x > 0$, use the Wronskian method (or reduction of order) to find a second linearly independent solution $y_2(x)$. Then write the general solution.
إذا علمت أن $y_1(x) = x$ حل للمعادلة التفاضلية $x^2y'' - xy' + y = 0$ من أجل $x > 0$ ، استخدم طريقة الفرونسكي (أو اختزال الرتبة) لإيجاد حل ثانٍ مستقل خطيًا $y_2(x)$. ثم اكتب الحل العام.

Exercise 15:

Solve the following differential equations. (حل المعادلات التفاضلية التالية:)

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' + 5y' + 6y = 0$
3. $y'' - 4y = 0$
4. $y'' - 6y' + 9y = 0$
5. $y'' + 4y' + 4y = 0$
6. $y'' + 4y = 0$
7. $y'' - 2y' + 5y = 0$
8. $y'' + 2y' + 2y = 0$
9. $y'' - y' - 2y = 4x^2$
10. $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + 1$
11. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$
12. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
13. $y'' - 2y' + y = e^x + e^{-x}$
14. $y'' + y = \sin x$
15. $y'' + 4y = \cos 2x$
16. $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x$
17. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x$
18. $y'' + y = x \cos x$
19. $y'' + 4y = 12x, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = 3$
20. $y'' - y = 2e^x, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$
21. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1$
22. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 3$