Chapitre 3

Méthodes du Simplexe

3.1 Introduction

On a présenté dans le chapitre précédent une procédure graphique pour résoudre un programme linéaire à deux variables. Par contre, dans la plupart des problèmes réels, on a plus que deux variables à déterminer. Il nous faut donc une méthode d'optimisation d'un modèle de programmation linéaire qui peut s'appliquer efficacement peu importe le nombre de variables dans le modèle. Par conséquent, une procédure algébrique pour résoudre les programmes linéaires avec plus que deux variables fera l'objet de ce chapitre. Pour ce faire, on utilise l'Algorithme du simplexe.

Un programme linéaire (PL) mis sous la forme particulière où toutes les contraintes sont des équations et toutes les variables sont non négatives est dit sous forme standard. Dans ce chapitre, l'algorithme du simplexe (G. B. Dantzig 1947) est un algorithme itératif permettant de résoudre un problème de programmation linéaire.

Dans l'algorithme du simplexe, on commence par transformer le programme linéaire à traiter en un programme linéaire équivalent sous forme standard. Il ne reste alors plus qu'à déterminer une solution optimale d'un programme linéaire sous forme standard.

L'algorithme du simplexe consiste à se déplacer d'un sommet du polyèdre en un autre sommet du polyèdre tout en augmentant l'objectif (économique). Ce raisonnement est valable parce que le polyèdre des solutions réalisables est convexe : il n'y a pas de risque de se trouver coincé dans un minimum local. La convexité découle du fait que les contraintes sont données par des expressions linéaires.

3.2 Mise sous forme standard

La mise sous forme standard consiste à introduire des variables supplémentaires (une pour chaque contrainte) de manière à réécrire les inégalités ($\leqslant$ ou $\geqslant$) sous la forme d'égalités. Chacune de ces variables représente le nombre de ressources non utilisés. On les appelle variable d'écart.

La forme standard s'écrit donc :

$$\begin{array}{l} Max\, Z(x) = c^T.x \\ S.C \begin{cases} A.x + E = b \\ x \geqslant 0, E \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} Max\, z = \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ S.C \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 = b_2 \\ \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + e_m = b_m \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \\ e_1 \geqslant 0, e_2 \geqslant 0, \cdots, e_m \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

La forme standard du programme linéaire de l'agriculteur est :

$$\begin{array}{l} Max\, Z = 100x_1 + 200x_2 \\ S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 150 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 440 \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 480 \\ x_1 \leqslant 90 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \xrightarrow[Standard]{Forme} \begin{array}{l} Max\, Z = 100x_1 + 200x_2 \\ S.C \begin{cases} x_1 + x_2 + e_1 = 150 \\ 4x_1 + 2x_2 + e_2 = 440 \\ x_1 + 4x_2 + e_3 = 480 \\ x_1 + e_4 = 90 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

L'impact de ces variables d'écart sur la fonction objectif est nulle. Ceci explique le fait que leur existence soit tout simplement liée à une mise en forme du programme linéaire initial. Ces variables d'écart peuvent prendre des valeurs non négatives. Le fait de donner la valeur des variables d'écart à l'optimum donne une idée du nombre des ressources non utilisées.

3.3 Variables de base et variables hors base

Considérons un système d'équations à n variables et m équations où $n \geqslant m$. Une solution de base pour ce système est obtenue de la manière suivante :

1) On pose $(n - m)$ variables égales à 0. Ces variables sont appelées variables hors base (V.H.B.).
2) On résout le système pour les m variables restantes. Ces variables sont appelées les variables de base (V.D.B.)
3) Le vecteur de variables obtenu est appelé solution de base (il contient les variables de base et les variables hors base)

Une solution de base est admissible si toutes les variables de la solution de base sont $\geqslant 0$.
Il est vraiment important d'avoir le même nombre de variables que d'équations.

3.4 La Méthode du Simplexe sous forme des tableaux

La méthode de simplexe sous forme des tableaux commence par l'identification d'une solution réalisable de base et ensuite, elle essaye de trouver d'autres solutions réalisables de base jusqu'à atteindre à la solution optimale. Ainsi, on doit, tout d'abord, retrouver cette solution réalisable de base.

Le principe de résolution nécessite un certain nombre d'étapes contenu au travers de l'algorithme du simplexe sous forme des tableaux dont la démarche est la suivante : (Figure 3.1)

