رابعا: توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطين الحسابيين لعينتين

1. توزيع الفرق بين متوسطي عينتين مستقلتين

التوزيعات الطبيعية المستقلة المعلومة التباين

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ عينة من توزيع وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2، و $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ عينة أخرى من توزيع آخر مستقل عن الأول متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 حيث:

$$V(\overline{X}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1}$$

$$V(\overline{Y}) = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

من الاستقلالية:

$$V(\overline{X} - \overline{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

ومنه:

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

ونكتب:

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

التوزيعات الطبيعية المستقلة المجهولة التباين

n_1 و n_2 كبيرين

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ عينة من توزيع وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 و $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ عينة أخرى من توزيع آخر مستقل عن الأول متوسطه μ_2 وتباينه σ_1^2، وكان σ_2^2 و σ_2^2 مجهولين يمكن استبدالهما بتقديريهما غير المتحيزين s_2^2 و s_1^2، فإذا كان حجم العينتين يفوق أو يساوي 30 فإن توزيع $(\bar{X} - \bar{Y})$ هو:

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)$$

ومنه:

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

n_1 و n_2 صغيرين أو أحدهما صغير

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ عينة من توزيع وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2، و $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ عينة أخرى من توزيع آخر مستقل عن الأول متوسطه μ_2 وتباينه σ_1^2، وكان σ_2^2 و σ_2^2 مجهولين وحجم العينتين $n_2, n_1 < 30$ فإن توزيع $(\bar{X} - \bar{Y})$ هو:

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

إذا كان $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ فإن:

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

حيث: S_p^2 هو تقدير لـ σ^2.

أمثلة:

المثال الأول:	المثال الثاني:
سحبت عينة من كلية الاقتصاد حجمها 36 طالبا تباين معدلات توجيههم هو 4 وعينة أخرى من كلية الآداب حجمها 42 طالبا تباين معدلات توجيههم هو 3.5، فإذا كان المتوسطان الحقيقيان للمعدلات في كل من الكليتين متساويين أحسب احتمال أن يكون الفرق بين الوسطيين الحسابيين للعينتين أقل من أو يساوي 1.5.	مصنع ينتج 700 كغ من العجائن الغذائية كمعدل يومي، سحبت منه عينة عشوائية تمثل إنتاج 20 يوما فبلغ انحرافها المعياري 40 كغ، في حين ينتج مصنع آخر 500 كغ كمعدل يومي، سحبت منه عينة عشوائية تمثل إنتاج 15 يوماً فبلغ انحرافها المعياري 20 كغ. المطلوب حساب الاحتمال التالي $P(\bar{X}-\bar{Y} \leq 210)$ إذا علمت أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
الحل: σ_1^2 وσ_2^2 مجهولان و $n_1 , n_2 \geq 30$ ومنه يمكن استبدالهما بتقديريهما غير المتحيزين s_2^2 و s_1^2، فينتج لدينا: $Z = \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \backsim N(0,1)$ والاحتمال المطلوب هو: $P(\bar{X}-\bar{Y} \leq 1.5) = P\left(\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \leq \dfrac{1.5 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}\right)$ $= P(Z \leq 3.41) = 0.9997$	σ_1^2 و σ_2^2 مجهولان ومتساويان و $n_1 , n_2 < 30$ ومنه: $T = \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \backsim t_{n_1+n_2-2}$ والاحتمال المطلوب هو: $P(\bar{X}-\bar{Y} \leq 210) = P\left(\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \leq \dfrac{210 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_P\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}\right)$ $= P\left(T \leq \dfrac{210 - (700 - 500)}{27.41\sqrt{\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{15}}}\right) = P(T \leq 1.07)$ $= 0.850$

2. توزيع الفرق بين متوسطي عينتين غير مستقلتين

أحيانا تكون العينتان اللتان يتم سحبهما مرتبطتين، فمثلا لقياس فاعلية برنامج تدريبي على عينة من الطلبة يتم قياس مستواهم قبل التعرض للبرنامج وبعده، فتشكل القراءات قبل وبعد التعرض للبرنامج عينتين مرتبطتين، ولكي نجد توزيع الفرق بين متوسطي المجتمعين الذين سحبنا منهما العينتين نلجأ لتحويل المسألة لإيجاد توزيع متوسط واحد.

فإذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ عينة من توزيع وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2، و $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ عينة أخرى من توزيع آخر مستقل عن الأول متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2، و X_i و Y_i القيمتين المتناظرتين في العينتين، نضع $d_i = x_i - y_i$ وعليه تشكل $D_1, D_2, \dots, D_n$ عينة من مجتمع طبيعي وسطه $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ وتباينه σ_D^2 ونفرض أن متوسط العينة $\overline{D}$ وتباينها S_D^2.

