حصة الأعمال الموجهة رقم (01)

التمرين 01:

تمكنت مؤسسة متخصصة في صناعة الورق من تطوير صنف معين منه (يستعمل للنسخ)، حيث أصبح منذ مدة يُساير التطور التكنولوجي الذي تشهده الآلات الناسخة ويناسبها أكثر من غيره.

وعلى إثر دراسة قامت بها هذه المؤسسة تبين لها ما يلي:

- حظيرة الآلات الناسخة (X_i: بعدد الوحدات) تطورت خلال الـ 10 سنوات الأخيرة كالتالي:

و.ق: 1000 وحدة

السنوات	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
X_i	1500	3500	4500	6000	7000	7500	8000	8000	8000	7200

- أما الكميات المباعة (Y_i) من ذلك الصنف من الورق، خلال نفس الفترة، فقد تطورت كالتالي:

و.ق: طن

السنوات	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Y_i	400	900	1200	1500	1700	1800	1900	2000	2000	1800

المطلوب:

أ- تحديد معامل إرتباط المتغير Y_i بالمتغير X_i.

ب-إذا علمت أن:

- X_iالمتوقعة خلال سنة 2000: 6500 ألف وحدة.
- X_iالمتوقعة خلال سنة 2001: 6000 الف وحدة.

قدِّر الكميات المتوقع بيعها من هذا الصنف من الورق خلال سنة 2000 ثم 2001.

ج -مثل بيانيا تغير Y_iبدلالة X_i، ثم ارسم خط الانحدار (لـ Y_iحسب X_i).

التمرين 02:

قامت إحدى المؤسسات المتخصصة في تأجير السيارات السياحية بتقديم هذه الخدمة لزبائنها لمدة بلغت خلال كل سنة من السنوات التالية، ما يلي:

و.ق: 01 ساعة

السنوات	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Y_i: مدة تأجير السيارات السياحية	4000	3700	3300	3200	2900	2600	2550	2450

بحيث بلغ سعر تأجير كل سيارة سياحية لمدة ساعة واحدة من الزمن، خلال نفس الفترة، ما يلي:

و.ق: 01 دج

السنوات	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
X_i: سعر تأجير كل سيارة لمدة ساعة واحدة	1000	1400	1500	1700	2100	2200	2200	2300

المطلوب:

1- حساب معامل إرتباط Y_i بـ X_i.

2- تحديد معادلة خط الإنحدار (Y_i بـ حسب X_i): $Y_i' = aX_i + b$

3- إذا كانت هذه المؤسسة ستستمر في رفع سعر تاجير كل سيارة سياحية لمدة ساعة واحدة من الزمن، في المستقبل، كالتالي:

- إلى 2400دج، خلال سنة 2007.
- ثم إلى 2650دج، خلال سنة 2008.

قدّرعدد الساعات المتوقع تقديمها من هذه الخدمة خلال كل سنة من هاتين السنتين.

4- مثل بيانيا التغير الذي شهدته Y_i بدلالة X_i، ثم ارسم خط الإنحدار (Y_i' بـ حسب X_i).

الحـــــل:

التمرين 01:

أ- **معامل الإرتباط(r):**

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2}}$$

السنوات (n=10)	$x_i = X_i - \bar{X}$	$y_i = Y_i - \bar{Y}$	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1990	−4.620	−1.120	21.344.400	5.174.400	1.254.400
1991	−2.620	−620	6.864.400	1.624.400	384.400
1992	−1.620	−320	2.624.400	518.400	102.400
1993	−120	−20	14.400	2.400	400
1994	880	180	774.400	158.400	32.400
1995	1.380	280	1.904.400	386.400	78.400
1996	1.880	380	3.534.400	714.400	144.400
1997	1.880	480	3.534.400	902.400	230.400
1998	1.880	480	3.534.400	902.400	230.400
1999	1.080	280	1.166.400	302.400	78.400
المجموع	–	–	$\sum x_i^2 = \mathbf{45.296.000}$	$\sum x_i y_i = \mathbf{10.686.000}$	$\sum y_i^2 = \mathbf{2.536.000}$

علما أن:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{61.200}{10} = 6.120$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{15.200}{10} = 1.520$$

$$r = \frac{10.686.000}{\sqrt{(45.296.000)(2.536.000)}} = \frac{10.686.000}{10.717.756,67} = +0,997$$

يدل (r) الموجب على وجود علاقة طردية بين متغيرين (X_i و Y_i) كما أن كونه قريب جدا من +1 يدل على الإرتباط **القوي جدا بين** المتغيرين، مما يبرر مواصلة العمل والتنبؤ **بالكميات المتوقع بيعها** خلال سنة 2000 ثم سنة 2001.