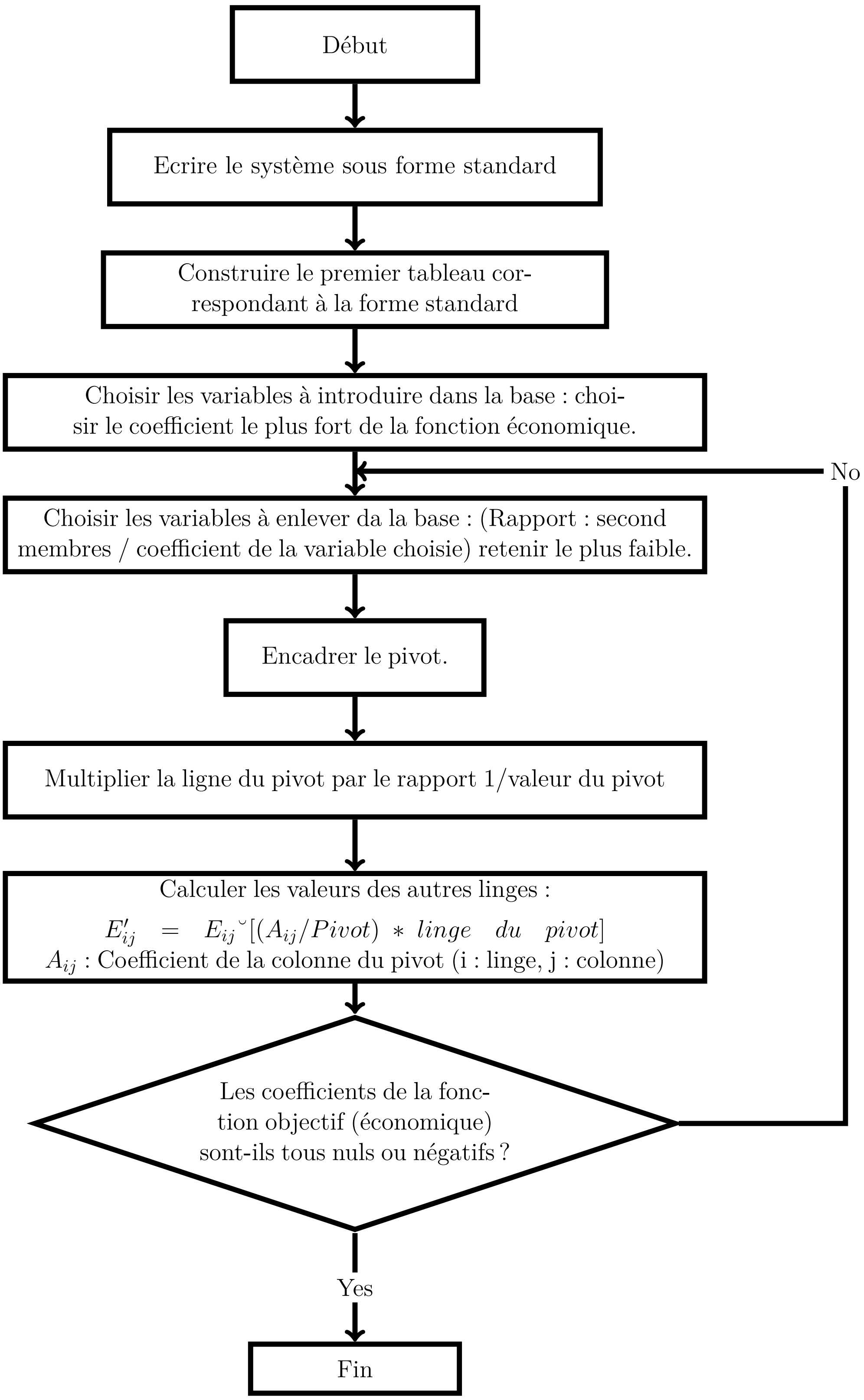

FIGURE 3.1 – Algorithme du simplexe de la méthode des tableaux

La résolution par l'algorithme du simplexe se déroule selon 8 étapes avant un nouveau passage.

1ère étape : Écrire le système sous forme standard

Il s'agit convertir le programme établi sous forme canonique (système d'inéquation) sous la forme standard (système d'équation avec variable d'écarts). Les variables d'écart introduites au cours de cette transformation représentent les contraintes techniques et commerciales disponible qu'il contient de saturer.

$$\begin{array}{ccc}
\textit{Forme canonique} & & \textit{Forme standard avec les variables d'ecarts } e_1, e_2, e_3, e_4 \\
Max\ Z = 100x_1 + 200x_2 & & Max\ Z = 100x_1 + 200x_2 \\
S.C \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 150 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 440 \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 480 \\ x_1 \leqslant 90 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} & \Leftrightarrow & S.C \begin{cases} x_1 + x_2 + e_1 = 150 \\ 4x_1 + 2x_2 + e_2 = 440 \\ x_1 + 4x_2 + e_3 = 480 \\ x_1 + e_4 = 90 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4 \geqslant 0 \end{cases}
\end{array}$$

2e étape : Construire le premier tableau correspondant à la forme standard

Coefficient E_{ij}

Variable d'écart

Valeur en base

Valeur solution

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
e_1	1	1	1	0	0	0	150
e_2	4	2	0	1	0	0	440
e_3	1	4	0	0	1	0	480
e_4	1	0	0	0	0	1	90
Max	100	200	0	0	0	0	0

Fonction objectif (économique)

3e étape : Choisir les variables à introduire dans la base : Pour cela choisir le coefficient le plus fort de la fonction économique

Les coefficients de la fonction économique (MAX) est 200. Ainsi il s'agit de la variable x_2 qui rentre en base.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
e_1	1	1	1	0	0	0	150
e_2	4	2	0	1	0	0	440
e_3	1	4	0	0	1	0	480
e_4	1	0	0	0	0	1	90
Max	100	200	0	0	0	0	0

4e étape : Choisir les variables à enlever da la base : (Rapport : second membres / coefficient de la variable choisie). Retenir le plus faible.

Le seconde membre, nous retenons la valeur la plus faible (120) du rapport second membre (en gras) / coefficient de la variable choisie. Ainsi la variable e_3 (encadre gras) est la variable à enlever de la base.

	x_1	x_2 ↓	e_1	e_2	e_3	e_4	**2ᵉ membre**		
e_1	1	1	1	0	0	0	150	$150/1 = 150$	
e_2	4	2	0	1	0	0	440	$440/2 = 220$	
e_3	1	4	0	0	1	0	480	$480/4 = 120$	←
e_4	1	0	0	0	0	1	90	$90/0 = \infty$	
Max	100	200	0	0	0	0	0		

5ᵉ étape : Encadrer le pivot.

L'élément 4, à l'intersection de la ligne relative à la variable sortante e_3 (dite ligne pivot) et de la colonne relative à la variable entrante x_2 (dite colonne pivot) est l'élément pivot. (C'est l'élément cerclé dans le tableau).

E_{ij} A_{ij}

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
e_1	1	1	1	0	0	0	150
e_2	4	2	0	1	0	0	440
e_3	1	4	0	0	1	0	480
e_4	1	0	0	0	0	1	90
Max	100	200	0	0	0	0	0

Ligne du pivot Pivot

6ᵉ étape : Multiplier la ligne du pivot par le rapport : [1/valeur du pivot] (ou diviser la ligne du pivot par le pivot).

E'_{ij} 1/Pivot

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
e_1							
e_2							
x_2	1/4	1	0	0	1/4	0	120
e_4							
Max							

7ᵉ étape : Calculer les valeurs des autres linges.

$E'_{ij} = E_{ij} - [(A_{ij}/Pivot) * \textit{linge du pivot}]$

Cette opération consiste à transformer E_{ij} des autres lignes en E'_{ij}, nous effectuons un calcul matriciel. A_{ij} : Coefficient de la colonne du pivot (i : linge, j : colonne).

Remarque 3.4.1

- *Dans la ligne du pivot, les variables qui sont affectées des coefficients 0, on recopiera ces colonnes.*
- *Dans la colonne du pivot apparait un zéro, on recopie la ligne.*

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	**2^e membre**
e_1	3/4	0	1	0	-1/4	0	30
e_2	7/2	0	0	1	-1/2	0	200
x_2	1/4	1	0	0	1/4	0	120
e_4	1	0	0	0	0	1	90
Max	50	0	0	0	-50	0	-24000

8^e étape : Les coefficients de la fonction économique sont-ils tous nuls ou négatifs ? (si oui nous sommes à l'optimum, sinon (non) nous effectuons un nouveau passage).

Les coefficients de la fonction économique ne sont pas tous nuls ou négatifs (50) il convient d'effectuer un nouveau passage.

