

Transfert de chaleur II
3 ème année Licence génie mécanique
Energétique

Pr. S. Saouli
Département des Sciences et de Technologie
Institut des Sciences et de Technologies
Université Abdelhafid Boussouf, Mila

V. 1. Introduction

Dans le deuxième chapitre nous avons vu qu'il y a trois modes de transfert de chaleur qui sont la conduction, la convection et le rayonnement. La conduction et la convection sont similaires car les deux nécessitent la présence d'un milieu matériel contrairement au rayonnement qui se propage même dans le vide. Cependant, la conduction et la convection se différencient par le fait que la dernière se passe dans un fluide en mouvement.

Dans un solide, le transfert de chaleur se fait toujours par conduction puisque les atomes ou les molécules du solide oscillent autour de positions fixes. Dans les fluides, cependant, le transfert de chaleur se fait par convection ou conduction selon qu'il y a présence ou absence d'un mouvement du fluide. Il est évident, que la conduction est le cas limite de la convection quand le fluide est figé.

La convection est plus compliquée à étudier à cause du mouvement du fluide, qui nécessite l'introduction de la mécanique des fluides. Les quantités de chaleur transférées lors de la convection sont plus importantes que dans le cas de la conduction car le mouvement du fluide entraîne l'énergie d'un point à un autre et facilite les échanges. Par conséquent, quand la vitesse du fluide augmente cela entraîne un plus grand transfert de chaleur.

V. 2. Différents types de convection

Lors de l'étude de la convection, il est impératif de distinguer son type. Si le mouvement du fluide est dû à l'action d'une force extérieure, la convection est dite forcée et si au contraire, le mouvement du fluide est dû seulement à la différence des masses volumiques suite aux différences de températures, la convection est appelée convection libre ou naturelle.

Si maintenant, nous nous intéressons à la nature du mouvement du fluide qui peut être laminaire ou turbulent, la convection aussi peut être aussi considérée comme laminaire ou turbulente. Connaissant les différences entre le

mouvement laminaire et turbulent, la convection forcée et libre, nous pouvons dire la quantité de chaleur transférée lors de la convection forcée turbulente est sont plus importantes que celles transférées lors d'une convection naturelle laminaire.

L'expérience montre que le transfert de la chaleur par convection dépend des propriétés thermophysiques du fluide comme la viscosité dynamique, la masse volumique, la capacité calorifique et aussi de la vitesse du fluide. Elle dépend aussi de la géométrie et l'état des surfaces du système ainsi que du type d'écoulement du fluide en question. Tout cela rend la convection le mode le plus compliqué du transfert de chaleur.

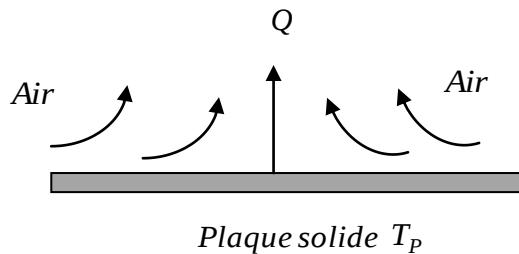
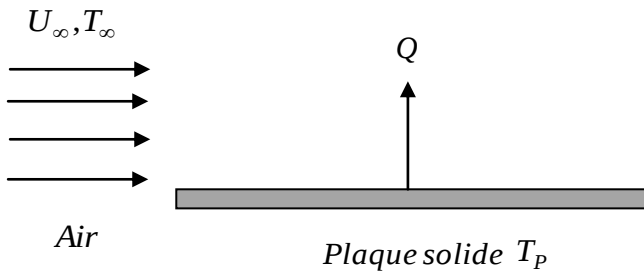


Figure V. 1. Transfert de chaleur d'une surface chaude vers l'air froid (a) convection forcée, (b) convection libre.

V. 3. La loi de Newton

Lors du transfert de chaleur entre un fluide et un solide ou entre deux fluides, la quantité de chaleur échangée est donnée par la formule de Newton

$$Q = \bar{h}S (T_p - T_\infty) \quad (\text{V.1})$$

où $\bar{h}$ est le coefficient de transfert convectif moyen, T_p et T_∞ sont respectivement les températures de la surface et du fluide et S est la surface d'échange.

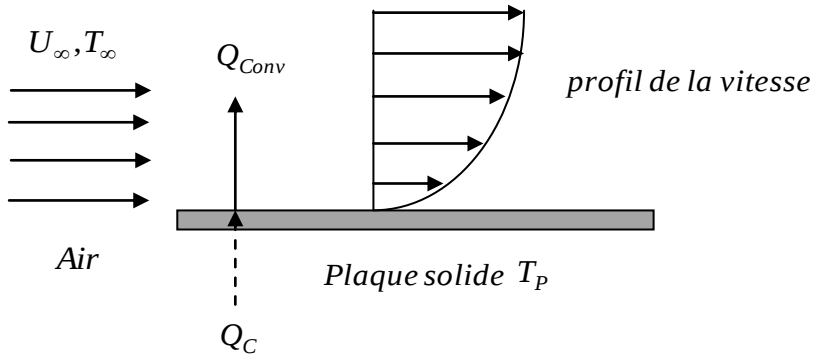


Figure V. 2. Refroidissement d'une surface chaude par convection forcée.

Quand un fluide est forcé de s'écouler sur une surface solide (non-poreuse), le fluide adhère à la surface solide à cause de sa viscosité et il n'y aura pas de glissement. Cette condition de non-glissement du fluide sur la surface solide est responsable du développement du profil de la vitesse. La même chose se passe pour la température, quand le fluide est au contact de la surface solide, la chaleur est transférée jusqu'à ce que, les deux températures s'égalisent et on atteint un état d'équilibre thermique. Par conséquent, cet état

d'équilibre est appelé condition du non-saut de la température.

Les deux conditions du non-glissement du fluide et du non-saut de la température, impliquent que le transfert de chaleur entre le fluide et la surface solide est dû à une conduction pure. Dans ce cas, nous pouvons écrire

$$Q_{con} = Q_{cov} \quad (V.2)$$

En utilisant la loi de Fourier pour la conduction et la loi de Newton pour la convection, nous pouvons réécrire la relation (V.2) sous la forme

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h_x (T_p - T_\infty) \quad (V.3)$$

où λ est la conductivité thermique du fluide, $\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$ est le gradient de la température du fluide sur la surface solide et h_x est le coefficient de transfert convectif local donné par la relation

$$h_x = \frac{-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{T_p - T_\infty} \quad (V.4)$$

Ainsi, le coefficient de transfert convectif local se détermine à partir du profil de la température dans le fluide en mouvement.

Le coefficient de transfert convectif moyen se calcule d'après la formule suivante

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx \quad (V.5)$$

où L est la longueur de la surface solide.

V. 4. Le nombre de Nusselt

Lors de l'étude de la convection, on a recours à l'adimensionnalisation des équations de bilan et on fait apparaître certains nombres adimensionnels qui combinent les différentes variables pour réduire le nombre de paramètres qui interviennent lors du traitement des problèmes de convection. L'un des nombres adimensionnels qui interviennent dans la convection est le fameux nombre dit de Nusselt, défini par la relation

$$Nu = \frac{hL_C}{\lambda} \quad (V.6)$$

où L_C est une longueur caractéristique du système et λ est la conductivité thermique du fluide en question.

Pour comprendre la signification physique du nombre de Nusselt, considérons un fluide confiné entre deux plaques distantes de L et maintenues aux températures T_1 et T_2 .

Le transfert de chaleur dans ce cas est soit par convection si le fluide se meut ou par conduction si le fluide est immobile.

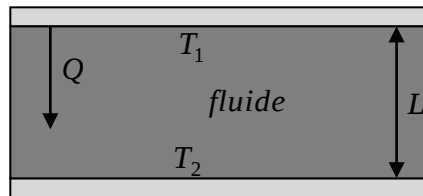


Figure V. 3. Transfert de chaleur dans la couche fluide.

Le transfert de chaleur travers la couche fluide par convection par unité de surface est

$$Q_{Conv} = h(T_1 - T_2) \quad (V.7)$$

si le fluide est immobile, le transfert de chaleur par conduction à travers la couche fluide par unité de surface est

$$Q_C = \lambda \frac{(T_1 - T_2)}{L} \quad (V.8)$$

divisons l'équation V. 7 par l'équation V. 8 et nous obtenons

$$\frac{Q_{Conv}}{Q_C} = \frac{h(T_1 - T_2)}{\lambda \frac{(T_1 - T_2)}{L}} = \frac{hL}{\lambda} = Nu \quad (V.9)$$

c'est le nombre de Nusselt. Par conséquent, le nombre de Nusselt exprime l'augmentation du transfert de chaleur à travers la couche fluide par convection relativement au transfert de chaleur par conduction. Un nombre de Nusselt égal à l'unité ($Nu = 1$) représente un transfert de chaleur par conduction pure à travers la couche fluide.

V. 5. Classification des écoulements

La convection combine la thermodynamique à la mécanique des fluides et cela rend son étude difficile. Pour simplifier un peu les choses, il est préférable de classer les problèmes en groupe et déterminer leurs caractéristiques physiques communes.

V. 5. 1. Fluides visqueux et fluides parfaits

Quand une couche fluide se déplace relativement à une autre couche, il apparaît une force de frottement à leur interface de sorte que la couche fluide lente tente de ralentir la couche fluide rapide. Cette force de frottement est intimement liée à une propriété intrinsèque des fluides qui est communément appelée la viscosité. Dans la nature, il n'y a aucun fluide qui n'a pas de viscosité. Les fluides qui possèdent une viscosité sont dits fluides visqueux. Cependant, certains fluides ont des viscosités très faibles et son effet peut en pratique être négligé, dans ce cas, fluides sont dits parfaits.

V. 5. 2. Écoulements internes et écoulements externes

Les écoulements sont classés selon qu'ils sont internes ou externes selon que le fluide s'écoule dans un espace confiné ou sur une surface. Un fluide qui s'écoule sur une surface ou sur un tube est en écoulement externe. Un fluide qui s'écoule dans un tube ou entre deux plaques solides quelconque, son écoulement sera appelé écoulement interne. Si un fluide s'écoule dans tube partiellement rempli, l'écoulement est dit écoulement dans un canal ouvert.

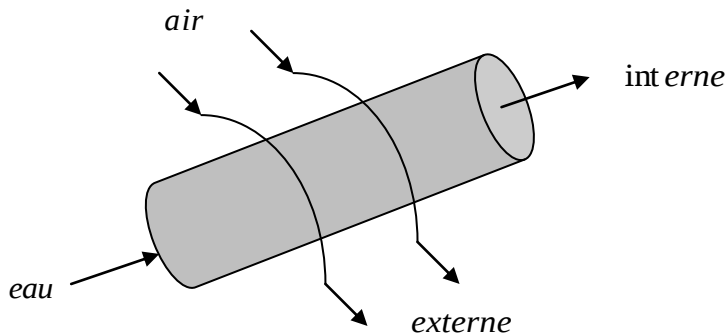


Figure V. 4. Écoulement interne et écoulement externe.

V. 5. 3. Écoulements compressibles et écoulements incompressibles

Les écoulements des fluides sont classés en écoulements compressibles ou incompressibles selon les variations de leurs masses volumiques. Les masses volumiques des liquides sont généralement constantes, par conséquent, les écoulements des liquides sont souvent considérés comme incompressibles. Cependant, pour les gaz, les masses volumiques ne sont pas constantes. Mais, ils peuvent être considérés comme incompressibles si leurs vitesses d'écoulement sont inférieures à trente pour cent de la vitesse du son.

V. 5. 4. Écoulements forcés et écoulements libres (naturels)

L'écoulement d'un fluide est dit forcé ou naturel selon le moyen utilisé pour initier son mouvement. Dans un écoulement forcé, le fluide est mis en mouvement en utilisant une pompe ou un ventilateur. Dans le cas d'un écoulement naturel, le mouvement du fluide est initié par une cause naturelle comme les effets de flottabilité. Un fluide chaud monte toujours vers le haut tandis que le fluide froid descend vers le bas.

V. 5. 5. Écoulements stationnaires et écoulements transitoires

Nous appelons un écoulement stationnaire, un écoulement dont les caractéristiques ne dépendent pas du temps. Le contraire sera appelé un écoulement transitoire. Un écoulement est dit uniforme si ses caractéristiques ne varient pas d'une position à une autre dans une certaine région de l'espace.

V. 6. Equations de bilan

V. 6. 1. Équation de continuité

Soit v un élément de volume et s un élément de surface autour d'une particule fluide, appelons ρ la densité volumique du fluide, la masse de toute particule fluide est par conséquent $m = \int_v \rho dv$.

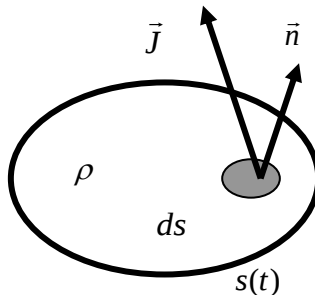


Figure V. 5. Volume de contrôle.

Supposons qu'à l'intérieur de l'élément de volume v existe une source de matière d'amplitude ψ égale à la quantité de matière produite ou détruite par unité de temps et par unité de volume. Soit $\vec{J}$ la densité de flux de matière sortant du volume v à travers la surface s due à d'autres forces thermodynamiques. La variation de la masse totale de l'élément de volume v est

$$\frac{Dm}{Dt} = \int_v \psi dv - \int_s \vec{J} \cdot \vec{n} ds \quad (V.10)$$

en utilisant le théorème d'Ostogradski, la relation précédente devient

$$\frac{Dm}{Dt} = \int_v (\psi - \text{div} \vec{J}) dv \quad (V.11)$$

la dérivée particulaire de m est

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_v \rho dv = \int_v \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} \right) dv \quad (V.12)$$

en égalant les équations V. 11 et V. 12, on obtient

$$\int_v \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V} + \vec{J}) - \psi \right] dv = 0 \quad (V.13)$$

soit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V} + \vec{J}) = \psi \quad (V.14)$$

c'est l'équation de continuité.

En absence de source de masse et de flux de matière l'équation de continuité en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho W)}{\partial z} = 0 \quad (\text{V.15})$$

Si le fluide est incompressible (ρ est constante) l'équation de continuité dans ce cas devient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{V.16})$$

et en régime permanent elle s'écrit

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (\text{V.17})$$

V. 6. 2. Équation de la quantité du mouvement

En vertu de la loi du mouvement de Newton, une masse soumise à une force extérieure acquerra une accélération $\vec{\gamma}$, pour une particule fluide de masse $m = \int_v \rho dv$ soumise à un

torseur de force extérieure $\int_v \vec{F}_{ext} dv$ on a

$$\int_v \rho \vec{\gamma} dv = \int_v \vec{F}_{ext} dv \quad (\text{V.18})$$

le torseur des forces extérieures est la somme des forces volumiques et forces surfacique appliquées par le milieu extérieur sur l'élément v

$$\int_v \rho \vec{\gamma} dv = \int_v \rho \vec{F} dv + \int_s \vec{T} \cdot \vec{n} ds \quad (\text{V.19})$$

projetons cette équation sur l'axe Ox_i

$$\int_v \rho \gamma_i dv = \int_v \rho F_i dv + \int_s T_i ds \quad (\text{V.20})$$

on a vu déjà que

$$\int_s T_i ds = \int_s \sigma_{ij} n_j ds = \int_v \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv \quad (V.21)$$

en remplaçant l'équation V. 21 dans l'équation V. 20 on trouve

$$\int_v \rho \gamma_i dv = \int_v \left(\rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dv \quad (V.22)$$

l'accélération γ_i n'est rien d'autre que la dérivée particulaire de la vitesse V_i , soit

$$\gamma_i = \frac{DV_i}{Dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (V.23)$$

en combinant ces équations on obtient l'équation du mouvement de la particule fluide sous la forme condensée

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = F_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (V.24)$$

tenant compte du fait que les forces de volume dérivent d'un potentiel $U(x_i)$ et en introduisant la pression et le déviateur τ_{ij} tel que

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (V.25)$$

on peut transformer alors l'équation du mouvement et obtenir l'équation

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (V.26)$$

qui en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} &= -\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

pour les fluides newtoniens, le déviateur est

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\text{div}\vec{V} \quad (\text{V.27})$$

les éléments ε_{ij} sont les taux de déformations donnés par l'expression

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{V.28})$$

la dérivée du déviateur par rapport à la coordonnée x_j est

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu \text{div}\vec{V}) + \mu (\Delta V_i + \text{div} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i}) + \text{grad} \mu \cdot (\text{grad} V_i + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i}) \quad (\text{V.29})$$

en substituant cette expression dans l'équation V. 26, l'équation du mouvement pour les fluides newtoniens prend la forme

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{2}{3\rho} (\mu \text{div}\vec{V}) + \frac{\mu}{\rho} (\Delta V_i + \text{div} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i}) \\
 &\quad + \frac{1}{\rho} \text{grad} \mu \cdot (\text{grad} V_i + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i})
 \end{aligned} \quad (\text{V.30})$$

Si le fluide a une viscosité dynamique μ et s'il est incompressible, l'équation V. 30 se simplifie et devient

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \Delta V_i \quad (\text{V.30a})$$

équation qui en coordonnées cylindriques s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} &= -\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

où $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est la viscosité cinématique du fluide. Ces

équations sont appelées équation de Navier-Stokes. Dans chaque équation, les termes $U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} + W \frac{\partial}{\partial z}$ sont les

termes d'inertie et les termes $\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ sont

appelés les termes de diffusion.

