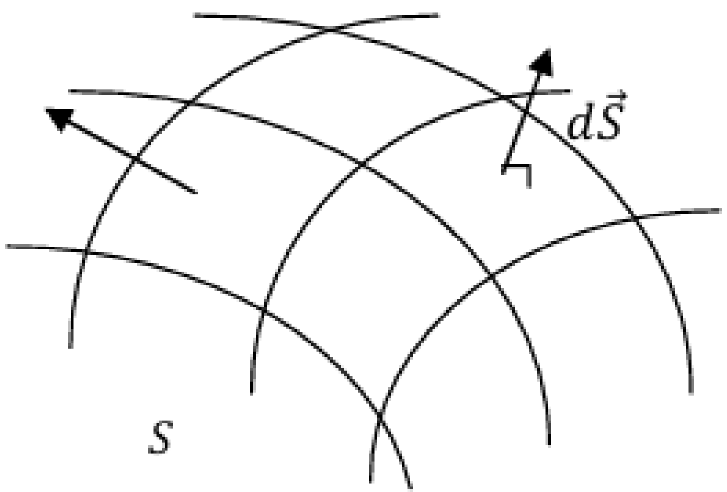
الفصل 3

نظرية التدفق الكهربائي



شعاع السطح (*vecteur surface*): ليكن dS عنصر السطح من السطح الكلي S. نسمي شعاع السطح العنصري $d\vec{S}$ الشعاع الذي طويلته تساوي مساحة هذا العنصر dS و شعاع توجيهه عمودي على المساحة dS، يؤخذ نحو الخارج (تقعر السطح).

تدفق الحقل الكهربائي الساكن من خلال سطح *S* (*Flux du champ électrostatique à travers une surface*):

ليكن S سطحًا حقيقيًا أو تخيليًا، نسمي التدفق العنصري للحقل الكهربائي $\vec{E}$ من خلال السطح العنصري $d\vec{S}$، المقدار السلمي $d\phi$ حيث:

$$d\phi = \vec{E}.d\vec{S}$$

ويعطَى التدفق الكلي عبر كامل السطح S:

$$\phi = \int_S d\phi = \int_S \vec{E}.d\vec{s}$$

نظرية غوص (*Théorème de Gauss*) :

هي علاقة تربط بين التدفق الكهربائي عبر سطح مغلق و الشحنة التي يضمها هذا السطح، و تنص على: تدفق الحقل الكهربائي عبر سطح مغلق S، يساوي المجموع الجبري للشحنات التي يحتويها هذا السطح $\sum Q_{int}$ مقسوما على السماحية في الفراغ ε_0.

$$\phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

يدعى السطح S بسطح غوص.

يدل الرمز $\oiint$ على ان التكامل يتم على سطح مغلق، وهو نفس رمز التكامل المعروف فقط بإضافة دائرة عليه للدلالة على ان هذا التكامل يتم على سطح مغلق، قد يكون له أي شكل.

S: يمثل سطح غوص وهو سطح وهمي ومغلق.

الاختيار الامثل لسطح غوص يكفل إنجاز التكامل على هذا السطح بسهولة وينبغي لهذا السطح أن يحقق الشروط التالية:

- ان يمر السطح المغلق بالنقطة المراد حساب الحقل عندها.

- سطح يجعل الجداء السلمي $\vec{E}.\overrightarrow{dS}$ معلوما في أي نقطه منه، وبصفة خاصة يجعل الشعاع $\vec{E}$ مماسيا أو عموديا عليه أو يصنع معه زاوية ثابتة معلومة حتى يسهل حساب التدفق.

- ان يكون الحقل ثابتا على أجزاء السطح المختلفة.