Nouveau passage

- Choisir les variables à introduire dans la base. Pour cela choisir le coefficient le plus fort de la fonction économique.
  Le coefficient de la fonction économique (MAX) est 50. Ainsi il s'agit de la variable x_1 qui rentre en base.
- Choisir la variable à enlever de la base (rapport : second membres /coefficient da la variable choisie). Retenir le plus faible.
  Le second membre, nous retenons la valeur la plus faible du rapport second membre / coefficient de la variable choisie. Ainsi la variable e_1 est la variable à enlever de la base.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	**2^e membre**
e_1	3/4	0	1	0	-1/4	0	30 $30/(3/4) = 40$
e_2	7/2	0	0	1	-1/2	0	200 $200/(7/2) = 400/7$
x_2	1/4	1	0	0	1/4	0	120 $120/(1/4) = 480$
e_4	1	0	0	0	0	1	90 $90/1 = 90$
Max	50	0	0	0	-50	0	-24000

- Le pivot est égal à 3/4.
- Multiplier la ligne du pivot par 4/3 (ou diviser la ligne du pivot par le pivot : 3/4)
- Calculer les autres valeurs des lignes.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	**2^e membre**
x_1	1	0	4/3	0	-1/3	0	40
e_2	0	0	-14/3	1	2/3	0	60
x_2	0	1	-1/3	0	1/3	0	110
e_4	0	0	-4/3	0	1/3	1	50
Max	0	0	-200/3	0	-100/3	0	-26000

Les coefficients de la fonction économique sont tous nuls ou négatifs, fin de l'algorithme du simplexe. La solution qui rend optimal le programme de production est le suivant :
La marge sur cout variable maximum = 26000 dinars. Les quantités surfaces $x_1 = 40$, $x_2 = 110$, et on constate que les deux variables d'écarts e_1 et e_3 correspondant à les deux contraintes de *Terrain et Main d'œuvre* n'est pas saturées. Par contre e_2 la variable d'écart traduisant la contrainte eau et e_4 la variable d'écart correspondant à la contraint *les limitations du bureau du périmètre irrigué* sont saturées.

3.5 Résolution d'un programme linéaire par la méthode des variables artificielles

Compte tenu de tout ce qui précède, tous les programmes linéaires qu'on a traité sont du type : Maximiser une fonction linéaire sous contraintes de type inférieur ou égale (et avec un second membre positif). Or dans beaucoup de problèmes réels, on peut retrouver des contraintes de type supérieur ou égale et/ou de type égale, ainsi que des problèmes où on a minimiser au lieu de maximiser.

En effet, on étudiera les modifications à apporter à la méthode du simplexe pour qu'elle puisse résoudre tous ces types de programmes.

Dans une contrainte du type $'' \geqslant ''$, une variable d'écart positive apparaît précédée d'un signe $''-''$. La présence de ces signes $''-''$ ne nous permet plus de prendre les variables d'écart comme variables de base dans le premier tableau.

Pour résoudre le problème, on introduit de nouvelles variables appelées variables artificielles. Une variable artificielle est une variable fictive introduite spécialement pour engendrer une solution de base accessible. Elle n'a pas de signification économique.

L'une des méthodes utilisées pour éliminer les variables artificielles de la base est la méthode des variables artificielles (Grand M ou Big M) ; elle consiste essentiellement à appliquer l'algorithme du simplexe en optimisant la fonction objective dont les variables artificielles auront été fortement pénalisées, rendant ces variables peu intéressantes sur le plan économique, comme variable de base.

3.5.1 Principe de la méthode des variables artificielles

L'introduction de variables artificielles permet de résoudre le problème posé par les contraintes $'' \geqslant ''$. Quand un programme linéaire comporte une contrainte $''\geqslant''$, la contrainte de positivité liée à la variable d'écart n'est pas respectée pour la forme standard.

Soit la contrainte : $x + 2y + z \geqslant 16$.

Prenons une solution qui respecte la contrainte. Par exemple, (5, 5, 5) donne 5 + 10 + 5 = 20. Dans la forme standard, la variable d'écart e_1 qui permet l'égalité est telle que : $20 + e_1 = 16$, soit $e_1 = -4$ (ce qui ne respecte pas la condition $e_1 \geqslant 0$). La forme standard de la contrainte est donc : $x + 2y + z - e_1 = 16$.

La variable e_1 est alors mise hors base, et l'introduction dans la base d'une variable artificielle A_1, positive ou nulle, affectée du coefficient 1 permet d'obtenir une solution de départ admissible : $x + 2y + z - e_1 + A_1 = 16$. Les variables hors base sont : $x = y = z = e_1 = 0$, et en base $A_1 = 16$ (ce qui respecte $A_1 \geqslant 0$).

3.5.2 Les variables artificielles

Considérons le programme linéaire suivant :

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2$$
$$S.C \begin{cases} -x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 60 \\ x_2 \geqslant 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

L'introduction des variables d'écart dans le programme linéaire donne

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2 + 0e_1 + 0e_2$$
$$S.C \begin{cases} -x_1 + x_2 + e_1 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 60 \\ x_2 - e_2 = 5 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Afin de générer une solution réalisable de base initiale pour la méthode de simplexe, on a annulé les variables de décision x_1 et x_2. Ceci nous permet de commencer à partir de l'origine O. Or, on vérifie bien que l'origine n'est pas une solution réalisable. La question qui se pose est comment nous allons réécrire le programme de manière qu'on puisse construire le tableau de simplexe initial à l'origine.

Pour arriver à cette fin, on doit ressortir une astuce mathématique qui se résume à l'introduction de nouvelles variables, dite variables artificielles A_1 et A_2.

Ces variables n'ont aucune interprétation, comme leur nom l'indique, ils sont conçus artificiellement pour nous aider à utiliser la procédure de simplexe et à formuler le tableau initial à partir de l'origine.

Si on ajoute ces deux variables artificielles A_1 et A_2 respectivement à la 2[e] et 3[e] contrainte, le programme devient le suivant :

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2 + \cdots$$
$$S.C \begin{cases} -x_1 + x_2 + e_1 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + A_1 = 60 \\ x_2 - e_2 + A_2 = 5 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, A_1, A_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Maintenant on peut obtenir une solution initiale de base du système d'équations.

Si on pose $x_1 = x_2 = 0$. La solution initiale est : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $e_1 = 4$, $e_2 = 0$, $A_1 = 60$, $A_2 = 5$.

On peut conclure que tant que les variables artificielles restent dans la base, la solution demeure non réalisable réellement pour notre programme.

Une manière pour garantir que ces variables artificielles sortent de la base avant d'atteindre la solution optimale est de leur associée un grand coût $(-M)$ dans la fonction objectif. Ainsi, si ces variables restent dans la base ils vont causer une diminution importante de la valeur de la fonction objectif. Ce qui nous contraignent à les faire sortir le plutôt possible de la base.

La fonction objectif s'écrit donc : $Max\ Z = 5x_1 + 6x_2 - MA_1 - MA_2$ avec M un très grand nombre.