V. 6. 3. Équation d'énergie

Appelons u l'énergie interne de l'élément de volume dv , U l'énergie interne du volume v et E_c son énergie cinétique. La variation de l'énergie totale est la somme des variations de l'énergie interne et l'énergie cinétique d'où la relation

$$\frac{D(U + E_c)}{Dt} = \int_v \frac{D(\rho u + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2)}{Dt} dv \quad (\text{V.31})$$

Cette variation de l'énergie totale est la somme des puissances calorifiques et des puissances des forces extérieures.

Les puissances calorifiques sont la quantité de chaleur conductive $\vec{q}$ et la chaleur générée dans le volume v par les sources internes. Si nous appelons q_s la chaleur générée par unité de volume et si nous utilisons la loi de Fourier on peut écrire que

$$P_c = - \int_s \vec{q} \cdot \vec{n} ds + \int_v q_s dv \quad (V.32)$$

où

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} T \quad (V.33)$$

λ est la conductivité thermique du fluide et T est la température. En appliquant le théorème d'Ostrogradski l'équation V. 32 devient

$$P_c = \int_v (\text{div}(\lambda \text{grad} T) + q_s) dv \quad (V.34)$$

Les puissances des forces extérieures sont

$$P_e = \int_s (\vec{T} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{V} ds + \int_v \rho \vec{F} \cdot \vec{V} dv \quad (V.35)$$

mais comme on a

$$\int_v \frac{D(\rho u + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2)}{Dt} dv = P_c + P_e \quad (V.36)$$

nous obtenons

$$\int_v \frac{D(\rho u + \frac{1}{2} \rho \vec{V}^2)}{Dt} dv = \int_v (\text{div}((\lambda \text{grad} \vec{T} + q_s))) dv + \int_v \rho F_i V_i dv + \int_s \sigma_{ij} V_i n_j ds \quad (\text{V.37})$$

à présent éliminons le terme de l'énergie cinétique de l'équation V. 37 en utilisant l'équation du mouvement

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{V.38})$$

multiplions les deux membres de cette équation par V_i et on a alors

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} V_i = \rho F_i V_i + V_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{V.40})$$

en intégrant sur le volume v , il vient

$$\int_v \rho V_i \frac{DV_i}{Dt} dv = \int_v \rho F_i V_i dv + \int_v V_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv \quad (\text{V.41})$$

comme nous avons la relation

$$V_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} V_i \sigma_{ij} - \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (\text{V.42})$$

introduisons la dans l'équation V. 41 et on obtient

$$\int_v \rho V_i \frac{DV_i}{Dt} dv = \int_v \rho F_i V_i dv + \int_v \frac{\partial V_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv - \int_v \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dv \quad (\text{V.43})$$

le terme $\int_v \rho V_i \frac{DV_i}{Dt} dv$ peut s'écrire comme $\frac{1}{2} \int_v \rho \frac{D\vec{V}^2}{Dt} dv$ c'est à dire

$$\frac{1}{2} \int_v \rho \frac{D\vec{V}^2}{Dt} dv = \int_v \rho F_i V_i dv + \int_v \frac{\partial V_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv - \int_v \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dv \quad (\text{V.44})$$

en injectons l'équation V. 44 dans l'équation V. 37, nous obtenons l'équation d'énergie sous la forme

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + q_s + \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (\text{V.45})$$

V. 6. 4. Équation de l'enthalpie

L'enthalpie h est définie par la relation

$$h = u + \frac{P}{\rho} \quad (\text{V.46})$$

où P et ρ sont respectivement la pression et la masse volumique du fluide. Calculons la dérivée particulaire de l'enthalpie par rapport au temps

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho \frac{Du}{Dt} + \frac{DP}{Dt} - \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (\text{V.47})$$

en utilisant l'équation de continuité en absence de source de matière et des forces thermodynamiques à savoir

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{V} = 0 \quad (\text{V.48})$$

on obtient

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{DP}{Dt} - P \text{div} \vec{V} \quad (\text{V.49})$$

en substituant cette relation dans l'équation V. 45, trouvons l'équation de d'enthalpie sous la forme

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \text{div}(\lambda \text{grad } T) + \frac{DP}{Dt} + P \text{div} \vec{V} + q_s + \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (\text{V.50})$$

V. 6. 5. Equation de la chaleur

D'après la thermodynamique on sait que h est fonction de la température et de la pression

$$h = h(T, P) \quad (\text{V.51})$$

d'où la relation

$$\frac{Dh}{Dt} = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \frac{DT}{Dt} + \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T \frac{DP}{Dt} \quad (\text{V.52})$$

le terme $\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P$ n'est rien d'autre que la chaleur spécifique du fluide à pression constante

$$C_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \quad (\text{V.53})$$

calculons à présent le terme $\left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T$ et pour cela utilisons le premier principe de la thermodynamique, à savoir

$$du = \delta Q + \delta W = \delta Q - P dv \quad (\text{V.54})$$

introduisons l'enthalpie h qui est définie par

$$h = u + Pv \quad (\text{V.55})$$

d'où

$$\delta Q = dh - v dP \quad (\text{V.56})$$

à partir de la définition de l'entropie qui est $ds = \frac{\delta Q}{T}$, nous obtenons

$$ds = \frac{dh}{T} - v \frac{dP}{T} \quad (\text{V.57})$$

remplaçons le terme de l'enthalpie donné par l'expression

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T dP + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P dT \quad (\text{V.58})$$

nous trouvons

$$ds = \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T - \frac{v}{T} \right]_P dP + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P dT \quad (\text{V.59})$$

la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction entropie soit une fonction d'état est que

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T - \frac{v}{T} \right]_P = \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P \right]_T \quad (\text{V.60})$$

soit

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P + v \quad (\text{V.61})$$

si nous remplaçons le volume v par $\frac{1}{\rho}$, on déduit que

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (\text{V.62})$$

introduisons le coefficient d'expansion thermique à pression constante β défini par

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (\text{V.63})$$

l'équation V. 62 s'écrit alors

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = \frac{\beta}{\rho} \quad (\text{V.64})$$

et ainsi le terme $\left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T$ devient

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P} \right)_T = \frac{1 - T\beta}{\rho} \quad (\text{V.65})$$

en utilisant les relations V. 53 et V. 65, nous obtenons pour le terme $\rho \frac{Dh}{Dt}$ l'expression $\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho C_p \frac{DT}{Dt} + (1 - T\beta) \frac{DP}{Dt}$ qui une fois substitué dans l'équation V. 50, nous conduit à l'équation de la chaleur sous sa forme générale, à savoir

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \text{div}(\lambda \text{grad} \vec{T}) + q_s + P \text{div} \vec{V} + T\beta \frac{DP}{Dt} + \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (\text{V.66})$$

Ainsi on a obtenu à partir de considérations physiques simples les équations de bilan pour l'écoulement d'un fluide homogène et monophasique. Ces équations sont la base de la mécanique des fluides et du transfert de chaleur dans les milieux continus homogènes et monophasiques.

Si nous explicitons la dérivée particulaire $\left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} \right)$, l'équation de la chaleur s'écrit alors sous la forme

$$\begin{aligned} \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} T \right) &= \text{div}(\lambda \text{grad} \vec{T}) + q_s \\ + P \text{div} \vec{V} + T\beta \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} P \right) &+ \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (\text{V.67})$$

Le dernier terme $\sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ du membre droit de l'équation V. 67 peut être écrit sous la forme

$$\sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -P \operatorname{div} \vec{W} + \Phi \quad (\text{V.68})$$

où Φ est la fonction de dissipation visqueuse donnée par la relation

$$\Phi = -\frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{W})^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (\text{V.69})$$

Ce terme exprime la chaleur générée par les forces visqueuses au sein du fluide en mouvement. Cette fonction est très importante lors de l'écoulement à très grande vitesse des fluides très visqueux.

Généralement le coefficient β est très petit et si le fluide est incompressible ($\operatorname{div} \vec{V} = 0$), l'équation V. 67 se simplifie et devient

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} T \right) = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + q_s + \Phi \quad (\text{V.70})$$

qui en coordonnées cartésiennes, pour une conductivité thermique λ constante, s'écrit

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} + W \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_s + \Phi \quad (\text{V.71})$$

la fonction de dissipation visqueuse dans ce cas, devient

$$\Phi = 2\mu \left[\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] \quad (\text{V.72})$$

$$\begin{aligned}\Phi = 2\mu & \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (V.73)\end{aligned}$$

V. 7. Concept de la couche limite visqueuse

Le concept de la couche limite fut introduit par Prandtl au début du vingtième siècle, il réussit à simplifier les équations de Navier-Stokes et trouva ce que nous appelons aujourd'hui les équations de la couche limite.

La couche limite est une couche très fine du fluide adjacente à la surface d'un corps solide où les effets de la viscosité sont très intenses. Les particules fluides adjacentes à la surface solide ont une vitesse nulle à cause de la condition de non-glissement. Cette première couche de vitesse nulle ralentit le mouvement de la couche au-dessus à cause de la viscosité et ainsi de suite. Suite à cela, il se développe un certain profil de la vitesse au sein de cette couche fluide allant de 0 à U_∞ loin de la surface solide. La couche au-dessus de la surface solide où la variation de la vitesse dans la direction transversale est importante, est appelée la couche limite visqueuse. L'épaisseur de la couche limite visqueuse $\delta_v(x)$ est définie comme étant la distance à partir de la surface solide où la vitesse du fluide est $0,99U_\infty$. Notons que l'épaisseur de la couche limite visqueuse $\delta_v(x)$ augmente dans la direction longitudinale puisque le transfert de la quantité du mouvement est plus important loin de la région d'entrée.

A cause du frottement du fluide sur la surface solide et la condition de non-glissement, nous pouvons définir la force de frottement par unité de surface τ_p que nous appelons la contrainte de cisaillement pariétale et elle est donnée par la relation

$$\tau_P = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{V.74})$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide et $\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0}$ est le gradient de la vitesse longitudinale sur la surface solide. Cette contrainte de cisaillement pariétale est liée au coefficient de frottement pariétal C_{fp} par l'équation

$$C_{fp} = \frac{\tau_P}{\frac{\rho U_\infty^2}{2}} \quad (\text{V.75})$$

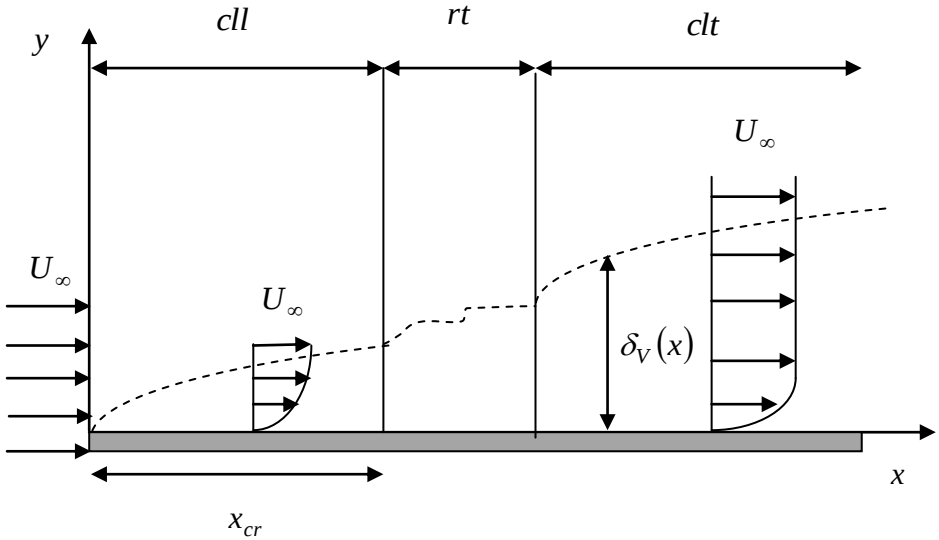


Figure V. 6. Développement de la couche limite.
ccl : couche limite laminaire, rt : région de transition, clt :
couche limite turbulente.

La force de frottement est par conséquent

$$F_f = C_{fp} S \frac{\rho U_\infty^2}{2} \quad (\text{V.76})$$

où S est la surface sur laquelle la force de frottement agit.

V. 8 Concept de la couche limite thermique

Considérons un fluide qui arrive à la température T_∞ sur une plaque solide maintenue à la température T_p . Les particules fluides adjacentes à la surface solide atteignent l'équilibre thermique et leur température devient celle de la plaque. Après cela, elles échangent la chaleur avec les particules fluides qui les juxtaposent et ainsi de suite. Suite à cela, il se développe un certain profil de la température au sein de cette couche fluide allant de T_p à T_∞ loin de la surface solide. La couche au-dessus de la surface solide où la variation de la température dans la direction transversale est importante, est appelée la couche limite thermique. L'épaisseur de la couche limite thermique $\delta_T(x)$ est définie comme étant la distance à partir de la surface solide où la température du fluide est $T_p + 0,99(T_\infty - T_p)$. Notons que l'épaisseur de la couche limite thermique $\delta_T(x)$ augmente dans la direction longitudinale puisque le transfert de chaleur est plus important loin de la région d'entrée. Lors de l'écoulement d'un fluide sur une surface chaude ou froide, les deux couches limites se développent simultanément. La couche limite visqueuse aura une influence notable sur le développement de la couche limite thermique et par conséquent sur le transfert thermique convectif.

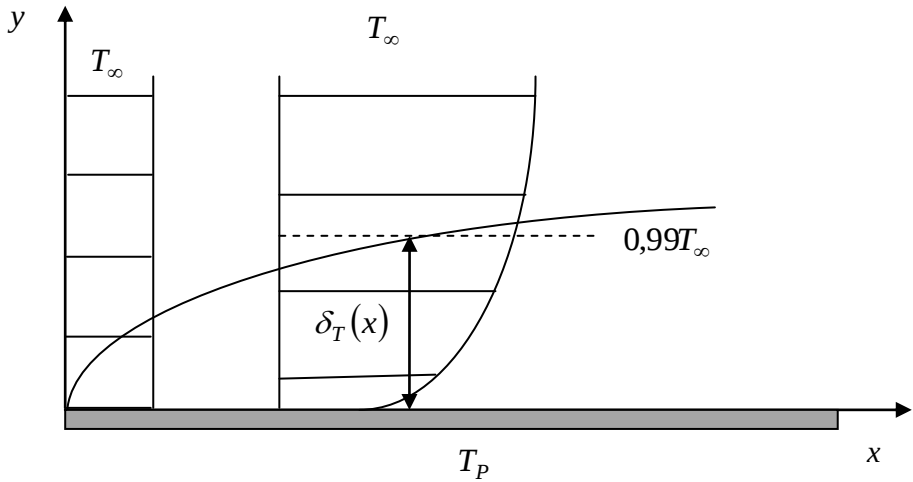


Figure V. 7. Couche limite thermique.

V. 9. Le nombre de Prandtl

L'épaisseur de la couche limite visqueuse $\delta_v(x)$ est intimement liée à l'épaisseur de la couche limite thermique $\delta_T(x)$ à travers le nombre adimensionnel Pr appelé le nombre de Prandtl. Ce nombre est défini par le rapport

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a} \quad (V.77)$$

où ν est la diffusion moléculaire de la quantité du mouvement et a est la diffusion moléculaire de la chaleur. Pour les gaz, le nombre de Prandtl est proche de l'unité ($Pr=1$), ce qui montre que dans les gaz, la quantité du mouvement et la chaleur se dissipent avec le même taux. La chaleur se dissipe plus rapidement dans liquides ($Pr \ll 1$) que dans les huiles ($Pr \gg 1$).

Fluide	Pr
Métaux liquides	0,004-0,030
Gaz	0,7-1,0
Eau	1,7-13,7
Fluides organiques légers	5-50
Huiles	50-100000
Glycérine	2000-100000

Tableau V. 1. Nombre de Prandtl pour différents fluides.

V. 10. Le nombre de Reynolds

La transition entre le régime laminaire et le régime turbulent dépend de la géométrie de la surface, de la rugosité de la surface, de la vitesse de l'écoulement libre, de la température et du type du fluide. A partir de tests expérimentaux, Reynolds découvrit que le régime d'écoulement dépend du rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité. Ce rapport est appelé le nombre de Reynolds, qui est un nombre adimensionnel défini par la relation

$$\text{Re} = \frac{\frac{\rho U^2}{L_C}}{\frac{\mu U}{L_C^2}} = \frac{\rho U L_C}{\mu} = \frac{U L_C}{\nu} \quad (\text{V.78})$$

Aux grands nombres de Reynolds, les forces d'inertie sont plus importantes que les forces de viscosité, ce qui veut dire que les forces visqueuses ne peuvent pas éliminer les mouvements aléatoires et les fluctuations rapides du fluide et par conséquent l'écoulement du fluide devient turbulent. Aux petits nombres de Reynolds, les forces de viscosité sont

plus grandes que les forces d'inertie et gardent le fluide en ligne ce qui veut dire que l'écoulement est laminaire.

