



TP 03 : Interpolation polynomiale

1. Objectifs :

À l'issue de cette séance de travaux pratiques, l'étudiant devra être capable de :

- Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange à partir d'un ensemble de points donnés ;
- Utiliser ce polynôme pour approximer une fonction et analyser la qualité de l'approximation sous MATLAB.

2. Introduction :

L'interpolation polynomiale est une technique numérique permettant d'approcher une fonction à partir d'un nombre fini de points connus. Parmi les méthodes existantes, les polynômes de Lagrange et de Newton sont les plus utilisés.

Dans ce TP, l'accent est mis uniquement sur l'interpolation par le polynôme de Lagrange sous MATLAB.

3. Interpolation polynomiale de Lagrange :

Principe :

On considère un ensemble de $n + 1$ points distincts (x_i, y_i) . Il existe alors un seul polynôme d'interpolation de degré inférieur ou égal à n qui passe exactement par l'ensemble de ces points. Ce polynôme constitue une approximation de la fonction associée aux valeurs données.

L'expression générale de ce polynôme s'écrit sous la forme :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) ;$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} ;$$

Les fonctions $L_i(x)$ sont appelées **les coefficients de Lagrange**. La méthode d'interpolation de Lagrange permet de représenter une fonction par un polynôme simple, ce qui facilite les

calculs numériques tels que la dérivation, l'intégration ou l'exploitation de données expérimentales issues de mesures discrètes.

Algorithme :

1- Initialisation (x_i ; y_i ; $P=0$) ;

2- Pour $i=0$ à n :

$L=1$;

Pour $j=0$ à n et ($j \neq i$)

$$L = L \times \frac{x-x_j}{x_i-x_j} ;$$

Mettre à jour : $P = P + y_i \times L$;

3- Sortie : P approximé

4. Exercice :

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{1+10x^2}$; définie sur l'intervalle $[-1, 1]$

- 1- Ecrire le programme MATLAB qui calcule le polynôme de Lagrange « P_n » associé aux points : $x_i = [-1 \ 0 \ 1]$; $y_i = [f(-1) \ f(0) \ f(1)]$
- 2- Tracer sur la même figure la fonction $f(x)$ et son polynôme approché P_n
- 3- Calculer le polynôme de Lagrange en utilisant directement la commande 'polyfit' de MATLAB.
- 4- Faire apparaître les points d'interpolation sur le même graphe.