Définition 3.5.1

1) *Introduire une variable artificielle par contrainte $\geqslant$. La variable d'écart de la contrainte, affectée du coefficient -1, est mise hors base.*
2) *Elles permettent simplement l'égalité dans la forme standard et ne sont pas une donnée du problème. En conséquence, elles doivent être nulles à l'optimum. Pour cela, il faut les faire sortir de la base en leur donnant un coefficient fortement pénalisant dans la fonction économique :*
   - *S'il s'agit d'une maximisation, le coefficient affecté à la variable est très négatif : $-M$.*
   - *S'il s'agit d'une minimisation, le coefficient affecté à la variable est très positif : $+M$.*

   M étant suffisamment grand pour qu'on soit sûr que (A_i) est exclue de la solution optimale.

3.5.3 Résolution des problèmes de maximisation

Soit le programme linéaire :
$$Max\ Z = 100x_1 + 500x_2 + 200x_3$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 10000 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 5000 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

La forme standard de ce programme est :
$$Max\ Z = 100x_1 + 500x_2 + 200x_3 + 0e_1 + 0e_2 - MA_1$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + e_1 = 10000 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - e_2 + A_1 = 5000 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, A_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

D'après la deuxième contrainte :

$$A_1 = 5000 - 2x_1 - x_2 - x_3 + e_2$$

D'où

$$Z = 100x_1 + 500x_2 + 200x_3 + 0e_1 + 0e_2 - M(5000 - 2x_1 - x_2 - x_3 + e_2)$$
$$Z = 100x_1 + 500x_2 + 200x_3 + 0e_1 + 0e_2 + 2x_1M + x_2M + x_3M - e_2M - 5000M$$
$$Z = (100 + 2M)x_1 + (500 + M)x_2 + (200 + M)x_3 + (0 + 0)e_1 + (0 - M)e_2 - 5000M$$

Donc le PL :

$$Z = (100 + 2M)x_1 + (500 + M)x_2 + (200 + M)x_3 + (0 + 0)e_1 + (0 - M)e_2 - 5000M$$
$$S.C \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + e_1 = 10000 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - e_2 + A_1 = 5000 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, A_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

En appliquant de ces modifications, le tableau de simplexe initial est e_1 et A_1 les variables de bases Les autres sont des variables hors bases.

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	A_1	
e_1	1	3	1	1	0	0	10 000
A_1	2	1	1	0	-1	1	5000
Max	100 +2M	500 +1M	200 +1M	0 0	0 -1M	0 0	0 +5 000M

Encadrer le pivot

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	A_1		R
e_1	1	3	1	1	0	0	10 000	$10000/1 = 10000$
A_1	2	1	1	0	-1	1	5000	$\leftarrow$ $5000/2 = 2500$
Max	100 +2M	500 +1M	200 +1M	0 0	0 -1M	0 0	0 +5 000M	

$\uparrow$ 2M est le plus fort coefficient positif

La variable entrante est x_1 ($100 + 2M \geqslant 500 + M$ et $100 + 2M \geqslant 200 + M$ avec M assez grand) et la variable sortante est A_1. Le tableau de simplexe qui suit est :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	A_1		R
e_1	0	5/2	1	1	1/2	-1/2	7 500	$\leftarrow$ $7500/(5/2) = 3000$
x_1	1	0.5	0.5	0	-1/2	1/2	2 500	$2500/(1/2) = 5000$
Max	0	450 +0M	150 +0M	0	50 +0M	-50 -M	-250 000 +0M	

$\uparrow$ 450 est le plus fort coefficient positif

Remarque 3.5.1 *La seul variable artificielles A_1 sortir de la base. Et leurs effets nets est maintenant négatif et très élevé, elles ne pourront donc pas être sélectionnées à l'itération suivante, ni même ultérieurement comme on peut facilement le constater. Donc on peut supprimer du tableau la colonne relative à A_1.*

La sortie de la base d'une variable artificielle étant définitive, sa colonne peut être supprimée.

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2		
x_1	0	1	2/5	2/5	1/5		3 000
x_2	1	0	3/10	-1/5	3/5		1 000
Max	0	0	-30	-180	-40		-1600 000

Le tableau ci-dessus est optimal car tous les effets nets sont négatifs ou nuls. Donc la solution optimale est : x_1 =1 000 , $x_2 = 3\,000$, $x_3 = 0$ et Z =1 600 000. Une variable artificielle n'apparaît jamais dans la base du tableau final si on a atteint une solution optimale accessible.

3.5.4 Résolution des problèmes de minimisation

Il y a deux manières de résoudre un problème de minimisation en utilisant la méthode de simplexe. **La première méthode** nécessite le changement de la règle de choix de la variable entrante. Dans un problème de maximisation la règle est de choisir comme variable entrante celle qui a le plus grand effet net positif non nul. Ceci parce que notre objectif est de choisir la variable qui en entrant dans la base va engendrer un profit supplémentaire et ainsi accroître la valeur de la fonction objectif. Pour un problème de minimisation, on va utiliser la règle inverse. C'est-à-dire la variable entrante est celle à laquelle on associe la plus petite valeur négative non nulle de l'effet net.

Ceci va nous amener aussi à changer notre règle d'arrêt de la procédure de simplexe et de définir le tableau optimal, comme celui où tous les effets nets sont positifs ou nuls.

Résume

- **Choix de la variable entrante :** Dans un problème de minimisation, la variable entrante est la variable hors base qui a le coefficient "le plus négatif" dans la fonction économique.
- **Tableau optimal et solution optimale :** Dans un problème de minimisation, on obtient un tableau optimal dès que tous les coefficients de la fonction économique sont positifs ou nuls.

Essayons d'appliquer la méthode de simplexe sur le problème de médecine :

$$Min\ Z = x_1 + x_2$$
$$S.C \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 12 \\ 5x_1 + 8x_2 \geqslant 74 \\ x_1 + 6x_2 \geqslant 24 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Pour permettre à la méthode de simplexe de démarrer de l'origine, il faut comme on l'a déjà vu dans le cas de problème de maximisation, introduire les variables artificielles. Avec les problèmes de maximisation on attribue à ces variables un coefficient ($-M$) dans la fonction objectif pour les contraindre à quitter la base rapidement. Dans le cas de problèmes de minimisation, on a intérêt à changer le coefficient de ces variables en M (M très grand) afin d'arriver au même résultat et de les faire sortir de la base.