V. 11. Equations de la couche limite laminaire

Considérons l'écoulement permanent et bidimensionnel d'un fluide newtonien incompressible sur une plaque plane et lisse. Si les propriétés physiques du fluide sont constantes, l'équation de continuité et les équations de Navier-Stokes se résument aux équations suivantes

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (V.79)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (V.80)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (V.81)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (V.82)$$

Pour établir les équations de la couche limite faisons le changement de variables suivant

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \hat{y} = \frac{y}{L} \sqrt{\text{Re}_L} \quad (V.83)$$

$$\hat{U} = \frac{U}{U_\infty}, \hat{V} = \frac{V}{U_\infty} \sqrt{\text{Re}_L}, \hat{T} = \frac{T - T_\infty}{T_\infty - T_p}, \hat{P} = \frac{P}{\rho U_\infty^2} \quad (V.84)$$

où $\text{Re}_L = \frac{U_\infty L}{\nu}$ est le nombre de Reynolds. En injectant ces nouvelles variables dans les équations V. 79, V. 80, V. 81 et V. 82, nous obtenons une forme adimensionnelle des équations

de bilan pour un écoulement laminaire bidimensionnel. Ces équations sont

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (\text{V.85})$$

$$\hat{U} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} + \hat{V} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{x}} + \left(\frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{y}^2} \right) \quad (\text{V.86})$$

$$\frac{1}{\text{Re}_L} \left(\hat{U} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{x}} + \hat{V} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{y}} \right) = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{y}} + \left(\frac{1}{\text{Re}_L^2} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{y}^2} \right) \quad (\text{V.87})$$

$$\hat{U} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \hat{V} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} = \left(\frac{1}{\text{Pr Re}_L} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2} \right) \quad (\text{V.88})$$

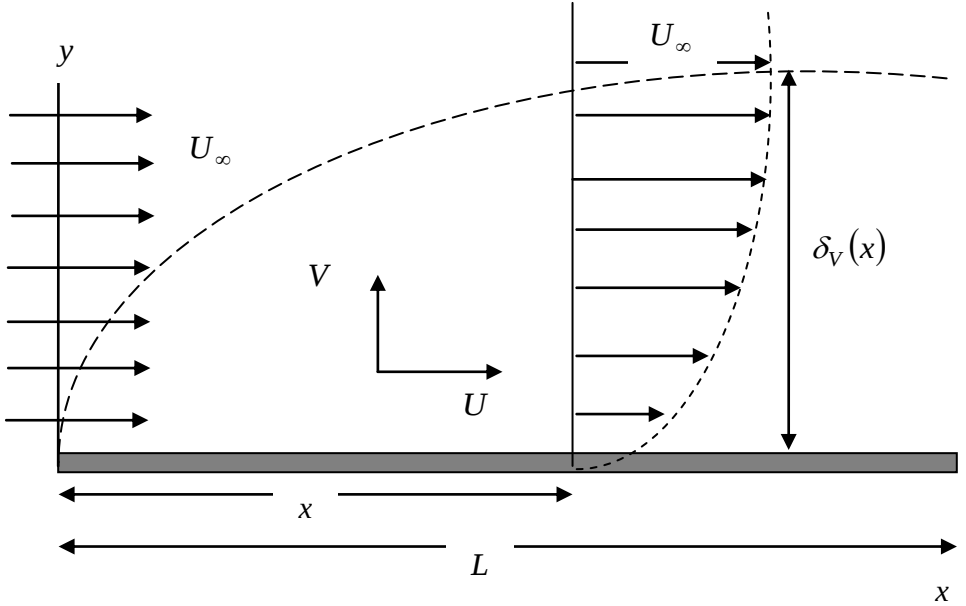


Figure V. 8. Illustration de la couche limite sur une surface plane.

Quand le nombre de Reynolds Re_L tend vers l'infini, les rapports $\frac{1}{Re_L}$ et $\frac{1}{Re_L^2}$ tendent vers zéro. Dans ce cas, les équations V. 85, V. 86, V. 87 et V. 88 se réduisent aux équations suivantes

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (V.89)$$

$$\hat{U} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} + \hat{V} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{y}^2} \quad (V.90)$$

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (V.91)$$

$$\hat{U} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \hat{V} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2} \quad (V.92)$$

où $Pr = \frac{\mu C_P}{\lambda}$ est le nombre de Prandtl.

Si nous revenons aux variables physiques, les équations de la couche limite bidimensionnelle en écoulement laminaire sont

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (V.93)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (V.94)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (V.95)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (V.96)$$

L'équation (V. 95) stipule que la pression dans la direction y à travers la couche limite est constante. Les conditions aux limites pour ce problème sont

$$x = 0, U = U_\infty, V = 0, T = T_\infty \quad (\text{V.97})$$

$$y = 0, U = 0, V = 0, T = T_p \quad (\text{V.98})$$

$$y = \infty, U = U_\infty, V = 0, T = T_\infty \quad (\text{V.99})$$

V. 12. Formes fonctionnelles du coefficient de frottement pariétal et du coefficient d'échange convectif

Pour établir les relations fonctionnelles pour la couche limite bidimensionnelle faisons le changement de variables suivant

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \hat{y} = \frac{y}{L} \quad (\text{V.100})$$

$$\hat{U} = \frac{U}{U_\infty}, \hat{V} = \frac{V}{U_\infty}, \hat{T} = \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p}, \hat{P} = \frac{P}{\rho U_\infty^2} \quad (\text{V.101})$$

en substituant ces nouvelles variables dans les équations de la couche limite (équations (V. 93), (V. 94) et (V. 96)) nous obtenons les équations adimensionnelle suivantes

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (\text{V.102})$$

$$\hat{U} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} + \hat{V} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{y}^2} \quad (\text{V.103})$$

$$\hat{U} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \hat{V} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{\text{Re}_L \text{Pr}} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2} \quad (\text{V.104})$$

où $Re_L = \frac{V_\infty L}{\nu}$ est le nombre de Reynolds et $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$ est le nombre de Prandtl. Les conditions aux limites adimensionnelles pour ce problème sont alors

$$\hat{x} = 0, \hat{U} = 1, \hat{V} = 0, \hat{T} = 1 \quad (V.105)$$

$$\hat{y} = 0, \hat{U} = 0, \hat{V} = 0, \hat{T} = 0 \quad (V.106)$$

$$\hat{y} = \infty, \hat{U} = 1, \hat{V} = 0, \hat{T} = 1 \quad (V.107)$$

Les équations de la couche limite renferment trois inconnues $\hat{U}$, $\hat{V}$ et $\hat{T}$, deux variables $\hat{x}$ et $\hat{y}$ et deux paramètres Re_L et Pr . Pour une géométrie donnée, la solution pour $\hat{U}$ et $\hat{V}$ peuvent être écrites sous la forme

$$\hat{U} = F_1(\hat{x}, \hat{y}, Re_L) \quad (V.108)$$

$$\hat{V} = F_2(\hat{x}, \hat{y}, Re_L) \quad (V.109)$$

La contrainte de cisaillement pariétale τ_p est par définition donnée par la relation

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (V.110)$$

qui, en termes de la vitesse adimensionnelle $\hat{U}$ et de la distance transversale adimensionnelle $\hat{y}$, s'écrit

$$\tau_p = \frac{\mu U_\infty}{L} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} \right)_{\hat{y}=0} \quad (V.111)$$

Définissons à présent, le coefficient de frottement pariétal Cf_{p_x} par la formule

$$Cf_{Px} = \frac{\tau_p}{\frac{\rho U_\infty^2}{2}} \quad (\text{V.112})$$

En substituant l'équation (), nous obtenons

$$Cf_{Px} = \frac{2}{\rho U_\infty^2} \frac{\mu U_\infty}{L} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} \right)_{\hat{y}=0} \quad (\text{V.113})$$

soit

$$Cf_{Px} = \frac{2}{\text{Re}_L} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} \right)_{\hat{y}=0} \quad (\text{V.114})$$

De cette formule, nous pouvons maintenant stipuler que le coefficient de frottement pariétal peut s'écrire sous la forme

$$Cf_{Px} = F_3(\hat{x}, \text{Re}_L) \quad (\text{V.115})$$

Cette relation montre que ce coefficient de frottement pariétal ne dépendra que du nombre de Reynolds Re et de l'abscisse adimensionnelle $\hat{x}$.

Pour la température $\hat{T}$, sa forme fonctionnelle s'écrit sous la forme

$$\hat{T} = F_4(\hat{x}, \hat{y}, \text{Re}_L, \text{Pr}) \quad (\text{V.116})$$

Le coefficient d'échange convectif est par définition donné par la relation

$$h = \frac{Q_p}{T_p - T_\infty} \quad (\text{V.117})$$

La quantité de chaleur échangée entre la plaque solide à la température T_p et le fluide à la température T_∞ est donnée par la loi de Fourier et elle est égale à

$$Q_p = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{\lambda (T_\infty - T_p)}{L} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} \right)_{\hat{y}=0} \quad (\text{V.118})$$

en combinant les relations V. 117 et V. 118, nous obtenons l'expression du coefficient d'échange convectif sous la forme

$$h = \frac{\lambda}{L} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} \right)_{\hat{y}=0} \quad (\text{V.119})$$

soit

$$\frac{hL}{\lambda} = \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} \right)_{\hat{y}=0} \quad (\text{V.120})$$

et à partir de la définition du nombre de Nusselt

$$Nu = \frac{hL}{\lambda} \quad (\text{V.121})$$

nous obtenons alors

$$Nu = \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} \right)_{\hat{y}=0} \quad (\text{V.122})$$

En tenant compte de l'équation V. 116, nous déduisons la forme fonctionnelle du nombre de Nusselt sous la forme

$$Nu_x = F_5(\hat{x}, Re_L, Pr) \quad (\text{V.123})$$

Si nous nous intéressons aux valeurs moyennes du coefficient de frottement pariétal et du nombre de Nusselt, il faut intégrer les formes fonctionnelles par rapport à la variable adimensionnelle entre zéro et un et dans ce cas, nous pouvons écrire que

$$\overline{Cf_P} = F_6(Re_L) \quad (\text{V.124})$$

$$\overline{Nu} = F_7(Re_L, Pr) \quad (\text{V.125})$$

Ces relations montrent que le coefficient de frottement pariétal moyen ne dépend que du nombre de Reynolds et que le nombre de Nusselt moyen ne dépend que du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl.

V. 13. Analogie entre les transferts de la quantité du mouvement et de la chaleur

Considérons l'écoulement d'un fluide incompressible et de propriétés thermophysiques constantes en écoulement laminaire sur une surface solide. Si la vitesse U_∞ est constante, les équations adimensionnelles de la quantité du mouvement et de la chaleur pour $Pr = 1$, s'écrivent alors sous la forme

$$\hat{U} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} + \hat{V} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{y}^2} \quad (V.126)$$

$$\hat{U} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \hat{V} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2} \quad (V.127)$$

Ces équations ont exactement la même forme et admettent aussi des conditions aux limites similaires, par conséquent, les solutions pour $\hat{U}$ et $\hat{T}$ ainsi que les dérivées premières de ces solutions sur la surface sont égales

$$\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} \right)_{\hat{y}=0} = \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} \right)_{\hat{y}=0} \quad (V.128)$$

En exprimant la dérivée $\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} \right)_{\hat{y}=0}$ en fonction du coefficient

de frottement pariétal Cf_{Px} et la dérivée $\left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} \right)_{\hat{y}=0}$ en fonction

du nombre de Nusselt, nous avons

$$\left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} \right)_{\hat{y}=0} = \frac{\text{Re}_L}{2} C_{f_{P_x}} \quad (\text{V.129})$$

$$\left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} \right)_{\hat{y}=0} = \text{Nu}_x \quad (\text{V.130})$$

de ces équations, nous obtenons la relation

$$C_{f_{P_x}} \frac{\text{Re}_L}{2} = \text{Nu}_x \quad (\text{V.131})$$

relation connue sous le nom d'analogie de Reynolds. Cette relation montre qu'il est possible de connaître le nombre de Nusselt pour les fluides ayant un nombre de Prandtl égal à l'unité juste en mesurant le coefficient de frottement pariétal.

V. 14. Résolution des équations de la couche limite sur ne plaque plane

V. 14. 1. Couche limite visqueuse

Les équations à résoudre pour la couche limite laminaire d'un fluide newtonien sur ne plaque plane lisse sont

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{V.132})$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{V.133})$$

les conditions aux limites pour ce problème sont

$$x = 0, U = U_\infty, V = 0 \quad (\text{V.134})$$

$$y = 0, U = 0, V = 0 \quad (\text{V.135})$$

$$y = \infty, U = U_\infty, V = 0 \quad \text{V.136})$$

pour entamer la solution de ces équations, introduisons la fonction de courant $\Psi(x, y)$ tel que

$$U = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \quad (\text{V.137})$$

remarquons que si nous substituons les relations V. 137 dans l'équation de continuité (V. 132), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{V.138})$$

et ainsi, l'équation de continuité est automatiquement satisfaite.

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi(x, y)}{\partial y \partial x} = 0 \quad (\text{V.139})$$

Introduisons une nouvelle variable η et une nouvelle fonction $f(\eta)$ tel que

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (\text{V.140})$$

$$\Psi(x, y) = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta) \quad (\text{V.141})$$

calculons maintenant chaque terme de l'équation V.133. En utilisant la relation V. 137, et en tenant compte que la nouvelle variable est η , nous obtenons la relation suivante

$$U = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \sqrt{\nu x U_\infty} f'(\eta) = \sqrt{\frac{U_\infty^2 \nu x}{\nu x}} f'(\eta) \quad (\text{V.142})$$

la composante longitudinale de la vitesse U devient

$$U = U_\infty f'(\eta) \quad (\text{V.143})$$

La composante transversale de la vitesse V est définie par l'équation V. 137

$$V = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta)) \quad (\text{V.144})$$

comme nous avons la dérivée d'un produit de deux fonctions, l'équation V. 144 peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} V &= -f(\eta) \frac{\partial \sqrt{\nu x U_\infty}}{\partial x} - \sqrt{\nu x U_\infty} \frac{\partial f(\eta)}{\partial x} \\ &= -f(\eta) \frac{\partial \sqrt{\nu x U_\infty}}{\partial x} - \sqrt{\nu x U_\infty} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{V.145})$$

qui après simplification devient

$$-V = f(\eta) \frac{\partial \sqrt{\nu x U_\infty}}{\partial x} + \sqrt{\nu x U_\infty} \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (\text{V.146})$$

explicitons à présent les dérivées incluses dans cette relation, en effet, après un petit calcul nous trouvons

$$\frac{\partial \sqrt{\nu x U_\infty}}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \quad (\text{V.147})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \left(y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \right)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{y}{x} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (\text{V.148})$$

substituons les relations V. 147 et V. 148 dans la relation V. 146, nous obtenons

$$-V = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} f(\eta) - \frac{1}{2} \frac{y}{x} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \sqrt{\nu x U_\infty} f'(\eta) \quad (\text{V.149})$$

qui après simplification donne

$$-V = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_{\infty}}{x}} f(\eta) - \frac{1}{2} \frac{y U_{\infty}}{x} f'(\eta) \quad (\text{V.150})$$

multiplions les deux membres par un signe moins, l'équation V. 150 devient

$$V = \frac{1}{2} \frac{y U_{\infty}}{x} f'(\eta) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_{\infty}}{x}} f(\eta) \quad (\text{V.151})$$

si nous remarquons que le terme $\frac{y U_{\infty}}{x}$ n'est rien d'autre que

$\eta \sqrt{\frac{\nu U_{\infty}}{x}}$, l'équation V. 151 se simplifie et on obtient la relation ci-dessous

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_{\infty}}{x}} (\eta f'(\eta) - f(\eta)) \quad (\text{V.152})$$

Après avoir exprimé les vitesse longitudinale et transversale en fonction de la variable η et la fonction $f(\eta)$, calculons maintenant les dérivées de la vitesse longitudinale par rapport aux variables x et y . Pour cela, dérivons l'équation V. 143 par rapport à la variable x

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial (U_{\infty} f'(\eta))}{\partial \eta} \frac{\partial \left(y \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} \right)}{\partial x} \quad (\text{V.153})$$

après un calcul simple nous trouvons

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{y U_{\infty}}{x} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} f''(\eta) \quad (\text{V.154})$$

faisons la même chose avec la dérivée de la vitesse longitudinale par rapport à la variable y toujours en prenant l'équation V. 143

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial (U_{\infty} f'(\eta))}{\partial \eta} \frac{\partial \left(y \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} \right)}{\partial y} \quad (\text{V.155})$$

nous trouvons ainsi

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} f''(\eta) \quad (\text{V.156})$$

la dernière dérivée à calculer est la dérivée seconde de la vitesse longitudinale par rapport à la variable y .

Pour cela dérivons l'équation V. 156 par rapport à y et nous obtenons

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial \left(U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} f''(\eta) \right)}{\partial y} = U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} \frac{\partial f''(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{V.157})$$

qui après simplification devient

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U_{\infty}^2}{\nu x} f'''(\eta) \quad (\text{V.158})$$

Après la substitution de tous les termes dans l'équation V. 133, nous obtenons la relation

$$U_{\infty} f'(\eta) \left(-\frac{1}{2} \frac{y U_{\infty}}{x} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} f''(\eta) \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_{\infty}}{x}} (\eta f'(\eta) - f(\eta)) U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} f''(\eta) = \nu \frac{U_{\infty}^2}{\nu x} f'''(\eta)$$

qui après simplification, nous donne l'équation différentielle ordinaire suivante pour la fonction $f(\eta)$ appelée équation de Blasius.

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0 \quad (\text{V.159})$$

soit

$$\frac{d^3 f(\eta)}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f(\eta) \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} = 0 \quad (\text{V.160})$$

C'est une équation différentielle non-linéaire qui se résout par la méthode numérique dite méthode de Runge-Kutta. Trouvons à présent les conditions aux limites aux quelles doit satisfaire l'équation différentielle V. 120. A partir des conditions aux limites suivantes aux quelles doivent satisfaire les vitesses longitudinale et transversale

$$x = 0, U = U_\infty, V = 0 \quad (\text{V.161})$$

$$y = 0, U = V = 0 \quad (\text{V.162})$$

$$y = \infty, U = U_\infty, V = 0 \quad (\text{V.163})$$

nous aboutissons aux conditions aux limites suivantes pour l'équation différentielle de Blasius

$$\eta = 0, f(\eta) = 0, \frac{df(\eta)}{d\eta} = 0 \quad (\text{V.164})$$

$$\eta = \infty, \frac{df(\eta)}{d\eta} = 1 \quad (\text{V.165})$$

Les variations des vitesses longitudinale U et transversale V en fonction de la variable η sont représentées sur la figure V. 9 et V. 10.

