2- البرنامج الخطي:

2-1- مفهوم البرنامج الخطي:

هو صيغة رياضية مشتقة من واقع معين، هدفها البحث عن أمثلية الاستخدام عن طريق دالة رياضية تتكون من مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى، تسمى بدالة الهدف أو الدالة الاقتصادية، في وجود مجموعة من القيود تكون في صورة معادلات أو متباينات أو هما معا من الدرجة الأولى أيضا.

والمقصود من كلمة الأمثلية هو الوصول إلى أعظم قيمة للدالة الاقتصادية أو أدنى قيمة لها حسب الهدف.

2-2- مكونات البرنامج الخطي:

يتكون البرنامج الخطي من ثلاثة مكونات هي:

- **دالة الهدف:** تسمى أيضا بالدالة الاقتصادية، وهي تعبّر عن الهدف الذي تسعى المؤسسة للوصول إليه، إما التعظيم (الإنتاج، الأرباح، ...)، أو التدنية (التكاليف، الخسائر،...)، وتكون مؤلفة من متغيرات من الدرجة الأولى.
- **القيود:** هي عبارة عن جملة من المتراجحات أو المعادلات أو هما معا، تريد المؤسسة أن توجد حلا لدالة الهدف مع أخذها بعين الإعتبار. ويتألف شقها الأيسر من مجموعة من المعاملات مضروبة في مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى، أما شقها الأيمن فهو عبارة عن أعداد ثابتة موجبة.

- **شرط عدم السالبية:** ويعني أن قيم كل المتغيرات يجب أن تكون أكبر أو تساوي الصفر، لكونها ترتبط بكميات مادية، والكميات المادية لا يمكن أن تساوي قيم سالبة. وفي حالات إستثنائية أين لا يشترط هذا القيد، فإن هناك معالجة خاصة أثناء سيرورة الحل.

3-2- كتابة البرنامج الخطي:

يكتب البرنامج الخطي حسب حالة دالة الهدف كما يلي:

$$\text{Max (Min) } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$$

$$\text{s/c} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ (\leq , =, \geq)\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ (\leq , =, \geq)\ b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ (\leq , =, \geq)\ b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0 \end{cases}$$

حيث:

S/C: ترمز إلى: **s**ous **c**ontraintes، أي تحت القيود، وتشير إلى الوصول إلى أعظم قيمة لدالة الهدف أو إلى أدنى قيمة لها في حدود الطاقات المتاحة المعبّر عنها بمعادلات أو متباينات (القيود).

Max: هي إختصار لكلمة Maximisation، أي التعظيم، ومفادها جعل الدالة Z عند أعظم قيمة لها.

Min: هي إختصار لكلمة Minimisation، أي التدنية، ومفادها جعل الدالة Z عند أدنى قيمة لها.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$: هي متغيرات البرنامج الخطي والمطلوب إيجاد قيمها عند حل البرنامج. ويُشترط في هذه المتغيرات أن تكون قيمها غير سالبة كما يدل عليه السطر الأخير من البرنامج الخطي.

$c_1, c_2, \ldots, c_n$: معاملات دالة الهدف أو الدالة الإقتصادية، ويُمكن لهذه المعاملات أن تأخذ أي عدد حقيقي.

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}; a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}; a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$: معاملات القيود. ويُمكن أن تأخذ هذه المعاملات أي عدد حقيقي.

$b_1, b_2, \ldots, b_m$: شعاع الثوابت، ويُشترط أن تكون قيمه موجبة.

واختصارا يُكتب البرنامج الخطي كما يلي:

$$\text{Max (Min) } Z = CX$$

$$\text{s/c} \begin{cases} AX \ (\leq , =, \geq) \ B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

2-4- صيغ البرنامج الخطي:

هناك ثلاثة صيغ للبرنامج الخطي:

1- الصيغة القانونية: هناك نوعان حسب حالة داله الهدف:

حالة التعظيم: في هذه الحالة يكون البرنامج الخطي في صيغته القانونية عندما تكون:

- دالة الهدف في حالة تعظيم؛
- التشكيلة الخطية لكافة القيود في حالة أقل من أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
- كل المتغيرات غير سالبة.

حالة التدنية: في هذه الحالة يكون البرنامج الخطي في صيغته القانونية عندما تكون:

- دالة الهدف في حالة التدنية؛
- التشكيلة الخطية لكافة القيود في حالة أكبر من أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
- كل المتغيرات غير سالبة.

2- الصيغة المختلطة: وهي الحالة التي تكون فيها دالة الهدف إما في حالة التعظيم أو في حالة التدنية، وتكون القيود مختلطة حيث تحتوي على متراجحات "أكبر من أو يساوي" و "أقل من أو يساوي" و معادلات أو حالتين من هذه الحالات على الأقل.

3- الصيغة النموذجية أو القياسية: هي الصيغة التي تكون فيها دالة الهدف إما في حالة التعظيم أو في حالة التدنية، وجميع القيود عبارة عن معادلات، الثوابت كلها موجبة وجميع المتغيرات غير سالبة.

3- بناء (صياغة) البرنامج الخطي:

ويُقصد ببناء أو صياغة البرنامج الخطي تحويل المسألة من واقع كلامي مسرود في تعابير أدبية إلى مسألة مصاغة في قالب أو نموذج رياضي واضح يُعبّر عن جميع العلاقات الإقتصادية والإدارية للمشكلة. ويتكون النموذج الرياضي من عدد من المتغيرات ودالة هدف تكون إما في حالة التعظيم أو التدنية، وعدد من القيود تكون إما في صورة معادلات أو متباينات أو هما معا.

مثال:

تقوم إحدى المؤسسات الصناعية المتخصصة في إنتاج الأثاث بإنتاج نوعين من المنتجات: الطاولات والكراسي. يتطلب إنتاج طاولة واحدة ساعتي عمل ووحدتين من رأس المال، في حين أن إنتاج كرسي واحد يتطلب 3 ساعات عمل ووحدة واحدة من رأس المال. أما عن الكميات من ساعات العمل ورأس المال المتوفرة للمؤسسة فهي محدودة وتقدر بـ 12ساعة و8 وحدات على التوالي.

تحقق المؤسسة ربحا عن كل طاولة يتم إنتاجها وبيعها بـ 6 وحدات نقدية، وعن كل كرسي يتم إنتاجه وبيعه بـ 7 وحدات نقدية.

المطلوب: اكتب البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المؤسسة؟

الحل:

المنتجات / عوامل الإنتاج	المقادير الوحدوية		المقادير القصوى
	X_1 (الطاولات)	X_2 (الكراسي)	
ساعات العمل	2	3	12سا/ع
رأس المال	2	1	8 وحدات
الربح الوحدوي	6	7	

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 7x_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$