Avant de construire le tableau de simplexe initial, on réécrit le programme linéaire relatif au problème de médecine avec les variables artificielles.

$$Min\ Z = x_1 + x_2 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$
$$S.C \begin{cases} 2x_1 + x_2 - e_1 + A_1 = 12 \\ 5x_1 + 8x_2 - e_2 + A_2 = 74 \\ x_1 + 6x_2 - e_3 + A_3 = 24 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, A_1, A_2, A_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

D'après la première contrainte : $A_1 = 12 - 2x_1 - x_2 + e_1$
D'après la deuxième contrainte : $A_2 = 74 - 5x_1 - 8x_2 + e_2$
D'après la troisième contrainte : $A_3 = 24 - x_1 - 6x_2 + e_3$
D'où

$$Z = x_1 + x_2 + M(12 - 2x_1 - x_2 + e_1) + M(74 - 5x_1 - 8x_2 + e_2) + M(24 - x_1 - 6x_2 + e_3)$$
$$Z = x_1 + x_2 - 8Mx_1 - 15Mx_2 + Me_1 + Me_2 + Me_3 + 110M$$
$$Z = (1 - 8M)x_1 + (1 - 15M)x_2 + Me_1 + Me_2 + Me_3 + 110M$$

Le tableau de simplexe initial est :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	A_1	A_2	A_3		
A_1	2	1	-1	0	0	1	0	0	12	$12/1 = 12$
A_2	5	8	0	-1	0	0	1	0	74	$74/8 = 37/4$
A_3	1	6	0	0	-1	0	0	1	24	$\leftarrow$ $24/6 = 6$
Z	1 -8M	1 -15M	M	M	M	0	0	0	-110M	

$\uparrow$ 1-15M est le plus négatif

Après 4 itérations, on trouve le tableau de simplexe optimal suivant :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3				
x_1	1	0	-8/11	1/11	0				8
e_3	0	0	2	-1	1				26
x_2	0	1	5/11	-2/11	0				2
Z	0	0	3/11	1/11	0				-10

On retrouve la même solution obtenue par la méthode graphique :

$$x_1 = 8, x_2 = 2, e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 26 \text{ et } Z = 10$$

Après avoir vérifié que le second membre des contraintes est positif, le tableau suivant résume les transformations à faire subir à notre programme linéaire avant de le résoudre par la méthode de simplexe :

TABLE 3.1 – Résumé de la transformation

Quand la contrainte est de type	Pour la fonction objectif d'un problème de	
	Maximisation	**Minimisation**
I) " $\leqslant$ " Ajouter une variable d'écart	Attribuer un coefficient nul pour la variable d'écart	
II) " $=$ " Ajouter une variable d'écart et une variable artificielle	Attribuer un coefficient $(-M)$ pour variable artificielle	Attribuer un coefficient (M) pour la variable artificielle.
III) " $\geqslant$ " Ajouter une variable artificielle et une variable d'écart avec un signe "$-$"	Attribuer un coefficient nul pour la variable d'écart et un coefficient $(-M)$ pour variable artificielle	Attribuer un coefficient nul pour la variable d'écart et un coefficient M pour variable artificielle.

3.6 Calculs matriciels (Rappelé)

3.6.1 Représentation matricielle et notations

Une matrice est un tableau rectangulaire d'éléments, généralement des nombres ou des fonctions. Ces grandeurs sont généralement des réels ou des complexes. Dans la suite, nous ne considérerons que des grandeurs réelles. Une matrice A de dimension $m \times n$ est notée $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Cette matrice est une matrice de m lignes et de n colonnes :

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Une matrice V qui ne comporte qu'une seule colonne, $V \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, est appelé un vecteur colonne :

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

Une matrice V qui ne comporte qu'une seule ligne, $V \in \mathbb{R}^{1\times n}$, est appelé un vecteur ligne :

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

Par convention, tout vecteur est désigné comme une matrice colonne. Si $m = n$, alors la matrice est carrée.

3.6.2 Opérations élémentaires sur les matrices

Définition 3.6.1 (L'addition matricielle) *L'addition matricielle n'est définie qu'entre deux matrices de même dimensions. La matrice résultante est de la même dimension que les matrices additionnées et chacun de ses éléments est la somme des éléments des deux matrices correspondant à la même ligne et à la même colonne.*

Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. L'addition de ces deux matrices est donnée par :

$$C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

On la note : $C = A + B$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$

*Il en va de même pour la **soustraction**, au signe près. La soustraction des matrices A et B est donnée par :*

$$C = [c_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$$

On la note : $C = A - B$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$

On a les propriétés suivantes :

1) $A + B = B + A$ Commutativité (commutative law).
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ Associativité (associative law).
3) $A + 0 = A$
4) $A + (-A) = 0$

Définition 3.6.2 (Multiplication par un scalaire) *La multiplication entre une matrice et un nombre scalaire donne une matrice dont chaque élément de la matrice est multiplié par le scalaire. Étant donné* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *une matrice, et* b *un scalaire, alors les éléments de la matrice* C *résultante sont donnés par :*

$$c_{ij} = b * a_{ij}$$

La matrice $C = bA$ *est de même dimension que* A, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Définition 3.6.3 (La multiplication matricielle) *La multiplication entre deux matrices n'est définie que lorsque leurs dimensions son compatibles : le nombre de colonnes de la matrice à gauche de l'opérateur doit correspondre au nombre de lignes de la matrice à droite de l'opérateur.*

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *et si* $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, *la multiplication entre les matrices* A *et* B *donne une matrice* C *de dimensions* $m \times p$ *telle que tous ses éléments :*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * b_{kj}$$

On note cette opération : $C = A * B = AB$

Les propriétés élémentaires de la multiplication matricielle sont :

1) $AB \neq BA$ La commutativité n'est pas toujours vraie (the commutative law is usually broken).
2) $C(A + B) = CA + CB$ Distributivité à gauche (distributive law from the left) avec $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$
3) $(A + B)C = AC + BC$ Distributivité à droite (distributive law from the right) avec $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$
4) $A(BC) = (AB)C$ Associativité (associative law) avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$

Définition 3.6.4 (Transposée) *La transposée d'une matrice* A *est la matrice* A^T *(notée parfois aussi* $A^{'}$*) définie par :* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *et* $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \text{ , } A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$$

Pour écrire la transposée d'une matrice, il suffit de transformer ses lignes en colonnes ou colonnes en lignes.

Définition 3.6.5 (Matrice inverse et pseudo-inverse) *Une matrice* A *est inversible si et seulement s'il existe une matrice* B *et une matrice-unité* I *telles que* $AB = BA = I$. *S'il en est ainsi,* B *est appelée inverse de* A *et est notée* A^{-1}. .

Proposition 3.6.1

- *Une **condition nécessaire** pour qu'une matrice* A *soit inversible est que* A *soit carrée.*
- *Soit* A *une matrice carrée inversible, son inverse* A^{-1} *est unique, et est une matrice carrée du même ordre, inversible et* $((A^{-1})^{-1} = A$.