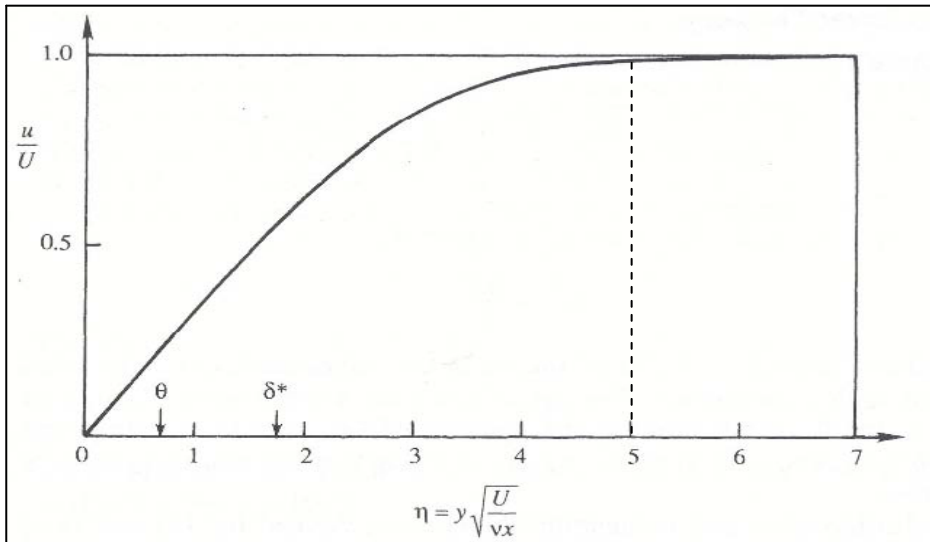


Figure V. 9. Profil de la vitesse longitudinale U .

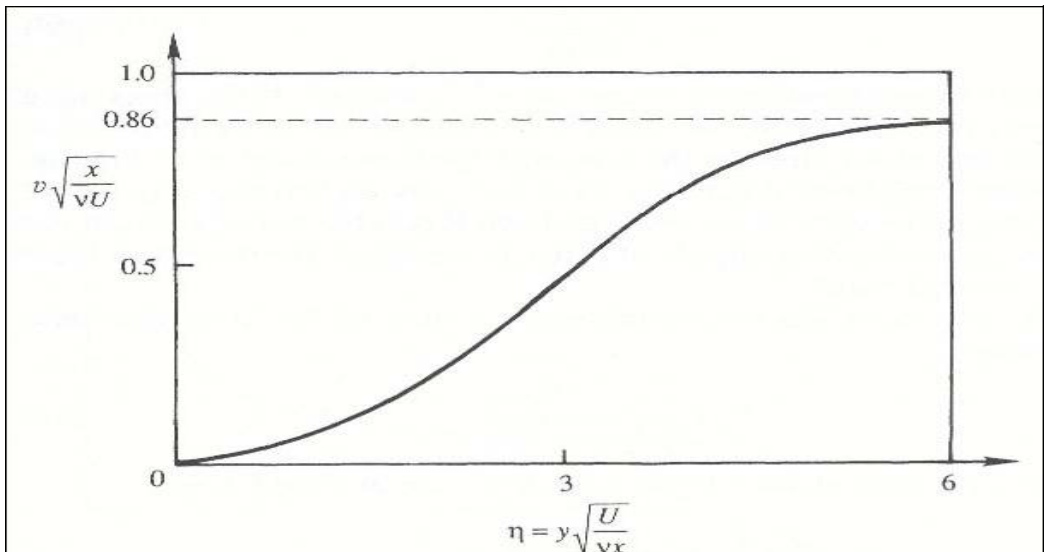


Figure V. 10. Profil de la vitesse transversale V .

La vitesse longitudinale augmente puis tend asymptotiquement vers un à partir de la valeur $\eta = 5$. Cette valeur est d'une importance capitale, car c'est à partir de cette valeur que nous définissons l'épaisseur de la couche limite laminaire $\delta_V(x)$.

L'épaisseur de la couche limite laminaire est définie comme la valeur de y pour la quelle la vitesse longitudinale atteint 99 % de la vitesse U_∞ . La valeur pour la quelle cette limite est atteinte est $\eta = 5$. Dans l'équation V. 140, posons que $y = \delta_V(x)$, nous trouvons ainsi la relation

$$5 = \delta_V(x) \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (V.166)$$

d'où

$$\delta_V(x) = \frac{5}{\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}} = \frac{5x}{\sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}} \quad (V.167)$$

remarquons que le terme $\frac{U_\infty x}{\nu}$ n'est rien d'autre que le nombre de Reynolds

$$\text{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (V.168)$$

ainsi, l'épaisseur de la couche limite $\delta_V(x)$ devient

$$\delta_V(x) = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (V.169)$$

Calculons le coefficient de frottement pariétal τ_p en fonction de la variable η et la fonction $f(\eta)$, soit

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\mu U_\infty \sqrt{\text{Re}_x}}{x} \left. \frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} \quad (V.170)$$

Le coefficient de frottement pariétal Cf_{Px} est

$$Cf_{Px} = \frac{\tau_p}{\frac{\rho U_\infty^2}{2}} \quad (V.171)$$

sachant que la valeur de la dérivée seconde $\frac{d^2 f(\eta)}{d\eta^2}$ de la fonction $f(\eta)$ au point $\eta = 0$ est 0,332, en combinant les relations V. 170 et V. 171, nous trouvons pour le coefficient de frottement pariétal l'équation

$$Cf_{Px} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad (V.172)$$

le coefficient de frottement pariétal moyen est par définition

$$\overline{Cf_P} = \frac{1}{L} \int_0^L Cf_{Px} dx \quad (V.173)$$

en y rapportant la relation V. 172, nous obtenons

$$\overline{Cf_P} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{0,664}{\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2 \times 0,664}{L \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}} \left[x^{\frac{1}{2}} \right]_0^L \quad (V.174)$$

d'où la valeur du coefficient de frottement pariétal moyen

$$\overline{Cf_P} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}} \quad (V.175)$$

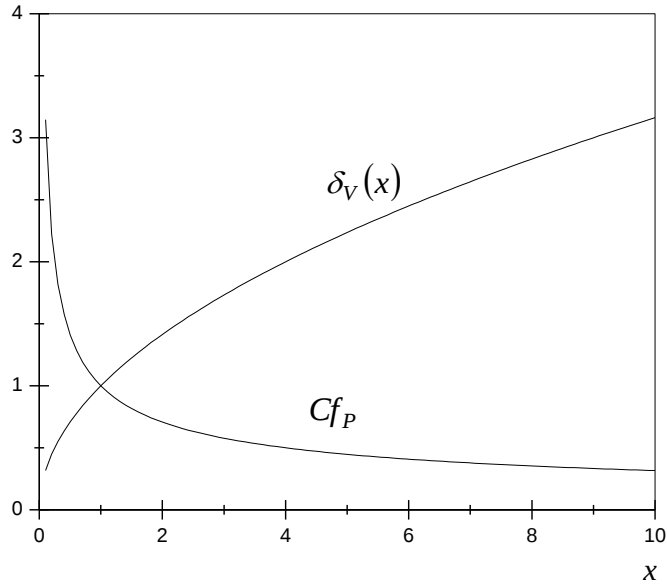


Figure V. 11. Variations du coefficient de frottement pariétal et de l'épaisseur de la couche limite en fonction de la distance x .

V. 14. 2. Couche limite thermique

Transformons maintenant l'équation de la chaleur de la couche limite thermique

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{V.175})$$

sujette aux conditions aux limites

$$x = 0, T = T_\infty \quad (\text{V.176})$$

$$y = 0, T = T_p \quad (\text{V.177})$$

$$y = \infty, T = T_\infty \quad (\text{V.178})$$

Pour cela introduisons la température adimensionnelle Θ définie par

$$\Theta = \frac{T - T_P}{T_\infty - T_P} \quad (\text{V.179})$$

en utilisant les relations

$$\eta = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}, U = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y}, V = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \quad (\text{V.180})$$

$$\Psi(x, y) = \sqrt{\nu x U_\infty} f(\eta) \quad (\text{V.181})$$

l'équation de chaleur V. 173 devient

$$\frac{d^2 \Theta(\eta)}{d\eta^2} + \frac{\text{Pr}}{2} f(\eta) \frac{d\Theta(\eta)}{d\eta} = 0 \quad (\text{V.182})$$

avec les conditions aux limites

$$\eta = 0, \quad \Theta(0) = 0 \quad (\text{V.183})$$

$$\eta = \infty, \quad \Theta(\infty) = 1 \quad (\text{V.184})$$

remarquons que l'équation V. 180 peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d\left(\frac{d\Theta(\eta)}{d\eta}\right)}{\frac{d\Theta(\eta)}{d\eta}} = -\frac{\text{Pr}}{2} f(\eta) d\eta \quad (\text{V.185})$$

Une première intégration conduit à

$$\frac{d\Theta(\eta)}{d\eta} = C_1 e^{\left[-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta\right]} \quad (\text{V.186})$$

et une deuxième intégration donne

$$\Theta(\eta) = C_1 \int_0^\eta e^{\left[-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta\right]} d\eta + C_2 \quad (\text{V.187})$$

en utilisant les conditions aux limites, nous obtenons les expressions suivantes pour les constantes d'intégration C_1 et C_2

$$C_1 = \frac{1}{\int_0^\infty e^{\left[-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta\right]} d\eta} \text{ et } C_2 = 0 \quad (\text{V.188})$$

en substituant ces constantes d'intégration dans l'équation V. 185, nous déduisons le profil de la température adimensionnelle, soit

$$\Theta(\eta) = \frac{\int_0^\eta e^{\left[-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta\right]} d\eta}{\int_0^\infty e^{\left[-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta\right]} d\eta} \quad (\text{V.189})$$

Nous avons déjà vu que le coefficient d'échange convectif local est défini par la relation

$$h_x = \frac{-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{T_p - T_\infty} \quad (\text{V.190})$$

en fonction de la variable η et la température adimensionnelle Θ ,

$$h_x = \frac{\lambda(T_p - T_\infty)}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}(T_p - T_\infty)} \frac{d\Theta}{d\eta} \Big|_{\eta=0} \quad (\text{V.191})$$

soit

$$h_x = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}} \frac{d\Theta}{d\eta} \Big|_{\eta=0} \quad (\text{V.192})$$

En faisons apparaître le nombre de Reynolds, l'équation ci-dessus s'écrit

$$h_x = \frac{\lambda}{x} \sqrt{\text{Re}_x} \left. \frac{d\Theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \quad (\text{V.193})$$

comme le nombre de Nusselt local est $Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda}$, la relation

V. 191 devient

$$Nu_x = \sqrt{\text{Re}_x} \left. \frac{d\Theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} \quad (\text{V.194})$$

En substituant l'équation V. 184, nous pouvons écrire le nombre de Nusselt local sous la forme

$$Nu_x = \sqrt{\text{Re}_x} \left[\frac{e^{\left[-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta \right]}}{\int_0^\infty e^{\left[-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta \right]} d\eta} \right]_{\eta=0} \quad (\text{V.195})$$

Pour des nombres de Prandtl supérieures à 0,6, le gradient de la température adimensionnelle sur la plaque est donnée par

$$\left. \frac{d\Theta}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0,332 \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad (\text{V.196})$$

Dans ce cas, le nombre de Nusselt local s'écrit

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{\text{Re}_x} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad (\text{V.197})$$

Le nombre de Nusselt moyen s'obtient par intégration de la relation V. 195 sur la longueur de la plaque L , en effectuant l'intégrale, nous obtenons

$$\overline{Nu} = \frac{1}{L} \int_0^L Nu_x dx = 0,664 \sqrt{Re_L} Pr^{\frac{1}{3}} \quad (V.198)$$

Introduisons un nouveau nombre adimensionnel appelé le nombre de Stanton par le biais de la relation

$$St_x = \frac{Nu_x}{Re_x Pr} \quad (V.199)$$

En substituant la relation V. 195, nous trouvons

$$St_x = \frac{0,332 \sqrt{Re_x} Pr^{\frac{1}{3}}}{Re_x Pr} = \frac{0,332}{\sqrt{Re_x} Pr^{\frac{2}{3}}} \quad (V.200)$$

Comme le coefficient de frottement pariétal est $Cf_{Px} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}$, nous pouvons écrire alors que

$$St_x Pr^{\frac{2}{3}} = \frac{Cf_x}{2} \quad (V.201)$$

Cette relation relie le transfert de la quantité du mouvement au transfert de chaleur par convection. En combinant les équations V. 172 et V. 195, nous obtenons

$$\frac{Cf_x}{2} Re_x = Nu_x Pr^{-\frac{1}{3}} \quad (V.202)$$

ou bien

$$j_H = \frac{Cf_x}{2} = \frac{h_x}{\rho C_p U_\infty} Pr^{\frac{2}{3}} \quad (V.203)$$

cette relation es appelée analogie de Chilton-Colburn et est valable pour $0,6 < Pr < 60$, le coefficient j_H est appelé le facteur j_H de Colburn.

V. 15. Méthode intégrale de la couche limite visqueuse

Il existe une autre méthode de résolution des équations de la couche limite visqueuse et thermique dite la méthode intégrale ou la méthode de Von-Karman.

Reprenons les équations de la couche limite pour un fluide newtonien incompressible en écoulement permanent bidimensionnel sur une plaque plane

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{V.204})$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{V.205})$$

L'équation de Bernoulli, écrite loin de la plaque plane est

$$P + \frac{\rho U_{\infty}^2}{2} = \text{constante} \quad (\text{V.206})$$

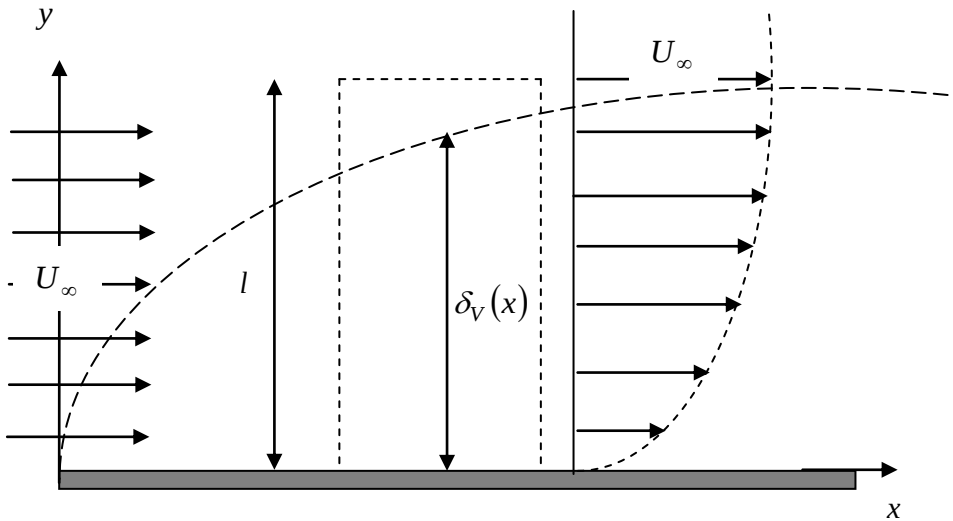


Figure V. 12. Illustration de la couche limite sur une plaque plane.

en dérivant l'équation de Bernoulli par rapport à la variable x , nous obtenons

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} \quad (\text{V.207})$$

et dans ce cas, L'équation V. 204 devient

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{V.208})$$

intégrons l'équation V. 202, entre $y = 0$ et $y = l$, il vient alors

$$V = - \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} dy \quad (\text{V.209})$$

Intégrons maintenant l'équation d mouvement toujours entre $y = 0$ et $y = l$, soit

$$\int_0^l \left[U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right] dy = \int_0^l U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} dy + \nu \int_0^l \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} dy \quad (\text{V.210})$$

en y substituant l'équation V. 207 et en remarquant que $\frac{\tau_P}{\rho} = \left(\nu \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0}$, l'équation précédente devient

$$\int_0^l \left[U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} dy - U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} \right] dy = \left(\nu \frac{\partial U}{\partial y} \right)_0^l = - \left(\nu \frac{\partial U}{\partial y} \right)_0 = - \frac{\tau_P}{\rho}$$

distribuons le signe d'intégration par rapport aux différents termes, ce qui nous ramène à la relation

$$\int_0^l U \frac{\partial U}{\partial x} dy - \int_0^l \left[\frac{\partial U}{\partial y} \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} dy \right] dy - \int_0^l U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} dy = - \frac{\tau_P}{\rho} \quad (\text{V.211})$$

posons que

$$I = \int_0^l \left[\frac{\partial U}{\partial y} \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} dy \right] dy \quad (V.212)$$

et utilisons la règle d'intégration par parties, à savoir

$$\int_a^b fg'dy = (fg)_a^b - \int_a^b f'gdy \quad (V.213)$$

Si nous identifions les termes suivants

$$g' = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad f = \int_0^y \frac{\partial U}{\partial x} dy, \quad f' = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (V.214)$$