ب-أولا نحدد دالة الإنحدار: (أو معادلة خط الإنحدار لـ Y_i حسب X_i)

$$Y_i' = aX_i + b$$

علما أن:

$$\boldsymbol{a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = 0,236}$$

$$\boldsymbol{\bar{Y} = a\bar{X} + b} \quad \Rightarrow b = \bar{Y} - a\bar{X} = 1.520 - [(0.236)(6.120)] = 75,68$$

وبالتالي تصبح $\boldsymbol{Y_i' = f(x_i)}$ كالتالي:

$$\boldsymbol{Y_i' = 0,236\, X_i + 75,68}$$

ثانيا: الكميات المتوقع بيعها:

الكميات (Y'_{2000})المتوقع بيعها من الورق خلال سنة 2000:

$$(Y'_{2000}) = aX_{2000} + b$$

$$= 0,236\ (6.500) + 75,68$$

$$= 1.534 + 75,68 = 1.609,68 \text{ طن}$$

$$\simeq 1.610 \text{ طن}$$

الكميات (Y'_{2001})المتوقع بيعها من الورق خلال سنة 2001:

$$(Y'_{2001}) = aX_{2001} + b$$

$$= 0,236\ (6.000) + 75,68$$

$$= 1.416 + 75,68 = 1.491,68 \text{ طن}$$

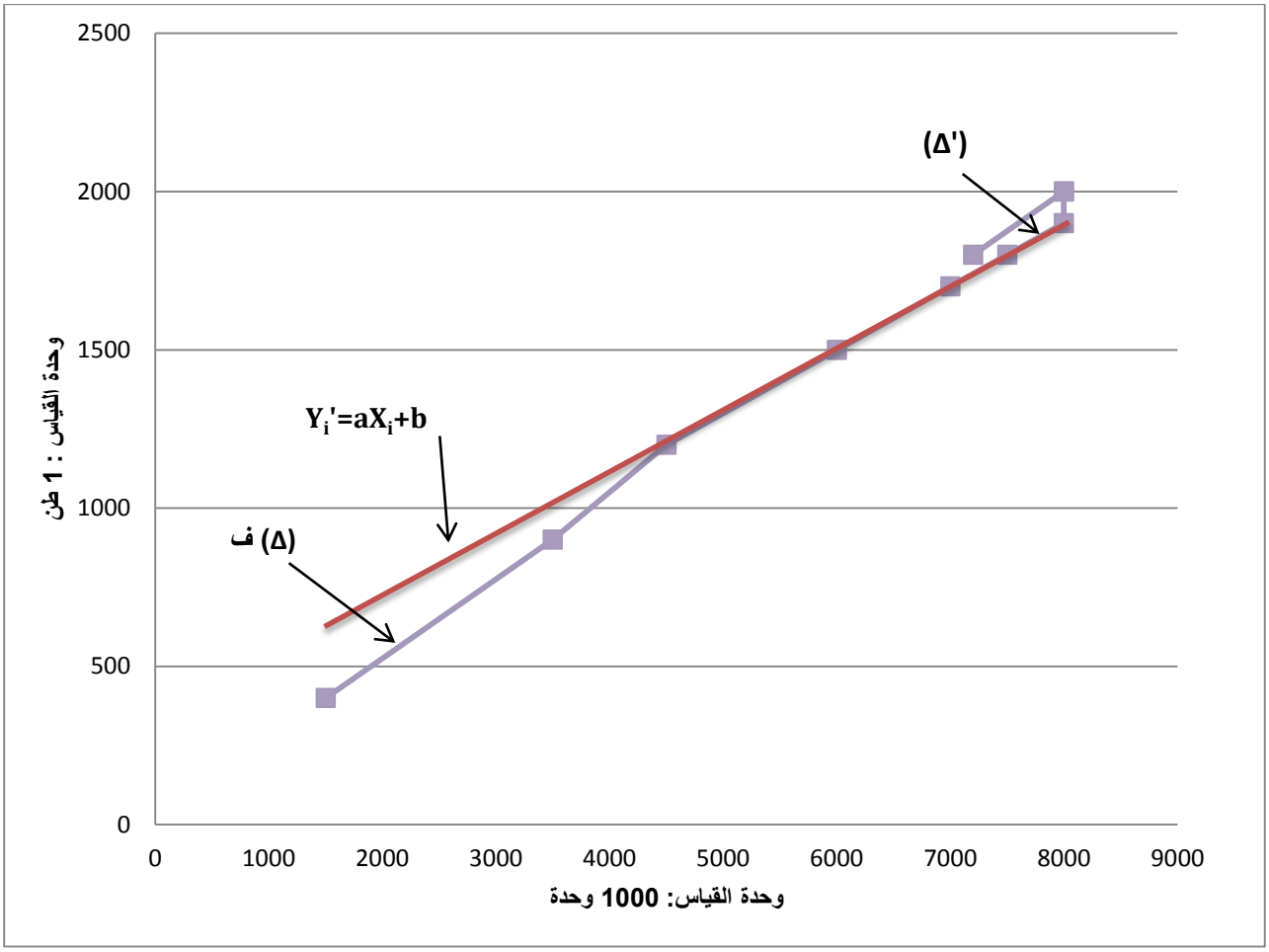
$$\simeq 1.492 \text{ طن}$$

والرسم البياني التالي، يوضح لنا التطور الذي شهدته الكميات المباعة (Y_i)بدلالة (X_i)، (بالإضافة إلى خط الإنحدار لـ Y_i' حسب X_i).

Δف: منحنى تطور المبيعات (Y_i) الفعلية، بدلالة X_i

Δ': خط الإنحدار لـ Y_i' حسب X_i

معادلة خط الإنحدار : $Y_i' = aX_i + b$



التمرين 02:

1- حساب معامل الإرتباط (لـ Y_i بـ X_i):

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2 \sum y_i^2}}$$

السنوات (n=8)	X_i	Y_i	$x_i = X_i - \bar{X}$	$y_i = Y_i - \bar{Y}$	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1999	1000	4000	−800	+ 912,50	640.000	832.656,25	−730.000
2000	1400	3700	− 400	+ 612,50	160.000	375.156,25	−245.000
2001	1500	3300	− 300	+ 212,50	90.000	45.156,25	− 63.750
2002	1700	3200	− 100	+ 112,50	10.000	12.656,25	−11.250
2003	2100	2900	+ 300	−187,50	90.000	35.156,25	−56.250
2004	2200	2600	+ 400	−487,50	160.000	237.656,25	−195.000