- *Une matrice carrée inversible A est **régulière** (i.e. $AB = AC \Rightarrow B = C$ et $BA = CA \Rightarrow B = C$); une matrice carrée non-inversible est dite **singulière**.*
- *Soient A et B deux matrices carrées inversibles de même ordre, alors la matrice produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. .*

Définition 3.6.6 (Le déterminant d'une matrice) *On appelle déterminant d'une matrice A carrée, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, le nombre noté $det(A)$ ou $|A|$ et égal à :*

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1} * det(A_i)$$

où A_i est la matrice obtenue en rayant la $1^{ère}$ colonne et la i-ième ligne.

3.6.3 Méthode de calcule de l'inverse d'une matrice

- On calcule le déterminant $det(A)$ de la matrice A ;
- On transpose la matrice A. Elle devient A^T ;
- Pour chaque élément de la matrice A^T, on calcule le mineur associé. Le mineur est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne et la colonne auxquelles appartient l'élément.
- On associe à chacun de ces mineurs, 1 signe donné par $(-1)^{i+j}$; i étant le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne de l'élément envisagé. L'ensemble $(signe) * (mineur)$ constitue les cofacteurs de la matrice A^T.
- Il suffit maintenant de remplacer tous les éléments de la matrice A^T par les cofacteurs (on obtient alors une matrice A^C) et de diviser par $det(A)$ pour obtenir l'inverse de la matrice A.

$$A^{-1} = \frac{A^C}{det(A)}$$

Définition 3.6.7 (Matrice inverse et pseudo-inverse) *Deux matrices A et B sont inverses si leur produit est égal à la matrice identité : $AB = I$, alors $B = A^{-1}$. Les matrices inverse, et plus généralement les pseudo-inverses, trouvent leurs applications à la résolution des systèmes d'équations linéaires quelles que soient leurs dimensions :*

$$y = Ax$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $y \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur cherché, $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des connaissances.
L'inverse généralisée d'un tel système est noté A^+. L'inverse généralisée A^+ satisfait les conditions suivantes :

1) $AA^+A = A$
2) $A^+AA^+ = A^+$
3) $(AA^+)^T = AA^+$ *Condition de symétrie*
4) $(A^+A)^T = A^+A$

La solution d'un système linéaire à partir de la pseudo-inverse A^+ s'écrit alors : $x = A^+y$. La résolution d'un tel système met en évidence trois cas. Selon les dimensions m et n , on définira les matrices inverse, pseudo-inverse à gauche et pseudo-inverse à droite. La matrice inverse est la solution d'un problème qui possède autant d'inconnues (variables à déterminées) que de contraintes. Cela ne signifie pas pour autant qu'il existe une solution.

3.6.4 Rang des matrices

Définition 3.6.8 (Rang) *Le rang d'une matrice quelconque A est égal au plus grand entier s tel que l'on puisse extraire de A une matrice carrée d'ordre s inversible, c'est-à-dire de déterminant non nul. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes (ajout à une colonne - resp. une ligne - une combinaison linéaire des autres colonnes - resp. lignes) d'une matrice ne modifient pas le rang.*

Exemple 1 : Soit la matrice suivante : $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Le rang de A est 2 :

- A est d'ordre 2×3 donc $s \leqslant min\{2;3\}$ soit $s = 0; 1$ ou 2;
- Comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la deuxième colonne est nul,

On ne peut pas conclure;

- Comme le déterminant de la sous-matrice composée de la première et de la troisième colonne est non nul, alors $s = 2$.

Exemple 2 : Soit la matrice suivante : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

- A est d'ordre 3×3 donc $s \leqslant 3$,
- Le déterminant de A est 0 donc $s \neq 3$,
- Le déterminant de la sous-matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ est 5, donc $s = 2$.

3.7 La Méthode du Simplexe sous forme matricielle

L'objectif de la programmation linéaire (P.L.) est de trouver la valeur optimale d'une fonction linéaire sous un système d'équations d'inégalités de contraintes linéaires. La fonction à optimiser est baptisée "fonction économique" (utilisée en économie dans le cadre d'optimisations) et on la résout en utilisant une méthode dite "**méthode du simplexe**". Dans cette section on va voir la forme matricielle de la méthode du simplexe.

De façon générale, le problème linéaire est dans la forme suivante :

$$\begin{aligned} Max\ z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ S.C & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant ou \geqslant ou = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant ou \geqslant ou = b_2 \\ \ \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant ou \geqslant ou = b_m \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3.7.1 Forme générale d'un programme linéaire

Le programme linéaire s'écrit sous forme canonique matricielle :

$$\begin{aligned} & Max\ Z(x) = c^T.x \\ & S.C \begin{cases} A.x \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\text{Avec } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_+ \,, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Proposition 3.7.1 *Chaque programme linéaire sous forme canonique peut s'écrire sous forme standard et inversement.*

<u>Preuve</u>

($\Rightarrow$) Considérons le programme linéaire dans l'équation 3.1 écrit sous sa forme canonique.
On a

$$\begin{aligned} Ax \leqslant b, x \geqslant 0 &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ i = 1, \cdots, m,\ x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + e_i = b_i,\ ou\ e_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,\ i = 1, \cdots, m,\ x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(A\ I_m)}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}}_{\tilde{x}} = b,\ \tilde{x} \geqslant 0 \end{aligned}$$

On pose alors $Z(x) = \tilde{c}^T \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$ où $\tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = (c_1 \cdots c_n, \underbrace{0 \cdots 0}_{m\,fois})$ et le programme linéaire (écrit sous sa forme canonique) est strictement équivalent au programme linéaire suivant (écrit sous sa forme standard) : $\begin{cases} Max\ Z(\tilde{x}) = \tilde{c}^T \tilde{x} \\ \tilde{A}\tilde{x} = b,\ \tilde{x} \geqslant 0 \end{cases}$

($\Leftarrow$) Soit $Ax = b$ un programme linéaire donné sous sa forme standard.
On a

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ax \leqslant b \\ Ax \geqslant b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax \leqslant b \\ (-A)x \leqslant -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

Si on pose $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$ et $\tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$, l'inégalité précédent implique qui est bien un programme linéaire sous forme canonique.