L'intégrale V. 210 s'écrit alors sous la forme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^l \left[\frac{\partial U}{\partial y} \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} dy \right] dy = \left[U \int_0^y \frac{\partial U}{\partial x} dy \right]_0^l - \int_0^l U \frac{\partial U}{\partial x} dy \\ &= U_\infty \int_0^y \frac{\partial U}{\partial x} dy - \int_0^l U \frac{\partial U}{\partial x} dy \end{aligned}$$

en substituons cette expression dans l'équation V. 209, nous arrivons à

$$\int_0^l U \frac{\partial U}{\partial x} dy - U_\infty \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} dy + \int_0^l U \frac{\partial U}{\partial x} dy - \int_0^l U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} dy = -\frac{\tau_p}{\rho}$$

équation qui après réarrangement devient

$$\int_0^l \left[2U \frac{\partial U}{\partial x} - U_\infty \frac{\partial U}{\partial x} - U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \right] dy = -\frac{\tau_p}{\rho} \quad (V.215)$$

profitons de l'identité suivante

$$\frac{\partial}{\partial x} (U(U_\infty - U)) = \frac{\partial}{\partial x} (UU_\infty - U^2) = U \frac{dU_\infty}{dx} + U_\infty \frac{\partial U}{\partial x} - 2U \frac{\partial U}{\partial x}$$

qui s'écrit aussi sous la forme

$$2U \frac{\partial U}{\partial x} - U_{\infty} \frac{\partial U}{\partial x} = U \frac{dU_{\infty}}{dx} - \frac{\partial}{\partial x} (U(U_{\infty} - U)) \quad (\text{V.216})$$

la substitution de cette relation dans l'équation V. 213 donne

$$\int_0^l \left[U \frac{dU_{\infty}}{dx} - \frac{\partial}{\partial x} (U(U_{\infty} - U)) - U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} \right] dy = -\frac{\tau_P}{\rho} \quad (\text{V.217})$$

soit

$$\int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial x} (U(U_{\infty} - U)) + U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} - U \frac{dU_{\infty}}{dx} \right] dy = \frac{\tau_P}{\rho} \quad (\text{V.218})$$

comme la vitesse U_{∞} ne dépend pas de la variable y , nous pouvons récrire l'équation précédente sous la forme suivante

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^l U(U_{\infty} - U) dy + \frac{dU_{\infty}}{dx} \int_0^l (U_{\infty} - U) dy = \frac{\tau_P}{\rho} \quad (\text{V.219})$$

dans le cas ou la vitesse U_{∞} est constante, nous avons

$$\frac{dU_{\infty}}{dx} = 0 \quad (\text{V.220})$$

si nous posons que $l = \delta_V(x)$, dans ce cas, l'équation V. 218 se simplifie et devient

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_V(x)} U(U_{\infty} - U) dy = \frac{\tau_P}{\rho} \quad (\text{V.221})$$

Dans cette relation nous avons remplacé la borne supérieure de l'intégrale par $\delta_V(x)$, car au-delà de cette limite, la vitesse

du fluide devient égale à U_∞ et par conséquent l'intégrale s'annule.

Pour plus de commodité, écrivons l'équation V. 220 sous la forme

$$U_\infty^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_V(x)} \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) dy = \frac{\tau_P}{\rho} \quad (\text{V.222})$$

Cette équation permet de déterminer l'épaisseur de la couche limite visqueuse $\delta_V(x)$ à partir d'un profil supposé de la vitesse $U(y)$. Remarquons que le calcul de l'épaisseur de la couche limite visqueuse à partir de l'équation V. 221 et plus facile que celui obtenu par la résolution de l'équation différentielle de Blasius. A présent, considérons un profil de la vitesse $U(y)$ donné par l'expression

$$\frac{U(y)}{U_\infty} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta_V(x)} \right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta_V(x)} \right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta_V(x)} \right)^3 \quad (\text{V.223})$$

où a_0 , a_1 , a_2 et a_3 sont des constantes déterminées à partir des conditions aux limites suivantes

$$y = 0, U = 0 \quad (\text{V.224})$$

$$y = 0, U \approx y, \frac{d^2 U}{dy^2} = 0 \quad (\text{V.225})$$

$$y = \delta_V(x), u = u_\infty \quad (\text{V.226})$$

$$y = \delta_V(x), \frac{dU}{dy} = 0 \quad (\text{V.226})$$

après avoir calculer les constantes a_0 , a_1 , a_2 et a_3 , le profil supposé de la vitesse s'écrit alors sous la forme

$$\frac{U}{U_{\infty}} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_V(x)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_V(x)} \right)^3 \quad (\text{V.227})$$

la contrainte de cisaillement pariétal calculée à partir du profil de la vitesse V. 227 est

$$\tau_P = \mu \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{\delta_V(x)} \quad (\text{V.228})$$

l'intégrale figurant dans l'équation V. 221 est

$$\int_0^{\delta_V(x)} U(U_{\infty} - U) dy = \frac{39}{280} U_{\infty}^2 \delta_V(x) \quad (\text{V.229})$$

en rapportant les expressions V. 228 et V. 229 dans la relation V. 221, nous obtenons l'équation

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{39}{280} U_{\infty}^2 \delta_V(x) \right) = \frac{3}{2} \frac{\mu U_{\infty}}{\rho \delta_V(x)} \quad (\text{V.230})$$

soit

$$\delta_V(x) d\delta_V(x) = \frac{3 \times 280}{2 \times 39} \frac{\mu}{\rho U_{\infty}} dx \quad (\text{V.231})$$

d'où l'expression de l'épaisseur de la couche limite visqueuse

$$\delta_V(x) = \frac{4,64x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (\text{V.232})$$

Remarquons que la valeur de l'épaisseur de la couche limite visqueuse obtenue par la méthode intégrale ne diffère que de peu de la valeur obtenue à partir de la résolution de l'équation différentielle de Blasius.

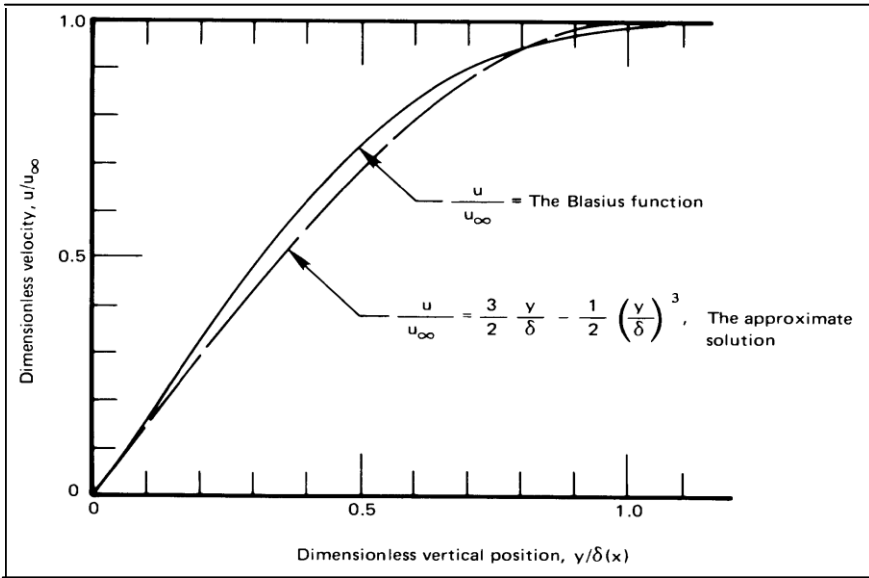


Figure V. 13. Comparaison entre le profil du troisième degré de la vitesse et la vitesse obtenue à partir de l'équation de Blasius.

$\frac{U(y)}{U_\infty}$	$\frac{\delta_V(x)}{x} \sqrt{\text{Re}_x}$	$\frac{Cf_{Px}}{2} \sqrt{\text{Re}_x}$
$\frac{y}{\delta_V(x)}$	3,464	0,289
$\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_V(x)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_V(x)} \right)^3$	4,640	0,323
$2 \left(\frac{y}{\delta_V(x)} \right) - 2 \left(\frac{y}{\delta_V(x)} \right)^3 + \left(\frac{y}{\delta_V(x)} \right)^4$	5,840	0,343

Tableau V. 2. Epaisseurs de la couche limite visqueuse et coefficients de frottement pariétaux pour différents profils de la vitesse.

V. 16. Méthode intégrale de la couche limite thermique

Reprenons l'équation de la chaleur pour la couche limite thermique

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{V.233})$$

et intégrons la entre $y = 0$ et $y = \delta_T(x)$

$$\int_0^{\delta_T(x)} U \frac{\partial T}{\partial x} dy + \int_0^{\delta_T(x)} V \frac{\partial T}{\partial y} dy = \int_0^{\delta_T(x)} a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy \quad (\text{V.234})$$

remarquons que les termes $\int_0^{\delta_T(x)} U \frac{\partial T}{\partial x} dy$ et $\int_0^{\delta_T(x)} V \frac{\partial T}{\partial y} dy$ peuvent s'écrire sous la forme

$$\int_0^{\delta_T(x)} U \frac{\partial T}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_T(x)} UT dy - \int_0^{\delta_T(x)} T \frac{\partial U}{\partial x} dy \quad (\text{V.235a})$$

$$\int_0^{\delta_T(x)} V \frac{\partial T}{\partial y} dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\delta_T(x)} VT dy - \int_0^{\delta_T(x)} T \frac{\partial V}{\partial y} dy \quad (\text{V.235b})$$

en substituons ces relations dans l'équation V. 234, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_T(x)} UT dy - \int_0^{\delta_T(x)} T \frac{\partial U}{\partial x} dy + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\delta_T(x)} VT dy - \int_0^{\delta_T(x)} T \frac{\partial V}{\partial y} dy = \int_0^{\delta_T(x)} a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy \quad (\text{V.235c})$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_T(x)} UT dy - \int_0^{\delta_T(x)} T \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dy + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\delta_T(x)} VT dy = \int_0^{\delta_T(x)} a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy$$

tenons compte de l'équation de continuité $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$,
l'équation précédente devient

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_T(x)} UT dy + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\delta_T(x)} VT dy = \int_0^{\delta_T(x)} a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy \quad (\text{V.235c})$$

nous avons aussi les égalités

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\delta_T(x)} VT dy = VT \Big|_0^{\delta_T(x)} = T_\infty V_{y=\delta_T(x)} \quad (\text{V.236})$$

en utilisant l'équation V. 209, à savoir $V = -\int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} dy$ et comme
 T_∞ est constante, nous pouvons écrire que

$$T_\infty V_{y=\delta_T(x)} = - \int_0^{\delta_T(x)} \frac{\partial UT_\infty}{\partial x} dy \quad (\text{V.236a})$$

d'autre part nous avons la relation

$$\int_0^{\delta_T(x)} a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy = a \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0^{\delta_T(x)} = -a \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{V.237})$$

en substituons ces résultats dans l'équation V. 235c, nous
aboutissons à une équation semblable à celle obtenue pour la
couche limite visqueuse, à savoir

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_T(x)} U(T - T_\infty) dy = -a \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0 \quad (\text{V.238})$$

Si nous choisissons les profils de la vitesse et de la
température suivants

$$\frac{U}{U_\infty} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_V(x)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_V(x)} \right)^3 \quad (\text{V.239})$$

$$\frac{T - T_P}{T_\infty - T_P} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_T(x)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T(x)} \right)^3 \quad (\text{V.240})$$

en les substituant dans l'équation V. 238 et en effectuant les calculs, nous obtenons l'expression

$$\int_0^{\delta_T(x)} U(T - T_\infty) dy = (T_\infty - T_P) U_\infty \delta_V(x) \left(\frac{3}{20} \left(\frac{\delta_T(x)}{\delta_V(x)} \right)^2 - \frac{3}{280} \left(\frac{\delta_T(x)}{\delta_V(x)} \right)^4 \right)$$

sachant que

$$\frac{3}{280} \left(\frac{\delta_T(x)}{\delta_V(x)} \right)^4 \ll \frac{3}{20} \left(\frac{\delta_T(x)}{\delta_V(x)} \right)^2 \quad (\text{V.241})$$

nous obtenons

$$\frac{3}{20} U_\infty (T_P - T_\infty) \left(\frac{\delta_T(x)}{\delta_V(x)} \right)^2 \frac{\partial \delta_V(x)}{\partial x} = \frac{3}{2} \frac{a(T_P - T_\infty)}{\delta_T(x)} \quad (\text{V.242})$$

soit

$$\frac{1}{10} U_\infty \left(\frac{\delta_T(x)}{\delta_V(x)} \right)^3 \delta_V(x) \frac{\partial \delta_V(x)}{\partial x} = a$$

en utilisant l'équation $\delta_V(x) = \frac{4,64x}{\sqrt{\text{Re}_x}}$, nous avons

$$\delta_V(x) \frac{\partial \delta_V(x)}{\partial x} = 10,765 \frac{\nu}{U_\infty}, \text{ d'où la relation entre l'épaisseur de}$$

la couche limite thermique et l'épaisseur de la couche limite visqueuse

$$\left(\frac{\delta_T(x)}{\delta_V(x)} \right)^3 = \frac{10}{10,765} \frac{a}{\nu} \quad (\text{V.243})$$

soit

$$\delta_T(x) = 0,93\delta_V(x)\text{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

Ainsi, nous remarquons le rapport entre l'épaisseur de la couche limite visqueuse à l'épaisseur de la couche limite thermique est proportionnel au nombre de Prandtl.

$$\frac{\delta_V(x)}{\delta_T(x)} \approx \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad (\text{V.244})$$

sachant que la quantité de chaleur échangée est

$$q_P = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\lambda(T_\infty - T_P)}{\delta_T(x)} \quad (\text{V.245})$$

nous obtenons

$$Nu_x = 0,332\sqrt{\text{Re}_x} \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad (\text{V.246})$$

résultat identique à celui obtenu à partir de la résolution de l'équation de Blasius et l'équation de la chaleur.

V. 17. Couche limite turbulente sur une plaque plane

V. 17. 1. Coefficients de frottement et épaisseur de la couche limite turbulente

Le coefficient de frottement et l'épaisseur de la couche limite laminaire sur une plaque plane sont

$$Cf_{P_x} = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (\text{V.247})$$

$$\delta_V(x) = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (\text{V.248})$$

relations valables pour $Re_x < 5 \times 10^5$. Dans la couche limite turbulente, le coefficient de frottement et l'épaisseur de la couche limite turbulente sont

$$Cf_{P_x} = \frac{0,0592}{Re_x^{\frac{1}{5}}} \quad (V.249)$$

$$\delta_V(x) = \frac{0,376x}{Re_x^{\frac{1}{5}}} \quad (V.250)$$

relations valables pour $5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^7$. En ce qui concerne les coefficients de frottement moyens pour la couche limite laminaire et turbulente, ils sont donnés par les formules

$$\overline{Cf_P} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}}, \quad Re_L < 5 \times 10^5 \quad (V.251)$$

$$\overline{Cf_P} = \frac{0,074}{Re_L^{\frac{1}{5}}}, \quad 5 \times 10^5 \leq Re_L \leq 10^7 \quad (V.252)$$

La relation V. 251 donne le coefficient de frottement moyen quand la couche limite est laminaire sur toute la plaque et la relation V. 252 donne le coefficient de frottement moyen si la couche limite est turbulente sur toute la plaque.

Il arrive que sur la même plaque existent les deux couches limites, une limite laminaire entre $x=0$ et $x=x_C$, qui est la distance critique qui correspond à la transition vers la couche limite turbulente. La distance critique x_C est déterminée à partir de la relation

$$Re_c = \frac{U_\infty x_C}{\nu} = 5 \times 10^5 \quad (V.253)$$

dans ce cas, le coefficient de frottement moyen s'obtient à partir de l'équation

$$\overline{Cf_P} = \frac{1}{L} \left[\int_0^{x_C} (Cf_{px})_{lami} dx + \int_{x_C}^L (Cf_{px})_{turb} dx \right] \quad (V.254)$$

Si nous utilisons les relations V. 247 et V. 249 et en effectuons l'intégrale, nous obtenons le coefficient de frottement moyen lorsque les deux couches limites subsistent simultanément sur la plaque

$$\overline{Cf_P} = \frac{0,074}{Re_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{1742}{Re_L}, \quad 5 \times 10^5 \leq Re_L \leq 10^7 \quad (V.255)$$

Ces relations sont valables pour une plaque plane lisse. Si la plaque est rugueuse, le coefficient de frottement moyen pour la couche limite turbulente est

$$\overline{Cf_P} = \left[1,89 - 1,62 \log \frac{\varepsilon}{L} \right]^{-\frac{5}{2}} \quad (V.256)$$

où ε est la rugosité de la plaque.

