



TP 04 : Intégration Numérique

1. Objectifs :

À l'issue de cette séance de travaux pratiques, l'étudiant devra être capable de :

- Appliquer les méthodes d'intégration numérique pour approximer une intégrale définie ;
- Mettre en œuvre ces méthodes sous MATLAB ;
- Analyser la précision des résultats obtenus.

2. Introduction :

L'intégration numérique est une méthode de calcul approché permettant d'évaluer une intégrale définie lorsque le calcul exact est difficile ou impossible. Elle repose sur la discrétisation de l'intervalle d'intégration et l'approximation de la fonction par des formes simples. Ce travail pratique vise à mettre en œuvre quelques méthodes classiques d'intégration numérique (Trapèze et Simpson) sous MATLAB.

3. Méthode de Trapèze :

Principe :

La méthode du trapèze est une méthode d'intégration numérique qui permet d'approximer l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. L'intervalle $[a, b]$ est découpé en n sous-intervalles de même largeur $h = \frac{b-a}{n}$.

Sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction $f(x)$ est approchée par un polynôme de degré 1, c'est-à-dire par la droite reliant les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.

L'aire sous la courbe est alors estimée par la somme des aires des trapèzes formés sur chaque sous-intervalle.

La formule de la méthode du trapèze composée est donnée par :

$$I_{trap} = \frac{h}{2} [f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$

Algorithme :

1- Initialisation :

- Calculer $h = \frac{b-a}{n}$

- Calculer la somme $S = f(a) + f(b)$

2- Pour $i = 1 : n-1$ faire

$$x_i = a + i \times h ;$$

$$S = S + 2f(x_i);$$

3- Calculer l'intégrale I_{trap} :

$$I_{trap} = \frac{h}{2} S$$

Exercice :

- 1- Approximer l'aire sous la courbe $y = f(x)$ entre $x = 0$ et $x = 8$ en utilisant la règle trapézoïdale avec $n = 4$ sous-intervalles. Les valeurs de la fonction $f(x)$ est donnée dans le tableau suivant :

x	0	2	4	6	8
f(x)	3	7	11	9	3

- 2- On considère la fonction :

$$f(x) = x \sin(x)$$

L'objectif de cet exercice est d'implémenter, sous MATLAB, la méthode du trapèze généralisée afin d'approximer l'intégrale de cette fonction sur un intervalle donné :

$$[a, b] = [0, \pi].$$

- a- Définir la fonction $f(x)$ à intégrer ainsi que les paramètres d'entrée :
- les bornes d'intégration a et b,
 - le nombre de sous-intervalles n.
- b- Calculer le pas de discrétisation : $h = \frac{b-a}{n}$
- c- Initialiser la valeur de l'intégrale numérique I_{trap}
- d- À l'aide d'une boucle, calculer la somme des valeurs intermédiaires de la fonction $f(x)$.

Et calculer l'approximation finale de l'intégrale à l'aide de la formule du trapèze.

(tester pour différentes valeurs de $n = 20, 30, \dots$)

4. Méthode de Simpson :

Principe :

Sur chaque intervalle, la fonction $f(x)$, supposée continue et suffisamment régulière sur $[a, b]$, est approchée par une **parabole** passant par les points :

$$(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1})) \text{ et } (x_{i+2}, f(x_{i+2}))$$

En découpant l'intervalle $[a, b]$ en un nombre **pair** n de sous-intervalles de largeur :

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Le calcul numérique de l'intégrale de Simpson généralisée s'écrit par :

$$I_{Sim} = \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impaire}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ pair}}}^{n-2} f(x_i) \right]$$

Algorithme :

1- Initialisation :

n pair ; calculer h ; calculer $S = f(a) + f(b)$;

2- Pour $i = 1 : n - 1$ faire

$x_i = a + i * h$;

Si i impair, alors :

$S = S + 4 * f(x_i)$;

Sinon

$S = S + 2 * f(x_i)$;

3- Calculer l'intégrale de Simpson :

$$I_{Sim} = \frac{h}{3} * S$$

Exercice :

Calculer l'intégrale $\int_0^6 f(x) dx = \int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$