2005	2200	2550	+ 400	−537,50	160.000	288.906,25	−215.000
2006	2300	2450	+ 500	−637,50	250.000	406.406,25	−318.750
المجموع	$\sum_{X_i} = 144000$	$\sum Y_i = 24700$	**0**	**0**	$\sum x_i^2 = 1.560.000$	$\sum y_i^2 = 2.233.750$	$\sum x_i y_i = -1835000$

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{14.400}{8} = 1.800$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{24.700}{8} = 3.087{,}50$$

$$r = \frac{-1.835.000}{\sqrt{(1.560.000)(2.233.750)}} = \frac{-1.835.000}{1.866.721{,}70} \simeq -0{,}98 \simeq |98\%|$$

يدل (r) القريب جدا من |1| على وجود علاقة إرتباط قوية جدا لـ Y_i بـ X_i ،مما يسمح بمواصلة التحليل والتنبؤ بـ Y_i' بدلالة X_i **في المستقبل.**

كما يدل r السالب على وجود علاقة عكسية بين Y_i و X_i، أي أنهما يتغيران في اتجاهين معاكسين.

2 – تحديد a و b:

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{-1.835.000}{1.560.000} = -1{,}1763$$

$$\bar{Y} = a\bar{X} + b \quad \Rightarrow b = \bar{Y} - a\bar{X} = 3.087{,}50 - [(-1{,}1763)(1.800)]$$
$$= 3.087{,}50 + 2.117{,}34 = 5.204{,}84$$

وبالتالي المعادلة هي:

$$\boldsymbol{Y'_i = -1,1763\ X_i + 5.204,84}$$

(نلاحظ أنa يأخذ إشارة r).

3- تقدير عدد الساعات المتوقع تقديمها من خدمة إيجار السيارات السياحية:

- خلال السنة القادمة 2007:

حيث: $X_{2007} = 2400$دج

$$Y'_{(2007)} = -1,1763\ (2400) + 5.204,84$$

$$= -2.823,12 + 5.204,84$$

$$= 2.381,72 \backsimeq 2382 \quad \text{ساعة}$$

- خلال السنة القادمة 2008:

حيث: $X_{2008} = 2650$دج

$$Y'_{(2008)} = -1,1763\ (2650) + 5.204,84$$

$$= -3.117,1950 + 5.204,84$$

$$= 2.087,6450 \backsimeq 2088 \quad \text{ساعة}$$

نلاحظ أنه من المتوقع أن يستمر تراجع حجم الخدمات (من حيث عدد الساعات) المقدمة من قبل المؤسسة لما ستستمر في رفع سعر الساعة الواحدة منها في المستقبل.

4-(الإجابة على هذا السؤال متروكة للطالب (ة)