V. 17. 2. Nombre de Nusselt pour la couche limite laminaire et turbulente

Le nombre de Nusselt local pour la couche limite laminaire sur une plaque plane est

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{Re_x} Pr^{\frac{1}{3}}, \quad Pr > 0,60, \quad Re_x < 5 \times 10^5 \quad (V.257)$$

Pour la couche limite turbulente le nombre de Nusselt local pour la couche limite turbulente est

$$Nu_x = 0,0296 Re_x^{0,8} Pr^{\frac{1}{3}}, \quad Pr > 0,60, \quad 5 \times 10^5 \leq Re_x \leq 10^7 \quad (V.258)$$

en ce qui concerne les nombre de Nusselt moyens, ils sont donnés par les relations

$$\overline{Nu} = 0,664 \sqrt{Re_L} Pr^{\frac{1}{3}}, Pr > 0,60, Re_L < 5 \times 10^5 \quad (V.259)$$

$$\overline{Nu} = 0,037 Re_L^{0,8} Pr^{\frac{1}{3}}, 0,60 \leq Pr \leq 60, 5 \times 10^5 \leq Re_L \leq 10^7 \quad (V.260)$$

Quand les deux couches limites existent, une limite laminaire entre $x=0$ et $x=x_C$, qui est la distance critique qui correspond à la transition vers la couche limite turbulente. La distance critique x_C est déterminée à partir de la relation

$$Re_c = \frac{U_\infty x_C}{\nu} = 5 \times 10^5 \quad (V.261)$$

dans ce cas, le coefficient de frottement moyen s'obtient à partir de l'équation

$$\overline{Nu} = \frac{1}{L} \left[\int_0^{x_C} (Nu_x)_{lami} dx + \int_{x_C}^L (Nu_x)_{turb} dx \right] \quad (V.262)$$

Si nous utilisons les relations V. 257 et V. 258 et en effectuons l'intégrale, nous obtenons le coefficient de frottement moyen lorsque les deux couches limites subsistent simultanément sur la plaque

$$\overline{Nu} = (0,037 Re_L^{0,8} - 871) Pr^{\frac{1}{3}}, 0,60 \leq Pr \leq 60, 5 \times 10^5 \leq Re_L \leq 10^7 \quad (V.263)$$

Pour les métaux liquides, le nombre de Nusselt local est

$$Nu_x = 0,565 \sqrt{Re_x} Pr, Pr < 0,05 \quad (V.264)$$

Il existe une relation valable pour tous les fluides, c'est la relation de Churchill et Ozoe, cette relation est

$$Nu_x = \frac{0,3387\sqrt{\text{Re}_x} \text{Pr}^{\frac{1}{3}}}{\left[1 + \left(\frac{0,0468}{\text{Pr}}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}} \quad (\text{V.265})$$

V. 18. Plaque avec section initiale non-chauffée

Les relations mentionnées précédemment sont valables pour une plaque plane entièrement chauffée, mais il arrive que qu'une section de longueur Γ ne soit pas chauffée. Ainsi, il y n'aura pas de transfert de chaleur sur la longueur $0 < x < \Gamma$. Le développement de la couche limite visqueuse commence à partir de $x=0$, par contre le développement de la couche limite thermique ne commence qu'à partir de $x = \Gamma$.

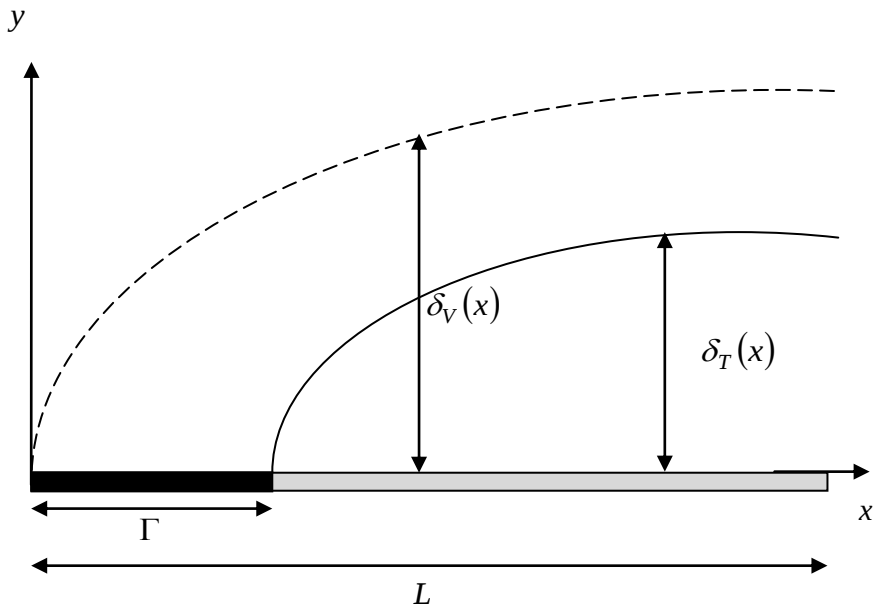


Figure V. 14. Couche limite avec une section non-chauffée de longueur Γ .

Si la température de la plaque est T_p à partir de $x = \Gamma$, les nombres de Nusselt locaux pour l'écoulement laminaire et l'écoulement turbulent sont alors donnés par les formules

$$Nu_x = \frac{Nu_x(\Gamma = 0)}{\left[1 - \left(\frac{\Gamma}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}} \quad (V.266)$$

$$Nu_x = \frac{Nu_x(\Gamma = 0)}{\left[1 - \left(\frac{\Gamma}{x}\right)^{\frac{9}{10}}\right]^{\frac{1}{9}}} \quad (V.267)$$

Si nous remplaçons, les expressions de $Nu_x(\Gamma = 0)$ à partir des équations V. 257 et V. 258, nous pouvons réécrire les relations précédentes sous la forme

$$Nu_x = \frac{0,332\sqrt{\text{Re}_x} \text{Pr}^{\frac{1}{3}}}{\left[1 - \left(\frac{\Gamma}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}} \quad (V.268)$$

$$Nu_x = \frac{0,0296\text{Re}_x^{0,8} \text{Pr}^{\frac{1}{3}}}{\left[1 - \left(\frac{\Gamma}{x}\right)^{\frac{9}{10}}\right]^{\frac{1}{9}}} \quad (V.269)$$

V. 19. Nombre de Nusselt pour une plaque soumise à un flux de chaleur uniforme

Quand la plaque solide est soumise à un flux de chaleur uniforme, pour un écoulement laminaire, le nombre de Nusselt local est

$$Nu_x = 0,453\sqrt{Re_x} Pr^{\frac{1}{3}} \quad (V.270)$$

et pour un écoulement turbulent, le nombre de Nusselt local est donné par la formule

$$Nu_x = 0,0308Re_x^{0,8} Pr^{\frac{1}{3}} \quad (V.271)$$

V. 20. Nombre de Nusselt pour un écoulement autour d'un cylindre et autour d'une sphère

En pratique, le transfert de chaleur par convection en présence de tubes fait intervenir des écoulements internes et externes. La longueur caractéristique qui intervient dans le calcul du nombre de Reynolds du cylindre ou de la sphère est le diamètre D . Ainsi, le nombre de Reynolds est défini par la relation

$$Re_D = \frac{U_\infty D}{\nu} \quad (V.272)$$

où U_∞ est la vitesse d'approche du fluide sur le cylindre ou la sphère. Le nombre de Reynolds critique pour un écoulement autour d'un cylindre ou une sphère est de l'ordre de 2×10^5 , c'est-à-dire que la couche limite autour du cylindre ou de la sphère reste laminaire si le nombre de Reynolds reste inférieur ou égal à 2×10^5 , et elle devient turbulente si le nombre de Reynolds est supérieur ou égal à 2×10^5 .

L'allure de l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre ou une sphère est très compliquée. Quand le fluide approche un cylindre, il l'entoure et forme une couche limite de part et d'autre, cependant au milieu, les particules fluides s'arrêtent

en point appelé point de stagnation où la pression augmente énormément. Au-delà de ce point, la pression diminue dans la direction d'écoulement et la vitesse par conséquent augmente.

Sans entrer trop dans les détails de l'écoulement autour d'un cylindre et une sphère, la complexité de l'écoulement influence considérablement le transfert de chaleur autour d'un cylindre ou une sphère. La figure montre les variations du nombre de Nusselt Nu_θ en fonction de l'angle polaire θ pour différentes valeurs du nombre de Reynolds pour un écoulement d'air autour d'un cylindre de diamètre D .

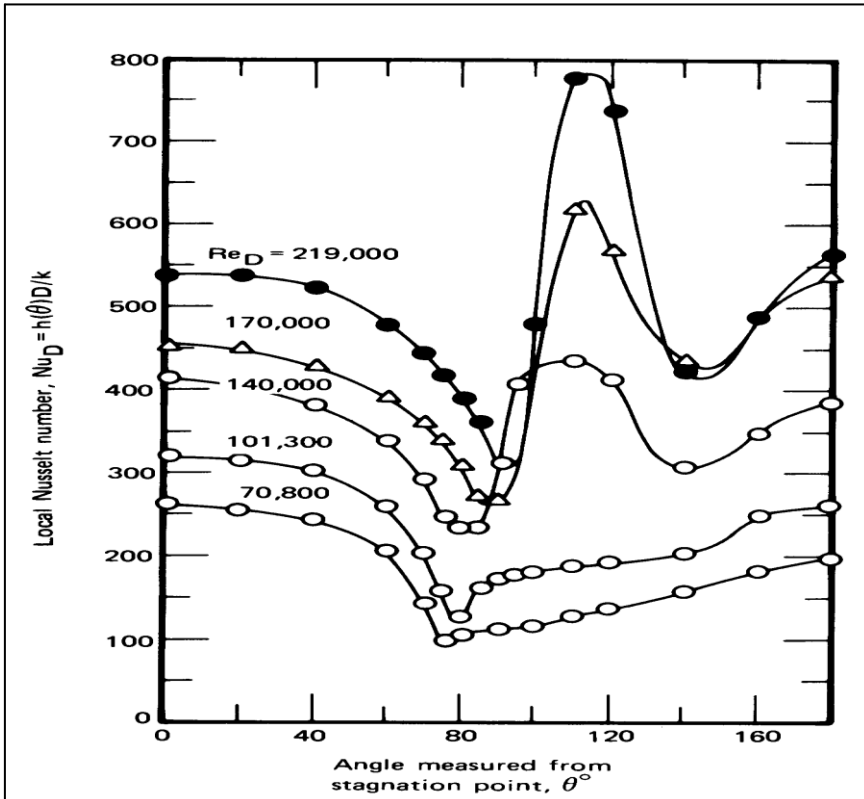


Figure V. 15. Variatio du nombre ed Nusselt en fonction de l'angle polaire θ .

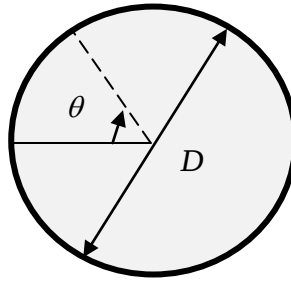


Figure V. 16. Définition de l'angle polaire θ .

La figure V. 15 montre que pour toutes les valeurs de Reynolds considérés, les nombres de Nusselt ont de très grandes valeurs au point de stagnation ($\theta=0$) et diminuent avec l'augmentation de l'angle polaire à cause de l'épaississement de la couche limite. Pour Reynolds égal à 70800 et 101300, les nombres de Nusselt atteignent des minimums pour $\theta=80^\circ$, qui est le point de séparation de la couche limite laminaire. Ensuite, le nombre de Nusselt augmente avec l'angle polaire à cause du brassage du fluide dans la région de séparation. Pour les nombres de Reynolds allant de 140000 à 219000, les courbes du nombre de Nusselt en fonction de l'angle polaire possèdent deux minimums. L'augmentation soudaine du nombre de Nusselt au point $\theta=90^\circ$ est due à la transition de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent. La diminution qui s'ensuit du nombre de Nusselt résulte de l'épaississement de la couche limite. Un deuxième minimum se passe à $\theta=140^\circ$, c'est le point de séparation de la couche limite turbulente. Au-delà de ce point, le nombre de Nusselt augmente avec l'angle polaire à cause du mélange du fluide dans la région de sillage turbulent.

En pratique, ce qui nous intéresse c'est la valeur moyenne du nombre de Nusselt, l'une des relations les plus utilisées pour le cylindre est la relation de Churchill et Bernstein

$$Nu_D = 0,3 + \frac{0,62\sqrt{Re_D} Pr^{\frac{1}{3}}}{\left[1 + \left(\frac{0,4}{Pr}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{282000}\right)^{\frac{5}{8}}\right]^{\frac{4}{5}} \quad (V.273)$$

Cette relation est valable pour $Re_D Pr \succ 0,2$. Les propriétés thermophysiques du fluide sont évaluées à la température du film qui est la température moyenne entre la température de l'écoulement libre et la température de la surface du cylindre.

Pour un écoulement autour d'une sphère, le nombre de Nusselt est donné par la relation dite de Whitaker, dont l'expression est

$$Nu_D = 2 + \left[0,4\sqrt{Re_D} + 0,06 Re_D^{\frac{2}{3}}\right] Pr^{0,4} \left(\frac{\mu_{\infty}}{\mu_P}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (V.274)$$

cette relation valable pour $3,5 \leq Re_D \leq 80000$, $0,7 \leq Pr \leq 380$.

Les propriétés thermophysiques sont évaluées à la température de l'écoulement libre sauf pour μ_P qui évaluée à la température de la surface de la sphère.

Le nombre de Nusselt moyen pour l'écoulement des gaz ou des liquides autour d'un cylindre peut être représenté par la relation générale suivante

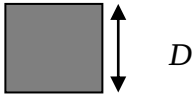
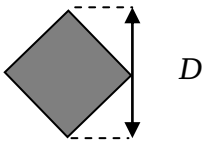
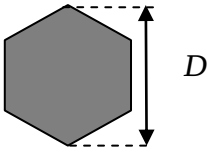
$$Nu_D = A Re_D^{\alpha} Pr^{\frac{1}{3}} \quad (V.275)$$

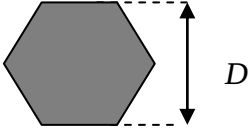
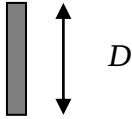
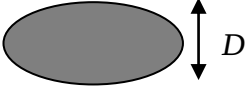
où la constante A et la puissance α dépendent du nombre de Reynolds et sont reportées dans le tableau V. 3.

Re_D	A	α
0,4-40	0,989	0,330
4-40	0,911	0,385
40-4000	0,683	0,466
4000-40000	0,193	0,618
40000-400000	0,027	0,805

Tableau V. 3. Valeurs de la constante A et la puissance α pour la formule V. 275.

Pour l'écoulement des gaz autour d'un cylindre de section non-circulaire, la constante A et la puissance α sont données dans le tableau ci-dessous.

Géométrie	Re_D	A	α
	$5 \times 10^3 - 10^5$	0,102	0,675
	$5 \times 10^3 - 10^5$	0,246	0,588
	$5 \times 10^3 - 19,5 \times 10^3$	0,160	0,638
	$19,5 \times 10^3 - 10^5$	0,0385	0,782

	$5 \times 10^3 - 10^5$	0,153	0,638
	$4 \times 10^3 - 15 \times 10^3$	0,228	0,731
	$2,5 \times 10^3 - 15 \times 10^3$	0,248	0,612

V. 21. Écoulement à travers un faisceau de tubes

L'écoulement de fluide autour d'un faisceau de tubes est très répandu en pratique surtout lors de l'étude des échangeurs de chaleur. Les tubes sont généralement arrangés dans la direction de l'écoulement soit en faisceau en ligne soit en faisceau en quinconce. L'arrangement des tubes est caractérisé par trois grandeurs qui sont le pas longitudinal S_L , le pas transversal S_T et le pas diagonal S_D . Le pas diagonal S_D est relié aux pas longitudinal S_L et le pas transversal S_T par la relation

$$S_D^2 = S_L^2 + \frac{S_T^2}{2} \quad (\text{V.276})$$

Quand le fluide arrive sur le faisceau de tubes, la surface d'écoulement passe de la surface $A_0 = S_T L$ à la surface $A_T = (S_T - D)L$, où L est la longueur des tubes. Dans le faisceau de tubes, la vitesse d'écoulement U_m (vitesse

maximale) entre les tubes est différente de la vitesse d'approche du fluide U , et ainsi le nombre de Reynolds sera défini par rapport à la vitesse U_m plutôt que par rapport à la vitesse U , nous avons alors, pour le nombre de Reynolds, la définition

$$\text{Re}_D = \frac{U_m D}{\nu} \quad (\text{V.277})$$

La vitesse U_m est obtenue à partir du principe de conservation de la masse pour un fluide incompressible. En effet, pour un faisceau en ligne, nous avons

$$\rho U A_0 = \rho U_m A_T \quad (\text{V.278})$$

en utilisant les définitions de A_0 et A_T , nous obtenons alors

$$\rho U S_T L = \rho U_m (S_T - D) L \quad (\text{V.279})$$

soit

$$U_m = U \frac{S_T}{(S_T - D)} \quad (\text{V.280})$$

Pour un faisceau en quinconce, le fluide traverse la surface A_0 puis il passe à travers la surface A_T et en suite il passe à travers deux fois la surface A_D quand il entoure les tubes dans la ligne suivante. Si $2A_D > A_T$, la vitesse U_m est toujours atteinte à la surface A_T et la relation précédente reste valable pour la détermination de U_m . Si maintenant, $2A_D < A_T$, la vitesse U_m est atteinte à travers les surfaces diagonales A_D . En écrivant la conservation de la masse, dans ce cas, nous obtenons

$$\rho U A_0 = 2 \rho U_m A_D \quad (\text{V.281})$$

en injectant l'expression des deux surfaces A_0 et A_D , nous obtenons

$$\rho U S_T L = 2 \rho U_m (S_D - D) L \quad (\text{V.282})$$

soit

$$U_m = U \frac{S_T}{2(S_D - D)} \quad (\text{V.283})$$

Pour les faisceaux de tubes, Zukauskas proposa une corrélation de la forme

$$Nu_D = A Re_D^\alpha Pr^\beta \left(\frac{Pr}{Pr_p} \right)^\gamma \quad (\text{V.284})$$

où A , α , β et γ sont des constantes qui dépendent du nombre de Reynolds. Cette corrélation est valable pour $0,7 < Pr < 500$ et pour $0 < Re_D < 2 \times 10^6$. Les propriétés thermophysiques sont évaluées à la température moyenne du fluide et qui est définie par

$$\bar{T} = \frac{T_e + T_s}{2} \quad (\text{V.285})$$

où T_e et T_s sont respectivement les températures d'entrée et de sortie du fluide travers le faisceau de tubes. Le nombre de Prandtl Pr_s est calculé à la température de la surface des tubes T_s . Le tableau V. résume les différentes valeurs des constantes A , α , β et γ .