ملاحظات:

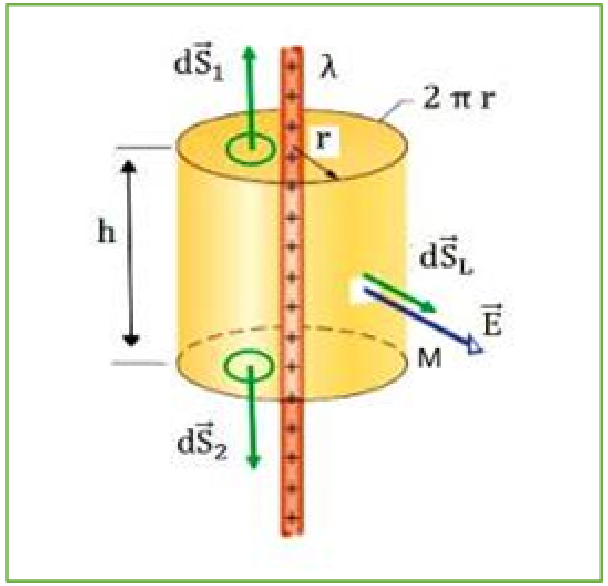
- عندما لا تتواجد شحنات كهربائية داخل سطح غوص أو ان المجموع الجبري للشحنات الموجودة داخل ذلك السطح يساوي الصفر، فإن تدفق الحقل الكهربائي عبر ذاك السطح معدوم. في حالة وجود الشحنة خارج السطح المغلق فان التدفق معدوم.

- يعتمد شكل السطح على توزيع الشحنات كالآتي:

- في حاله التوزيع الكروي نختار سطح غوص كرويا
- في حاله التوزيع الخطي نختار سطح غوص اسطوانيا
- في حال توزيع الشحنات على صفائح أي توزيع مستوي للشحنات نختار سطح غوص اسطوانيا
- حساب مقدار الشحنة الموجودة داخل سطح غوص (كثافه طوليه، سطحيه، حجميه)

تطبيق:

ساق مستقيمة لانهائية الطول مشحونة بانتظام بكثافة خطية λ موجبة.
أوجد عبارة الحقل الكهربائي الناتج عند نقطة M تبعد بالمسافة r منه.



الحل:

- الساق مشحونة كهربائيا بانتظام بكثافة خطية λ موجبة

- المطلوب ايجاد عبارة الحقل الكهربائي الناتج عن الساق عند نقطة ما من الفضاء المحيط به ولتكن M تبعد بالمسافة r منه.

- بما ان الساق لانهائية الطول فإن الحقل في النقطة M سيكون عمودي على السلك. ومن ثم نختار سطح غوص كما بالشكل، اسطوانة محورها الساق المشحونة وارتفاعها h ونصف قطرها r .

- في هذه الحالة فان سطح غوص يتكون من ثلاثة أجزاء. قاعدتان $\left(S_1 \text{ و } S_2\right)$ متوازيتان كل منهما على شكل قرص وسطح جانبي S_L.

- تدفق الحقل الكهربائي عبر الأسطوانة =التدفق عبر القاعدتين +التدفق عبر السطح الجانبي. ونكتب:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_L$$

$$\Phi = \oiint_{s} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \oiint_{s1} \vec{E}.\overrightarrow{ds_1} + \oiint_{s2} \vec{E}.\overrightarrow{ds_2} + \oiint_{sL} \vec{E}.\overrightarrow{ds_L}$$

التدفق عبر القاعدتين: معدوم لان الحقل الكهربائي $\vec{E}$عمودي على كل من $\overrightarrow{ds_1}$ و $\overrightarrow{dS_2}$ ومنه:

$$\Phi_1 = \oiint_{s1} \vec{E}.\overrightarrow{ds_1} = 0\,, \qquad \Phi_2 = \oiint_{s2} \vec{E}.\overrightarrow{ds_2} = 0$$

التدفق عبر السطح الجانبي: الحقل الكهربائي $\vec{E}$ يوازي $\overrightarrow{ds_L}$ في كل نقطة من نقاط السطح الجانبي $(\cos\theta = 1)$ ومنه:

$$\Phi_L = \oiint_{sL} \vec{E}.\overrightarrow{ds_L} = \oiint_{sL} E.dS_L = E\ S_L = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{\varepsilon_0}$$