وفي هذه الحالة يمكن التمييز بين حالتين:

- حجم العينة $n \geq 30$:

$$\overline{D} \backsim N\left(\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n}\right)$$

وبمعلومية تباين عينة الفروق ووسطها كمقدرين لوسط مجتمع الفروق وتباينه يكون:

$$Z = \frac{\overline{D} - \mu_D}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

- حجم العينة $n < 30$:

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \backsim t_{n-1}$$

مثال:

في تجربة لبيان تحسن أداء العمال، تم سحب عينة عشوائية بحجم 16 عاملا في المصنع فكان قياس الكفاءة قبل وبعد دخولهم دورة تحسين الأداء كما هو موضح في الجدول التالي:

x_i	7	8	7	7	8	8	9	9	9	8	7	7	7	8	8	8
y_i	5	5	5	4	7	8	5	6	7	8	5	6	5	7	7	5

المطلوب: أحسب احتمال أن الفرق في الأداء قبل وبعد الدورة لا يقل عن 2.5.

الحل:

نحسب الفروق $d_i = x_i - y_i$ كما هو موضح في الجدول الموالي:

d_i	2	3	2	3	1	0	4	3	2	0	2	1	2	1	1	3

لدينا :

حجم العينة $n < 30$ ومنه:

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

ويكون الاحتمال المطلوب حسابه كما يلي:

$$P(\overline{D} > 2.5) = P\left(\frac{\overline{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} > \frac{2.5 - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$= P(T > 2.71) = 1 - P(T \leq 2.71)$$
$$= 1 - 0.99 = 0.01$$

خامسا: توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين

إذا اختيرت عينتان عشوائيتان من مجتمعين مستقلين يخضع كل منهما للتوزيع الثنائي فإن الفرق بين نسبتي العينتين يخضع تقريبا حسب نظرية النهاية المركزية عندما يكون حجم كل من العينتين كبيرا للتوزيع التالي:

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \backsim N(0,1)$$

مثال:

المثال:	**الحل:**
إذا كانت نسبة النجاح في الامتحان التوجيهي في إحدى الجامعات هي 0.7 وكانت نسبة النجاح في الامتحان التوجيهي في جامعة أخرى هي 0.65، تم اختيار عينة عشوائية حجمها 70 طالبا من الجامعة الأولى وعينة عشوائية أخرى من الجامعة الثانية حجمها 35 طالبا، فما هو احتمال أن تزيد نسبة النجاح في الجامعة الأولى على نسبة النجاح في الجامعة الثانية بمقدار 0.1 على الأكثر؟	لدينا: $$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \backsim N(0,1)$$ والاحتمال المطلوب هو: $$P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \leq 0.1) = P\left(\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \leq \frac{0.1 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}\right)$$ $$= P(Z \leq 0.51) = 0.6950$$

سادسا: توزيع المعاينة لتباين عينة

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 و s^2 تقديره غير المتحيز فإن:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \backsim \lambda^2_{n-1}$$

مثال:

المثال:	**الحل:**
سحبت عينة عشوائية حجمها 11 من توزيع طبيعي تباينه 70، أوجد احتمال أن يقل تباين العينة عن 87.5.	لدينا: $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \backsim \lambda^2_{n-1}$$ ومنه يحسب الاحتمال المطلوب كما يلي: $$P(S^2 < 87.5) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{87.5(n-1)}{\sigma^2}\right) = P(\lambda^2 < 12.5) = 0.75$$

سابعا: توزيع المعاينة للنسبة بين تبايني عينتين

للمقارنة بين تبايني مجتمعين نعتمد على النسبة بين تبايني عينتين مسحوبتين منهما، والتي يحدد توزيعها في حالة المعاينة من مجتمعين طبيعيين مستقلين استنادا إلى النظرية التالية: إذا كان S_1^2 تباين عينة عشوائية من مجتمع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 و S_2^2 تباين عينة عشوائية من مجتمع طبيعي مستقل عن الأول متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 فإن:

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \backsim F_{n_1-1,n_2-1}$$

مثال:

المثال:	**الحل:**
سحبت عينة حجمها 21 من مجتمع طبيعي تباينه 36 وسحبت عينة أخرى حجمها 25 من مجتمع طبيعي مستقل عن الأول تباينه 25، أحسب احتمال أن تكون النسبة بين تبايني العينتين أقل من 3.95.	نعلم أن: $$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \backsim F_{n_1-1,n_2-1}$$ وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب: $$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 3.95\right) = P\left(\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < 0.8\left(\frac{25}{36}\right)\right)$$ $$= P(F < 2.74) = 0.99$$