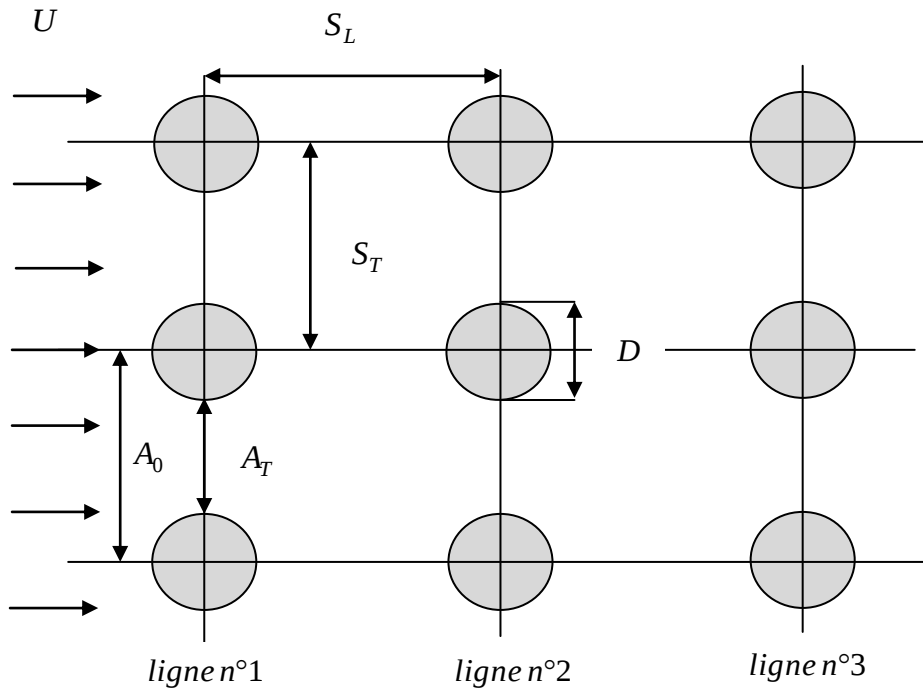


Figure V. 17. Faisceau de tubes en ligne.

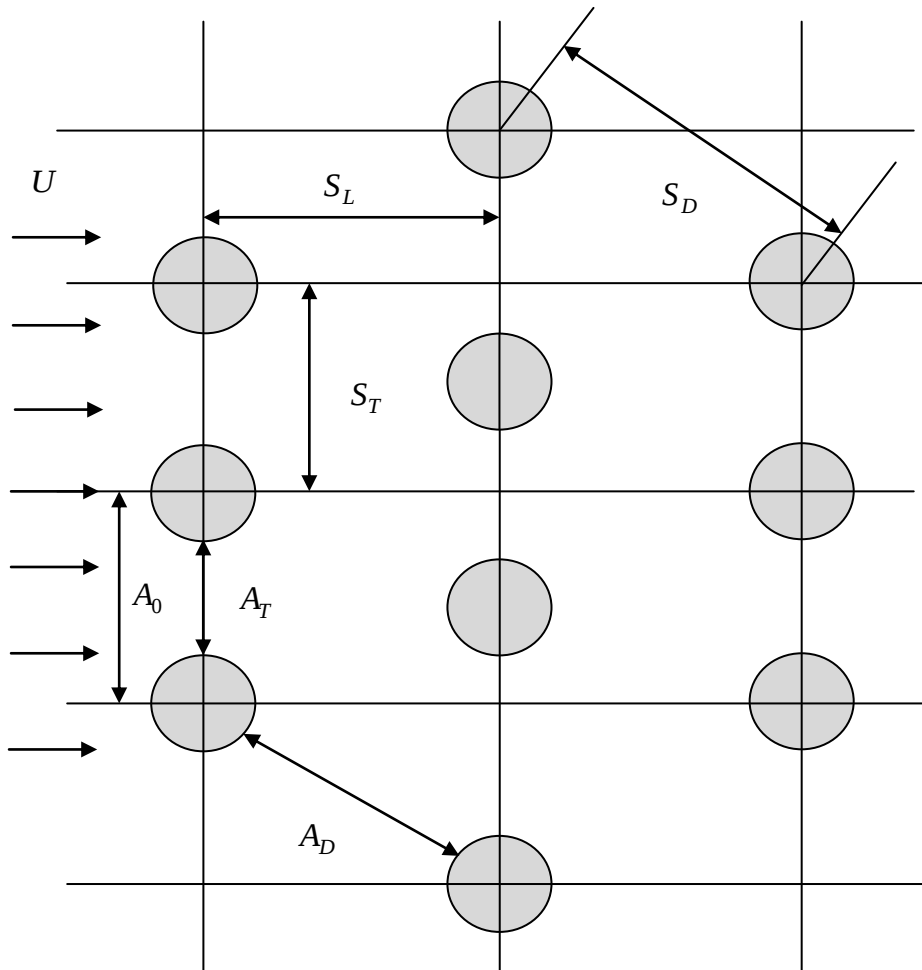


Figure V. 18. Faisceau de tubes en quinconce.

Faisceau	Re_D	A	α	β	δ
Ligne	$0 - 10^2$	0,9	0,40	0,36	$\frac{1}{4}$
	$10^2 - 10^3$	0,52	0,50	0,36	$\frac{1}{4}$
	$10^3 - 2.10^5$	0,27	0,63	0,36	$\frac{1}{4}$
	$2.10^5 - 2.10^6$	0,033	0,80	0,40	$\frac{1}{4}$
Quinconce	$0 - 5.10^2$	1,04	0,40	0,36	$\frac{1}{4}$
	$5.10^2 - 10^3$	0,71	0,50	0,36	$\frac{1}{4}$
	$10^3 - 2.10^5$	$0,35 \left(\frac{S_T}{S_L} \right)^{0,2}$	0,60	0,36	$\frac{1}{4}$
	$2.10^5 - 2.10^6$	$0,031 \left(\frac{S_T}{S_L} \right)^{0,2}$	0,80	0,36	$\frac{1}{4}$

Tableau V. 5. Valeurs des constantes A , α , β et δ pour la formule V. 284 pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re_D .

Si le nombres de tubes dans le faisceau est inférieur à seize, nous introduisons un acteur de correction C , et nous pouvons calculer le nombre de Nusselt dans ce cas à partir de la formule

$$Nu_D(N < 16) = C Nu_D \quad (V.286)$$

Le tableau suivant résume les valeurs du facteur de correction C .

N	1	2	3	4	5	7	10	13
Ligne	0,70	0,80	0,86	0,90	0,93	0,96	0,98	0,99
Quinconce	0,64	0,76	0,84	0,89	0,93	0,96	0,98	0,99

Tableau V. 6. Valeurs du facteur de correction C pour différentes valeurs du nombre de tubes.

V. 22. Convection forcée interne

V. 22. 1. Vitesse et température moyennes

Lors de l'étude de la convection externe, la vitesse de référence utilisée dans le calcul du nombre de Reynolds et du coefficient de frottement pariétal est la vitesse de l'écoulement libre. Dans un tube, la situation est différente car il n'y a pas de vitesse de l'écoulement libre. La vitesse du fluide dans un tube varie de zéro sur la paroi jusqu'à une vitesse maximale au centre, par conséquent, la vitesse de référence sera la vitesse moyenne $\bar{U}$ définie à partir de la définition du débit massique.

Considérons un tube de section S dans lequel circule un fluide de masse volumique ρ avec une vitesse $U(r, z)$, le débit massique qui traverse la section du tube est

$$\dot{m} = \rho \bar{U} S = \int_S \rho U(r, z) dS \quad (V.287)$$

d'où l'expression de la vitesse moyenne

$$\bar{U} = \frac{\int_S \rho U(r, z) dS}{\rho S} \quad (\text{V.288})$$

Si le fluide est incompressible et si la section du tube est une section circulaire de rayon R , la vitesse moyenne devient

$$\bar{U} = \frac{\int_0^R \rho U(r, z) 2\pi r dr}{\rho \pi R^2} = \frac{2}{R^2} \int_0^R U(r, z) r dr \quad (\text{V.289})$$

Comme pour la vitesse, la température du fluide dans tube varie aussi entre la température de la surface et la température maximale atteinte au centre du tube. Il est donc nécessaire de définir la température moyenne du fluide $T_m(z)$. L'énergie transportée par le fluide à travers la section S est

$$\dot{E} = \dot{m} C_p T_m(z) = \int_{\dot{m}} C_p T(r, z) d\dot{m} \quad (\text{V.290})$$

A partir de la définition du débit, nous avons la relation

$$d\dot{m} = \rho \bar{U} dS \quad (\text{V.291})$$

En combinant ces deux équations, la relation devient

$$\dot{E} = \dot{m} C_p T_m(z) = \int_S \rho C_p U(r, z) T(r, z) dS \quad (\text{V.292})$$

Par conséquent la température moyenne $T_m(z)$ est

$$\bar{T}(z) = \frac{\int_S \rho C_p U(r, z) T(r, z) dS}{\dot{m} C_p} \quad (\text{V.293})$$

Si le fluide est incompressible et ayant une capacité calorifique constante, dans le cas d'un tube de section

circulaire de rayon R , la température moyenne $\bar{T}(z)$, se calcul aisément à partir de la relation suivante

$$\bar{T}(z) = \frac{\rho C_p \int_0^R U(r, z) T(r, z) 2\pi r dr}{C_p \bar{U} \pi R^2} = \frac{2}{\bar{U} R^2} \int_0^R U(r, z) T(r, z) r dr \quad (\text{V.294})$$

V. 22. 2. Écoulement laminaire et écoulement turbulent

L'écoulement des fluides dans les tubes peut être laminaire ou turbulent. Le critère de passage du régime laminaire au régime turbulent est le nombre de Reynolds défini par rapport à la vitesse moyenne d'écoulement. Pour un tube de section circulaire, le nombre de Reynolds est

$$\text{Re}_D = \frac{\bar{U} D}{\nu} \quad (\text{V.295})$$

où D est le diamètre de la section du tube et ν est la viscosité cinématique du fluide dans le tube.

Pour les tubes non-circulaires, le calcul du nombre de Reynolds est défini par rapport au rayon hydraulique D_h défini par la relation

$$D_h = \frac{4S}{p} \quad (\text{V.296})$$

où S est la surface de section du tube et p son périmètre. Le tableau suivant résume quelques exemples de rayons hydrauliques. Le régime d'écoulement dans un tube est considéré comme laminaire si le nombre de Reynolds

$\text{Re}_D = \frac{\bar{U} D}{\nu}$ est inférieur 2300, il est transitoire si le nombre de

Reynolds $\text{Re}_D = \frac{\bar{U} D}{\nu}$ est compris entre 2300 et 10000 et il est

turbulent dans le cas où le nombre de Reynolds $Re_D = \frac{\bar{U}D}{\nu}$ est supérieur à 10000.

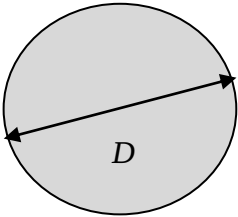
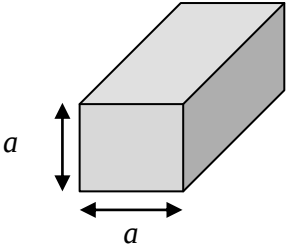
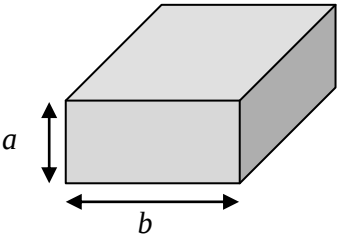
Section	Rayon hydraulique
Section circulaire 	$D_h = \frac{4 \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)}{\pi D} = D$
Section carrée 	$D_h = \frac{4a^2 \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)}{4a} = a$
Section rectangulaire 	$D_h = \frac{4ab \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$

Tableau V. 7. Diamètre hydrauliques pour différentes géométries de tubes.

V. 22. 3. Région d'entrée

Quand un fluide s'écoule à l'intérieur d'un tube, la vitesse du fluide sur la paroi du tube est nulle à cause du frottement et augmente vers le centre pour garder un débit constant. Il se développe alors une couche limite le long de l'axe du tube. L'épaisseur de cette couche limite augmente le long de l'axe du tube jusqu'au centre et ainsi remplit tout le tube.

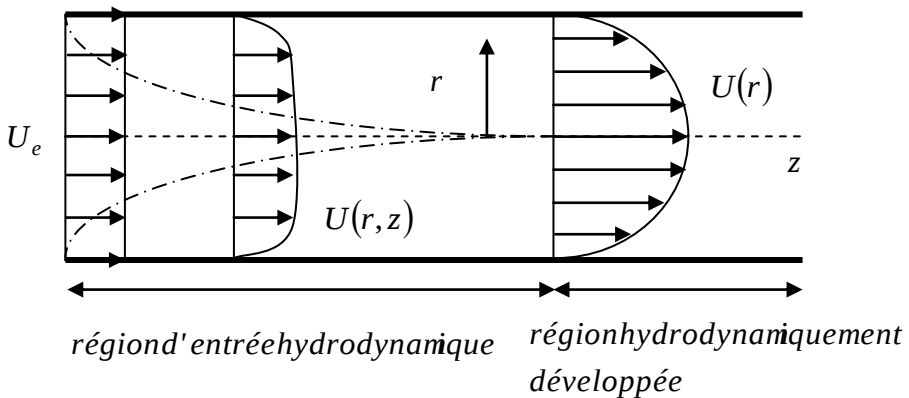


Figure V. 19. Développement du profil de la vitesse dans un tube.

La région située entre l'entrée du tube et le point où la couche limite atteint le centre est appelée la région d'entrée hydrodynamique et la longueur de cette région est la longueur d'entrée hydrodynamique L_{eh} . L'écoulement situé dans la région d'entrée hydrodynamique est dit écoulement en développement hydrodynamique, c'est dans cette région que le profil de la vitesse se développe. Au-delà de cette région, le profil de la vitesse du fluide dans le tube ne change plus le long de l'axe, dans ce cas, la région est dite la région hydrodynamiquement développée.

Considérons un fluide à température uniforme entrant dans un tube à la température $T_p(z)$. Les particules fluides au

contact de la paroi, auront la température $T_p(z)$, cela initie la convection et le développement d'une couche limite thermique. Cette couche limite thermique se développe le long de l'axe du tube et atteint son centre. La région où la couche limite se développe est appelée région d'entrée thermique et la longueur de cette région est dite longueur d'entrée thermique L_{et} . L'écoulement dans la région où la couche limite se développe est dit écoulement en développement thermique. La région après la région d'entrée thermique où le profil de la température $\frac{T_p(z) - T(r, z)}{T_p(z) - \bar{T}(z)}$ reste constant région thermique complètement développée. La région dans la quelle l'écoulement est hydrodynamiquement et thermiquement développée est appelé, écoulement complètement.

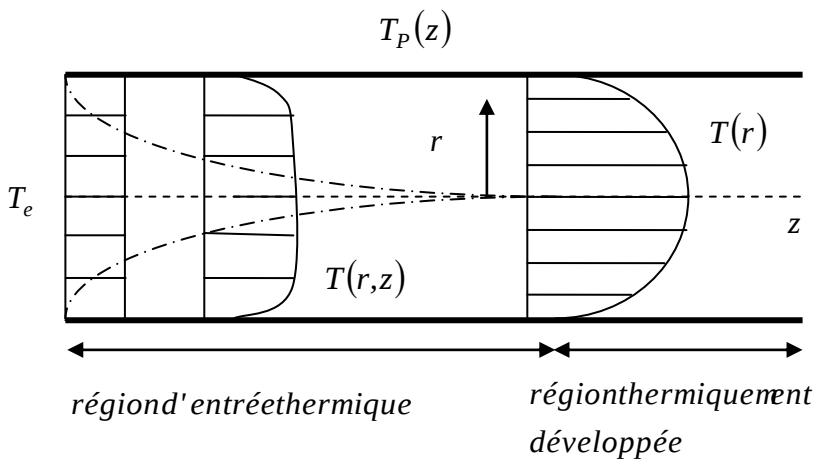


Figure V. 20. Développement du profil de la température dans un tube.

Mathématiquement, le fait que le profil de la vitesse est hydrodynamiquement développé (écoulement établi) se traduit par la relation suivante

$$\frac{\partial U(r, z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{V.297})$$

Se qui revient à dire que

$$U(r, z) = U(r) \quad (\text{V.298})$$

sachant que le coefficient de frottement pariétal est proportionnel à la pente de la vitesse calculée sur la paroi du tube, et comme le profil de la vitesse est indépendant de la direction z , le coefficient de frottement pariétal lui aussi sera constant le long de cette direction.