لدينا ان الساق مشحونة بانتظام بكثافة خطية λ موجبة ومنه فان الشحنة التي تحملها الساق $\sum_{i=1}^{n} Q_i$ تعطى بالعلاقة:

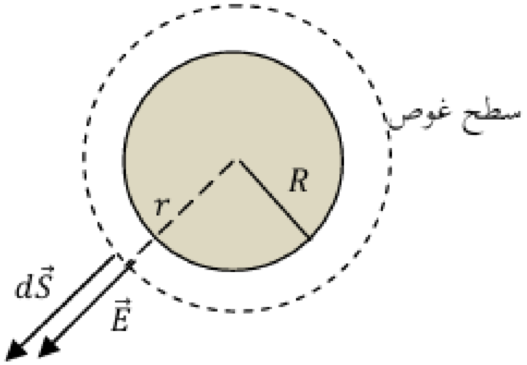
$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = \lambda h$$

S_L: مساحة السطح الجانبي للأسطوانة: $S_L = 2\pi rh$

بالتعويض نجد:

$$E2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2K\lambda}{r}$$

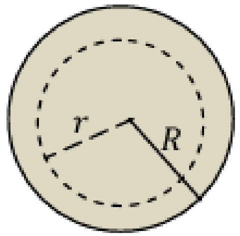
مثال : دراسة الحقل الكهربائي الناتج عن توزيع كروي للشحنات (توزيع سطحي، توزيع حجمي) بطريقة غوص.



لنعتبر كرة نصف قطرها R تحمل شحنة Q موزعة بكثافة سطحية σ منتظمة. يكون الحقل الكهربائي في كل نقطة في الفضاء قطريا، يعتمد فقط على r مما يسمح لنا باختيار سطح غوص كرة نصف قطرها r و مركزها ينطبق على مركز الكرة المشحونة، فيكون التدفق عبر سطح غوص:

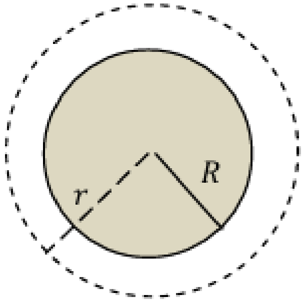
$$\phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = E\oint_S dS = E4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- في حالة $r < R$: الشحنة داخل سطح غوص معدومة



$$E_1 4\pi r^2 = 0 \Longrightarrow E_1 = 0$$

في حالة $r > R$



$$E_2 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

حساب الكمون:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V \Rightarrow E(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \Rightarrow V(r) = -\int E\,dr$$

في حالة $r > R$

$$V_2(r) = -\int E_2\,dr = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$$

نستعمل الشروط الحدية:

$$V_2(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow V_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

في حالة $r < R$

$$E_1 = 0 \Longrightarrow V_1(r) = C_1$$

حسب استمرارية الكمون عند $r = R$ لدينا:

$$V_1(R) = V_2(R) \Rightarrow C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

لنعتبر الآن كرة نصف قطرها R تحمل شحنة Q موزعة بكثافة حجمية ρ منتظمة. يكون الحقل الكهربائي في كل نقطة في الفضاء أيضا قطريا يعتمد فقط على r، مما يسمح لنا باختيار سطح غوص كرةً نصف قطرها r، و مركزها ينطبق على مركز الكرة المشحونة، فيكون التدفق عبر سطح غوص:

$$\phi = \oint_s \vec{E}.d\vec{s} = E\oint_s ds = E4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

في حالة: $r < R$

$$E_1 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

في حالة $r > R$

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

حساب الكمون:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \Rightarrow E(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \Rightarrow V(r) = -\int E\, dr$$

في حالة $r > R$

$$V_2(r) = -\int E_2\, dr = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$$

نستعمل الشروط الحدية :

$$V_2(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow V_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

في حالة $r < R$

$$V_1(r) = -\int E_1\, dr = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\, dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + C_1$$

حسب استمرارية الكمون عند $r = R$ لدينا:

$$V_1(R) = V_2(R) \Rightarrow -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} \Rightarrow C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2$$

رسم منحنيات $E(r)$ و $V(r)$ بدلالة r: