

TP 02 : Résolution des équations non linéaires

1. Objectifs :

À l'issue de cette séance de travaux pratiques, l'étudiant devra être capable de :

- Résoudre des équations non linéaires (solution approchée) à l'aide des méthodes numériques itératives sous MATLAB ;
- Analyser la convergence des méthodes utilisées.

2. Introduction :

Une équation est dite non linéaire lorsqu'elle contient des termes de degré supérieur à un. Certaines équations, comme les polynômes du second ou du troisième degré, peuvent être résolues analytiquement, tandis que les autres nécessitent l'utilisation de méthodes numériques itératives. Ces méthodes consistent à partir d'une valeur initiale proche de la solution et à améliorer progressivement l'approximation.

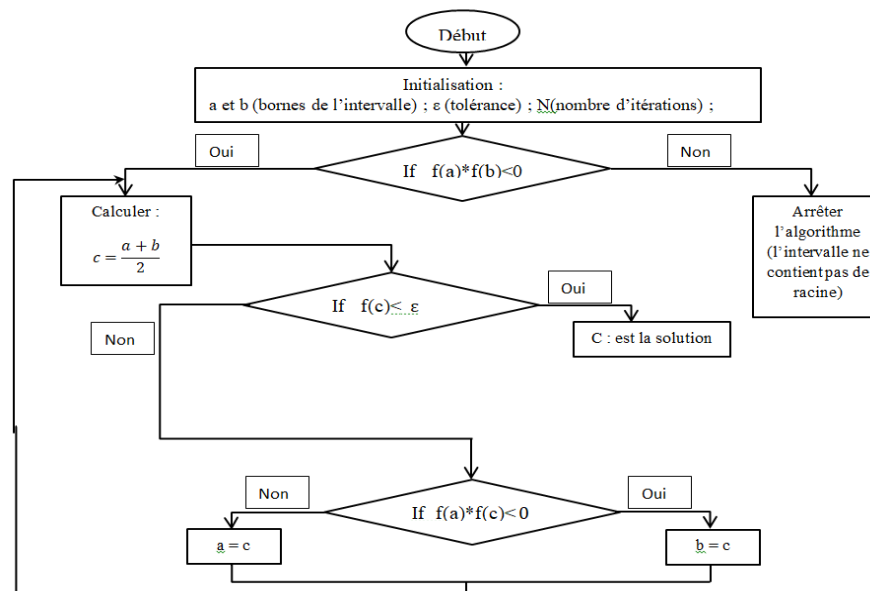
Dans ce TP, trois méthodes seront étudiées : la dichotomie (bissection), le point fixe et la méthode de Newton-Raphson.

3. Méthode de la bissection (dichotomie):

La méthode de dichotomie est une technique numérique destinée à la résolution des équations à une seule inconnue. Elle repose sur le principe de subdivision successive d'un intervalle en deux parties afin de localiser progressivement la solution. À chaque étape, l'intervalle contenant la racine est réduit en fonction du signe de la fonction.

Soit l'équation $f(x) = 0$, où la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$. Si les valeurs de $f(x)$ aux bornes de l'intervalle sont de signes opposés, c'est-à-dire $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation admet au moins une solution x_{app} appartenant à l'intervalle $[a, b]$.

Organigramme :



Exercice1 :

On considère la fonction suivante :

$$f(x) = (5 - x) * \exp(x) - 3$$

1. Écrire l'expression de la fonction $f(x)$ sous MATLAB.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction sur l'intervalle $[1, 6]$ en utilisant la commande `fplot` et activer la grille (`grid on`).
3. Déterminer la racine positive de la fonction à l'aide de la commande MATLAB `fzero`.
4. Vérifier que la condition $f(a)f(b) < 0$ est satisfaite sur l'intervalle choisi.
5. Écrire un programme MATLAB permettant de calculer une solution de l'équation $f(x) = 0$ en utilisant la méthode de dichotomie, en suivant l'organigramme, avec un critère d'arrêt basé sur un nombre maximal d'itérations fixé à $N=50$.

4. Méthode de point fixe :

Le principe de la méthode du point fixe consiste à transformer l'équation $f(x) = 0$ en une équation équivalente de la forme $x = g(x)$. À partir d'une valeur initiale choisie dans un intervalle donné, on construit une suite itérative définie par $x_{n+1} = g(x_n)$.

Cette suite converge progressivement vers la solution recherchée, jusqu'à ce que la différence entre deux itérations successives devienne inférieure à une précision fixée, appelée critère d'arrêt.

Algorithme :

Soit la fonction $f(x) = 0$ définie sur l'intervalle $[a, b]$, avec une précision ε :

1. Ecrire $f(x)$ sous la forme $g(x) = x$ ($g(x)$ doit satisfaire les critères de convergence)
2. Initialiser $k = 0$ et choisir une valeur $x_0 \in [a, b]$.
3. Calculer $x_{k+1} = g(x_k)$.
4. Tester la condition d'arrêt :

- Si $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$ ou $k \geq N$, alors arrêter.
5. Mettre à jour : $x_k = x_{k+1}$ et $k = k + 1$
6. Reprendre à l'étape 2.
7. Afficher x_{k+1} comme solution approchée.

Exercice2 :

Trouver la solution approchées des trois équations $f(x)$, en appliquant la méthode de point fixe sur les fonctions $g(x)$ suivantes :

- 1- $f(x) = 2 \sin(x) - x$; $[a, b] = [1.5, 2]$; $\varepsilon = 10^{-6}$; $x_0 = 0.5$

$$\triangleright \begin{cases} g_1(x) = 2 \sin(x) \\ g_2(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}$$

2- $f(x) = x^2 - x - 1$; $[a, b] = [-1, 2]$; $\varepsilon = 10^{-3}$; $x_0 = 1$ puis $x_0 = -0.5$

$$\triangleright \begin{cases} g_1(x) = x^2 - 1 \\ g_2(x) = \sqrt{x+1} \\ g_3(x) = 1 + \frac{1}{x} \end{cases}$$

Le processus converge t-il vers la solution approchées ?

Comparer le nombre d'itérations pour les fonctions $g(x)$ pour chaque équation $f(x)$.

5. Méthode de Newton-Raphson :

La méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative utilisée pour résoudre l'équation $f(x) = 0$. Elle consiste à approcher la solution à partir d'une valeur initiale en utilisant la tangente à la courbe de la fonction, selon la relation :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Algorithme :

1. Choisir une valeur initiale x_0 , une tolérance ε et un nombre maximal d'itérations N
2. Calculer $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
3. Arrêter Si $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$ ou $k \geq N$.
4. Sinon, poser $x_k = x_{k+1}$ et répéter.

Exercice 3 :

Résoudre les équations suivantes par la méthode de Newton Raphson:

1. $x^3 - 3x - 5 = 0$; $x \in [2, 3]$.
2. $\cos(x) - x e^x = 0$; $x \in [0, 1]$.