<u>Exemple 1 :</u> On considère le programme linéaire suivant. On rappelle sa forme canonique et sa forme <u>standard</u> :

$$\begin{array}{l} Max\ Z(x,y,z) = 3x + 5y + 6z \\ S.C \begin{cases} x + 2y + 4z \leqslant 70 \\ 2x + y + z \leqslant 80 \\ 3x + 2y + 2z \leqslant 60 \\ x, y, z \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} Max\ Z(x,y,z,e_1,e_2,e_3) = 3x + 5y + 6z \\ S.C \begin{cases} x + 2y + 4z + e_1 = 70 \\ 2x + y + z + e_2 = 80 \\ 3x + 2y + 2z + e_3 = 60 \\ x, y, z, e_1, e_2, e_3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

Si on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le programme s'écrit sous les formes canonique et standard matricielles suivantes :

$$\begin{cases} Max\ Z(x) = c^T x \\ Ax \leqslant b, x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Max\ Z(\tilde{x}) = \tilde{c}^T \tilde{x} \\ \tilde{A}\tilde{x} = b, \tilde{x} \geqslant 0 \end{cases}$$

On utilisera dorénavant la forme standard matricielle et on posera $A = \tilde{A}, x = \tilde{x}$ et $c = \tilde{c}$.

3.7.2 Représentation matricielle

Définition 3.7.1

- *On appelle base une sous-matrice régulière de A. Il faut que la matrice $A(m, n)$ soit de rang m.*
- *Une solution de base est obtenue en posant $(n - m)$ variables égales à 0, et en résolvant par rapport aux m variables restantes, qui sont les variables de base (VDB).*
- *Les $(n - m)$ variables à 0 sont les variables hors base (VHB). Des choix différents de VHB donnent lieu à différentes solutions de base.*

Les colonnes de A permettant à une sous-matrice B de A d'être régulière et qui représentent des variables particulières peuvent commuter si on ordonne correctement x et c^T.

On peut alors écrire : $A = (BE)$, $x = \begin{pmatrix} x_b \\ x_e \end{pmatrix}$, et $c^T = (c_b^T\ c_e^T)$.

et ainsi

$$\begin{cases} Max\ ou\ Min\ Z(x) = c^T x \\ Ax \leqslant b, x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Max\ ou\ Min\ Z(x) = c_b^T x_b + c_e^T x_e \\ Bx_b + Ex_e = b, x \geqslant 0 \end{cases}$$

Une solution de base est donc telle que :

$$\begin{cases} x_e = 0 \\ Bx_b = b \Leftrightarrow x_b = B^{-1}b \end{cases} \tag{3.2}$$

Certains choix de variables peuvent ne pas générer de solution de base.

Définition 3.7.2 *Une solution de base est dite réalisable (SBR) si $x_b = B^{-1}b \geqslant 0$.*
Si le vecteur x_b contient des termes nuls, on dira que cette solution est une solution de base dégénérée.

Remarque 3.7.1 *Lorsque les coefficients b_i sont positifs ou nuls, on obtient systématiquement une solution de base réalisable en mettant les variables du problème initial hors base (donc nulles) et les variables d'écart dans la base et égales aux b_i.*

<u>**Exemple 2 :**</u> Illustrons ces définitions à l'aide du programme linéaire (déjà exprimé sous forme standard) de l'exemple précédent :

$$Max\ Z(x, y, z, e_1, e_2, e_3) = 3x + 5y + 6z$$
$$S.C \begin{cases} x + 2y + 4z + e_1 = 70 \\ 2x + y + z + e_2 = 80 \\ 3x + 2y + 2z + e_3 = 60 \\ x, y, z, e_1, e_2, e_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

On peut dresser le tableau 3.2 avec $n = 6, m = 3$:

Intéressons-nous au nombre de solutions possibles en général :

- le nombre de bases candidates est

TABLE 3.2 – Bases et réalisabilité de la SBR associée

N	VDB	VHB	Rang(A)	Solution de base	Réalisabilité
1	x, y, z	e_1, e_2, e_3	3	(100 ,-255 ,105)	$\ngtr 0$
2	x, y, e_1	z, e_2, e_3	3	(100 ,-120 ,210)	$\ngtr 0$
3	x, y, e_2	z, e_1, e_3	3	(-5 , 37.5 , 52.5)	$\ngtr 0$
4	x, y, e_3	z, e_1, e_2	3	(30 ,20 ,-70)	$\ngtr 0$
5	x, z, e_1	y, e_2, e_3	3	(100 ,-120 ,450)	$\ngtr 0$
6	x, z, e_2	y, e_1, e_3	3	(10 ,15 ,45)	réalisable
7	x, z, e_3	y, e_1, e_2	3	(35.71 ; 8.57 ,-64.28)	$\ngtr 0$
8	y, z, e_1	x, e_2, e_3	3	Pas de solution	
9	y, z, e_2	x, e_1, e_3	3	(25 ,5 ,50)	réalisable
10	y, z, e_3	x, e_1, e_2	3	(125 ,-45 ,-100)$\ngtr 0$	
11	e_1, e_2, e_3	x, y, z	3	(70 ,80 ,60)	réalisable
12	x, e_1, e_2	y, z, e_3	3	(20 ,80 ,60)	réalisable
13	x, e_1, e_3	y, z, e_2	3	(40 ,30 ,-60)	$\ngtr 0$
14	x, e_2, e_3	y, z, e_1	3	(70 ,-60 ,-150)	$\ngtr 0$
15	y, e_1, e_2	x, z, e_3	3	(30 ,10 ,50)	réalisable
16	y, e_1, e_3	x, z, e_2	3	(80 ,-90 ,-100)	$\ngtr 0$
17	y, e_2, e_3	x, z, e_1	3	(35 ,45 ,-10)	$\ngtr 0$
18	z, e_1, e_2	x, y, e_3	3	(30 ,-50 ,50)	$\ngtr 0$
19	z, e_2, e_3	x, y, e_2	3	(17.5, 62.5 ,25)	réalisable
20	z, e_1, e_3	x, y, e_1	3	(80 ,-250 ,-100)	$\ngtr 0$

$$C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

(on a bien testé $C_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!3!} = 20$ bases dans l'exemple précédent).
Toutes les bases candidates ne sont pas inversibles, donc on peut seulement dire que le nombre précédent est une borne supérieure (dans notre exemple, on trouve 19 bases inversibles).

- Une méthode basée sur l'exploration des points extrêmes est cependant non-polynomiale (on comprend bien qu'on ne peut appliquer pour m grand la technique qui nous a permis, pour l'exemple précédent, de récupérer le tableau 3.2, à savoir la résolution de 21 systèmes de taille 3×3)
- L'expérience montre que pour un problème de n variables à m contraintes, la solution optimale est trouvée en moyenne en moins de $3m$ opérations (ce qui signifie pour notre exemple, qu'on doit pouvoir trouver la solution du PL en moins de 9 itérations).

Définition 3.7.3 *Pour tout problème de PL, deux SBR sont adjacentes si leurs ensembles de variables de base ont $m-1$ variables de base en commun.*

L'interprétation géométrique est que les deux SBR sont situées le long d'une même arête sur le polygone réalisable.

3.7.3 Description générale de l'algorithme

L'algorithme du simplexe (pour une maximisation) suit les étapes suivantes :

1) Trouver une SBR pour le PL, appelée la SBR initiale.
2) Déterminer si la SBR courante est optimale. Sinon, trouver une SBR adjacente qui possède une valeur Z plus élevée.
3) Retourner au point 2. avec la nouvelle SBR comme SBR courante.

Les deux questions suivantes sont donc :

- comment détecter l'optimalité ? et
- comment se déplacer ?

Pour répondre à ces questions, on écrit :

$$Z = c_b^T x_b + c_e^T x_e \text{ et } Bx_b + Ex_e = b$$

Donc, puisque $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est de range m, B est inversible et $x_b = B^{-1}(b - Ex_e)$.

Par substitution, on obtient

$$Z = c_b^T B^{-1} b + (c_e^T - c_b^T B^{-1} E)x_e = c_b^T B^{-1} b + \bar{c}_e^T x_e$$

en posant

$$\bar{c}_e^T = c_e^T - c_b^T B^{-1} E.$$

Le terme $\bar{c}_e^T$ correspond à l'augmentation du coût pour une augmentation des variables dans x_e. Pour une SBR, on a $x_e = 0$ et donc, ce terme n'a pas d'incidence. Si tous les coûts ce sont négatifs (pour une maximisation), toute augmentation des variables de x_e diminuera la valeur de Z, et donc la solution obtenue est optimale. Réciproquement, pour une minimisation, si tous les coûts sont positifs, toute augmentation des variables de x_e augmentera la valeur de Z. On a donc répondu à la première question, relative au test d'optimalité.

Pour une maximisation, si notre base est telle que $\bar{c}_e^T$ ne soit pas strictement négative ou nulle, alors il existe une variable $(x_e)_k = x_k$ de x_e telle que $(\bar{c}_e^T)_k = c_k > 0$. Une augmentation de x_k est donc susceptible d'améliorer Z. C'est bien-sûr le critère de Dantzig qui va désigner cette variable. La solution va alors s'écrire :

$$x_b = B^{-1}(b - x_k A_k - E' x'_e).$$

Où A_k désigne la k^{e} colonne de A en fixant $x'_e = 0$, et en faisant varier x_k seulement, on obtient :

$$x_b = B^{-1}(b - x_k A_k) = B^{-1} b - B^{-1} x_k A_k = \bar{b} - P x_k.$$

Comme originellement x_k est nulle, on ne peut que l'augmenter. Il y a deux cas :

- Cas 1 : $\forall i, P_i \leqslant 0$ en ce cas la solution est non bornée. (x_k tend vers $+\infty$ et Z vers $-\infty$.)
- Cas 2 : il y a 2 possibilités : pour chaque i
  1) Soit $P_i \leqslant 0$ et donc $(x_b)_i \geqslant 0$ pour tout $x_k \geqslant 0$: on ne peut pas utiliser cette variable.
  2) Soit $P_i > 0$ et dons ce cas, $(x_b)_i \geqslant 0$ pour tout $x_k \leqslant \frac{\bar{b}_i}{P_i}$. Ainsi, pour tout $P_i > 0$ il existe une valeur maximale de $x_k \leqslant \frac{\bar{b}_i}{P_i}$, permettant $x_b \geqslant 0$. on choisit donc la variable k telle que $k = \underset{i/P_i>0}{arg\ min}(\frac{\bar{b}_i}{P_i})$.

3.7.4 Exemple avec solution optimale unique

Reprenons l'exercice de l'exemple 1 précédent :

$$Max\ Z(x, y, z, e_1, e_2, e_3) = 3x + 5y + 6z$$
$$S.C \begin{cases} x + 2y + 4z + e_1 = 70 \\ 2x + y + z + e_2 = 80 \\ 3x + 2y + 2z + e_3 = 60 \\ x, y, z, e_1, e_2, e_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

<u>1er itération :</u>

On choisit comme base initiale $VDB = (e_1, e_2, e_3)$. On a dans ce cas

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3, \bar{b} = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Les coûts réduits définis par $\bar{c}_e^T = c_e^T - c_b^T B^{-1} E$ sont égaux à $\begin{array}{c} \quad x \;\; y \;\; z \\ \hline c_e^T = (3 \;\; 5 \;\; 6) \end{array}$

Le critère de Dantzig implique que la variable z entre en base.

- On a $P = B^{-1}A_3 = (4, 1, 2)$ et on calcule en suit les rations $\frac{\bar{b}_i}{P_i}$:

	e_1	e_2	e_3
$\frac{\bar{b}_i}{P_i}$	$\frac{70}{4} = 17.5$	$\frac{80}{1} = 80$	$\frac{60}{2} = 30$

On en déduit que la variable sortante est e_1.

2e itération :

On a maintenant la base $VDB = (z, e_2, e_3)$. On a alors
$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 17.5 \\ 62.5 \\ 25 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
On remarque que $\bar{b}$ est défini dans la ligne 19 du tableau 3.2.

- Les coûts réduits sont égaux à $\bar{c}_e^T = c_e^T - c_b^T B^{-1} E$ sont égaux à

$$\begin{array}{cccc} & x & y & e_1 \\ \hline c_e^T = & (\frac{3}{2} & 2 & -\frac{3}{2}) \end{array}$$

Le critère de Dantzig implique que la variable y entre en base.

- On a $P = B^{-1}A_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ et on calcule en suit les rations $\frac{\bar{b}_i}{P_i}$:

	z	e_2	e_3
$\frac{\bar{b}_i}{P_i}$	35	125	25

On en déduit que la variable sortante est e_3.

3e itération :

On a maintenant la base $VDB = (z, e_2, y)$. On a alors
$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 50 \\ 25 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
On remarque que $\bar{b}$ est défini dans la ligne 9 du tableau 3.2.

- Les coûts réduits sont égaux à $\bar{c}_e^T = c_e^T - c_b^T B^{-1} E$ sont égaux à

$$\begin{array}{cccc} & x & e_3 & e_1 \\ \hline c_e^T = & (-\frac{7}{2} & -2 & -\frac{1}{2}) \end{array}$$

L'algorithme s'arrête car tous les poids sont négatifs. On a donc trouvé l'optimum.

Résume la solution :

- La solution est constituée des variables de base y, z, e_2.
- Les valeurs de ces variables sont données respectivement par $(y, z, e_2) = (25, 5, 50)$.
- Toutes les autres valeurs sont égales à 0.
- La fonction de coût vaut donc : $Z = 3 * 0 + 5 * 25 + 6 * 5 = 155$.