Le fait que le profil de la température est thermiquement développé, s'exprime mathématiquement par la relation

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T_p(z) - T(r, z)}{T_p(z) - \bar{T}(z)} \right) = 0 \quad (\text{V.299})$$

Dans la région thermiquement développé, le rapport $\frac{T_p(z) - T(r, z)}{T_p(z) - \bar{T}(z)}$ est indépendant de la direction z , ainsi la dérivée de ce rapport par rapport r sera indépendant de la direction z , cela s'exprime mathématiquement par la relation

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{T_p - T(r, z)}{T_p - \bar{T}} \right)_{r=R} = - \frac{1}{T_p - \bar{T}} \left(\frac{\partial T(r)}{\partial r} \right)_{r=R} \neq F(z) \quad (\text{V.300})$$

La quantité de chaleur échangée entre le fluide et la paroi du tube, conformément à la loi de Newton, est

$$q = h_z (T_p - \bar{T}) = -\lambda \left(\frac{\partial T(r)}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (\text{V.301})$$

ainsi, le coefficient d'échange convectif h_z s'écrit

$$h_z = - \frac{\lambda \left(\frac{\partial T(r)}{\partial r} \right)_{r=R}}{(T_p - \bar{T})} \quad (\text{V.302})$$

coefficient qui sera constant et indépendant de la direction z .

V. 22. 4. Longueurs d'entrée

Pour un écoulement laminaire dans un tube, les longueurs d'entrée hydrodynamique L_{eh} et thermique L_{et} sont données par les relations

$$\frac{(L_{eh})_{lami}}{D} = 0,05 \text{Re}_D \quad (\text{V.303})$$

$$\frac{(L_{et})_{lami}}{D} = 0,05 \text{Re}_D \text{Pr} \quad (\text{V.304})$$

Pour un écoulement turbulent dans un tube, la longueur d'entrée hydrodynamique L_{eh} est définie par la relation

$$(L_{eh})_{turb} = 1,359 \text{Re}_D^{\frac{1}{4}} \quad (\text{V.305})$$

Généralement, dans un écoulement turbulent, les longueurs d'entrée hydrodynamique L_{eh} et thermique L_{et} sont limitées dans une région égale à $10D$, ainsi, nous pouvons écrire

$$(L_{eh})_{turb} = (L_{et})_{turb} = 10D \quad (\text{V.306})$$

V. 23. Analyse thermique pour l'écoulement dans un tube

Considérons un fluide de capacité calorifique C_p qui s'écoule dans un tube avec débit massique $\dot{m}$.

Si le fluide entre à la température T_e et sort à la température T_o , la quantité de chaleur échangée entre le fluide et l'environnement sera chaleur Q est

$$Q = \dot{m} C_p (T_o - T_e) \quad (\text{V.307})$$

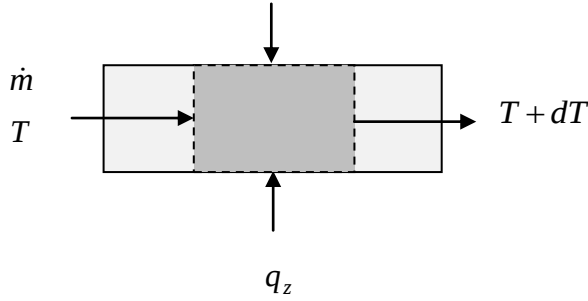


Figure V. 21. Volume de contrôle dans tube.

Conformément à la loi de Newton, le flux de chaleur échangé entre le fluide et la paroi du tube est

$$q_z = h_z (T_p - \bar{T}) \quad (\text{V.308})$$

La température moyenne T_m du fluide croît linéairement dans la direction de l'écoulement. Par conséquent, quand le coefficient d'échange convectif h_z est constant, le flux de chaleur q_z doit changer quand la température de la paroi T_p change et de même la température de la paroi T_p change quand le flux de chaleur q_z change.

V. 23. 1. Flux de chaleur pariétal constant

Considérons le cas où un fluide s'écoule à travers un tube dont la paroi est soumise à un flux de chaleur pariétal q_z constant.

A partir du principe de la conservation de l'énergie, nous pouvons écrire

$$q_z S_L = \dot{m} C_p (T_o - T_e) \quad (\text{V.309})$$

où S_L est la surface latérale du tube.

Cette relation nous permet de calculer la température de sortie du fluide, soit

$$T_o = T_e + \frac{q_z S_L}{\dot{m} C_p} \quad (\text{V.310})$$

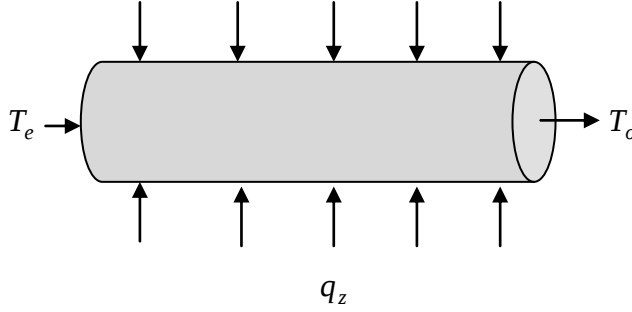


Figure V. 22. Tube soumis à un flux de chaleur pariétal.

Il est important de noter que la température de sortie croît linéairement dans la direction de l'écoulement puisque la surface latérale croît aussi dans cette même direction.

Calculons à présent la température de la paroi du tube T_p quand le flux de chaleur pariétal est constant à partir de la relation

$$T_p = \bar{T} + \frac{q_z}{h_z} \quad (\text{V.311})$$

Considérons un volume de contrôle de longueur dz et écrivons le bilan énergétique en régime permanent, ce bilan est tout simplement le suivant

$$\dot{m} C_p d\bar{T} = q_z P dz \quad (\text{V.312})$$

où P est le périmètre du tube. Si la capacité calorifique et le débit sont constants, nous pouvons écrire alors la relation

$$\frac{d\bar{T}}{dz} = \frac{q_z P}{\dot{m} C_p} \quad (\text{V.313})$$

Et comme le flux de chaleur pariétal est constant, nous déduisons que la dérivée de la température moyenne du fluide dans la direction de l'écoulement est constante, soit

$$\frac{d\bar{T}}{dz} = \text{const} \quad (\text{V.314})$$

Sachant que le flux de chaleur et le coefficient d'échange convectif sont constants, nous avons à partir de la relation, que la dérivée de la température de la paroi dans la direction de l'écoulement est aussi constante, et cela nous conduit à la relation

$$\frac{dT_p}{dz} = \frac{d\bar{T}}{dz} \quad (\text{V.315})$$

Sachant que le profil adimensionnel de la température dans la région thermiquement développée est constant dans la direction z , nous avons alors la relation

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T_p - T}{T_p - \bar{T}} \right) = 0 \quad (\text{V.316})$$

Mais comme $T_p - \bar{T}$ est constant, nous pouvons réécrire la relation précédente sous la forme

$$\frac{1}{T_p - \bar{T}} \frac{\partial}{\partial z} (T_p - T) = 0 \quad (\text{V.317})$$

soit

$$\frac{\partial T_p}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (\text{V.318})$$

En combinant les relations V. 313 et V. 315, nous pouvons écrire que

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dT_p}{dz} = \frac{d\bar{T}}{dz} = \frac{q_z P}{\dot{m} C_p} \quad (\text{V.319})$$

Ainsi, pour un écoulement établi dans un tube soumis à un flux de chaleur pariétal constant, la variation de la température dans la direction z est constante et par conséquent le profil de la température du fluide ne change pas dans cette direction.

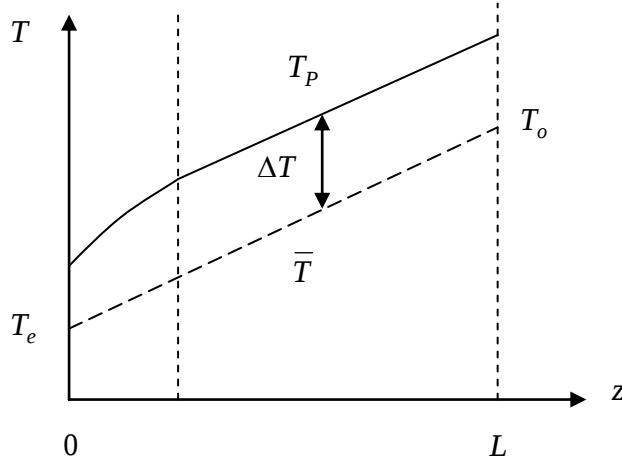


Figure V. 23. Variations de la température T_p et $\bar{T}$ le long du tube soumis à un flux de chaleur pariétal.

V. 23. 2. Tube isotherme

Considérons l'écoulement d'un fluide dans un tube dont la paroi est maintenue constante. La quantité de chaleur échangée par le fluide est

$$Q = hS_L \left(\overline{T_p - \bar{T}} \right) \quad (\text{V.320})$$

où h est le coefficient d'échange convectif moyen, S_L est la surface latérale du tube et $\left(\overline{T_p - \bar{T}} \right)$ est une température moyenne entre le fluide et la surface du tube. Essayons d'exprimer la moyenne de la différence de température $(T_p - \bar{T})$ qu'on notera par $\overline{\Delta T}$. Si le fluide entre à la

température T_e et sort à la température T_o , nous pouvons écrire que

$$\overline{\Delta T} = \frac{(T_p - T_e) + (T_p - T_o)}{2} \quad (\text{V.321})$$

En réarrangeant cette expression nous trouvons

$$\overline{\Delta T} = T_p - \frac{T_e + T_o}{2} = T_p - \bar{T} \quad (\text{V.322})$$

où $\bar{T}$ est la température moyenne du fluide entre l'entrée et la sortie du tube.

Si nous considérons un fluide qui s'écoule dans un tube isotherme à la température T_p , nous pouvons écrire le bilan énergétique suivant

$$\dot{m}C_p d\bar{T} = h(T_p - \bar{T})dS_L \quad (\text{V.323})$$

Comme la température T_s est constante, et sachant que $dS_L = Pdz$ où T_p est le périmètre du tube, la relation V. 323 devient

$$-\dot{m}C_p d(T_p - \bar{T}) = hP(T_p - \bar{T})dz \quad (\text{V.324})$$

En séparant les variables, nous obtenons

$$\frac{d(T_p - \bar{T})}{(T_p - \bar{T})} = -\frac{hP}{\dot{m}C_p} dz \quad (\text{V.325})$$

En intégrant, nous avons

$$\int_{T_e}^{T_o} \frac{d(T_p - \bar{T})}{(T_p - \bar{T})} = -\int_0^L \frac{hP}{\dot{m}C_p} dz \quad (\text{V.326})$$

Soit

$$\ln \frac{T_p - T_o}{T_p - T_e} = -\frac{hPL}{\dot{m}C_p} = -\frac{hS_L}{\dot{m}C_p} \quad (\text{V.327})$$

Relation à partir de la quelle nous pouvons calculer la température de sortie du fluide qui est

$$T_o = T_P - (T_P - T_e) e^{-\frac{hS_L}{\dot{m}C_P}} \quad (\text{V.328})$$

Si nous tirons le terme $\dot{m}C_P$ de la relation, nous obtenons

$$\dot{m}C_P = -\frac{hS_L}{\ln \frac{T_P - T_o}{T_P - T_e}} \quad (\text{V.329})$$

En utilisant la relation

$$Q = \dot{m}C_P (T_o - T_e) \quad (\text{V.330})$$

Et en y substituant la valeur de $\dot{m}C_P$, nous avons

$$Q = -\frac{hS_L (T_o - T_e)}{\ln \frac{T_P - T_o}{T_P - T_e}} = \frac{hS_L (T_e - T_o)}{\ln \frac{T_P - T_o}{T_P - T_e}} \quad (\text{V.331})$$

Cette relation peut être écrite différemment sous la forme

$$Q = hS_L \overline{\Delta T}_l \quad (\text{V.332})$$

où $\overline{\Delta T}_l$ est la différence logarithmique moyenne donnée par la formule

$$\overline{\Delta T}_l = \frac{(T_e - T_o)}{\ln \frac{T_S - T_o}{T_S - T_e}} \quad (\text{V.333})$$

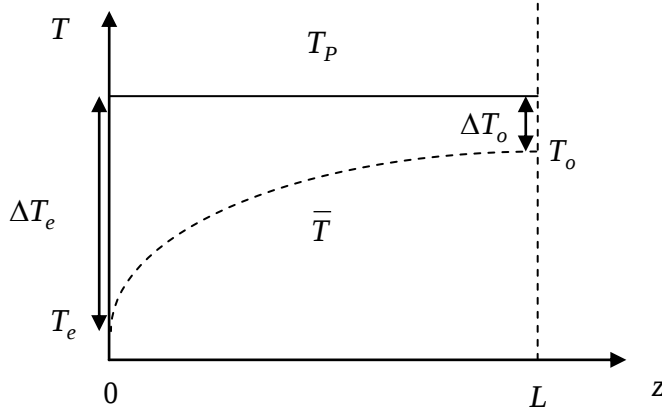


Figure V. 24. Variations de la température $\bar{T}$ le long du tube isotherme à la température T_p .

V. 24. Ecoulement laminaire dans un tube

Considérons l'écoulement d'un fluide dans une conduite de section circulaire de rayon R . Puisqu'on est dans la région hydrodynamiquement développée, la vitesse du fluide est parallèle à l'axe du tube et il n'y pas de mouvement du fluide dans la direction radiale. Si nous plaçons l'axe Oz le long de l'axe central de la conduite et en utilisant les coordonnées cylindriques, l'équation de continuité et l'équation de Navier-Stokes, dans ce cas, sont

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{V.334})$$

Ou bien

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (\text{V.335})$$

La condition aux limites pour cet écoulement est définie par

$$U_z = 0, r = R \quad (\text{V.336})$$

La solution de l'équation différentielle est

$$U_z(r) = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (\text{V.337})$$

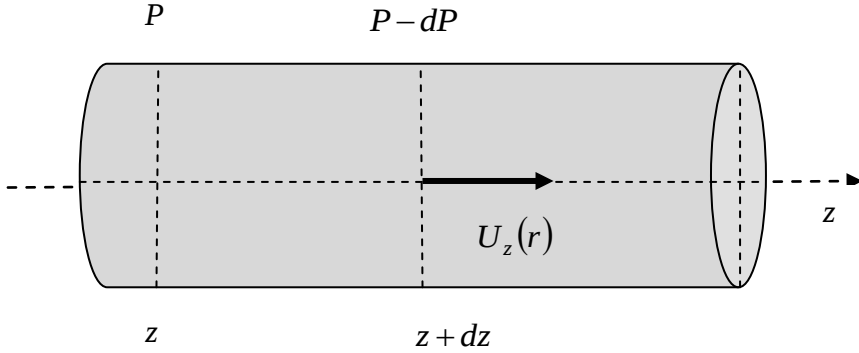


Figure V. 25. Ecoulement laminaire dans un tube.

Mais remarquons qu'à l'origine des coordonnées, la vitesse est indéfinie et par conséquent, la constante C_1 doit être prise égale à zéro, la constante C_2 se calcule à partir de la condition aux limites et on trouve ainsi

$$U_z(r) = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial z} \right) \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (\text{V.338})$$

Le débit massique du fluide qui traverse le tube est

$$\dot{m} = \rho \int_s U_z(r) ds = \rho \int_0^R U_z(r) 2\pi r dr \quad (\text{V.339})$$

$$\dot{m} = \frac{\rho \pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (\text{V.340})$$

Ce débit massique est lié à la vitesse moyenne d'écoulement du fluide par la relation

$$\dot{m} = \rho \overline{U_z} \pi R^2 \quad (\text{V.341})$$

Soit

$$\overline{U_z} = \frac{R^2}{8\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (\text{V.342})$$

La vitesse maximale est atteinte au milieu de la conduite
($r = 0$)

$$U_{\max} = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (\text{V.343})$$

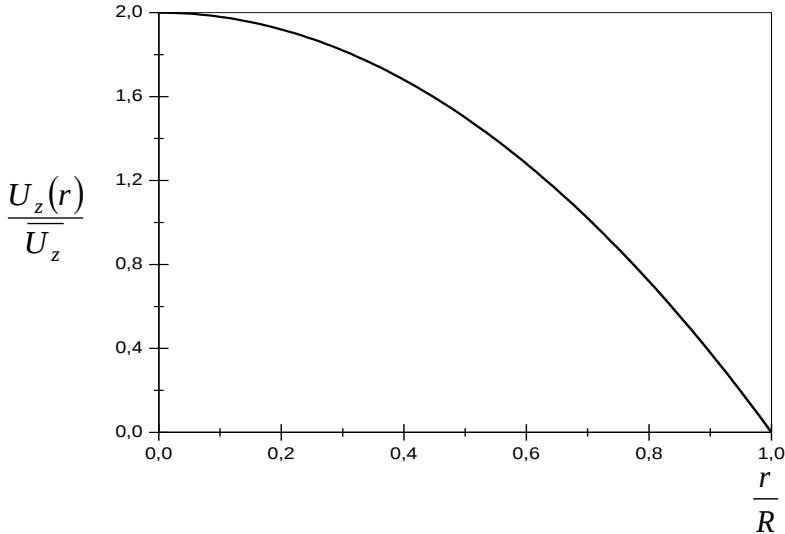


Figure V. 26. Profil de la vitesse $\frac{U_z(r)}{\overline{U_z}}$.

Le profil de la vitesse peut être exprimé en fonction de la vitesse moyenne sous la forme

$$U_z(r) = 2\overline{U_z} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (\text{V.344})$$

En comparant les relations, nous remarquons que

$$U_{\max} = 2\overline{U_z} \quad (\text{V.345})$$

La contrainte de cisaillement pariétale est

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial U_z(r)}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (\text{V.346})$$

Calculons le terme $\frac{\partial U_z(r)}{\partial r}$ à partir de la relation, en effet on

a

$$\frac{\partial U_z(r)}{\partial r} = 2\overline{U_z} \left(0 - \frac{2r}{R^2} \right) = -\frac{4\overline{U_z}}{R^2} r \quad (\text{V.347})$$

En substituant la valeur de $\frac{r}{R}$ dérivée de la vitesse $\frac{\partial U_z(r)}{\partial r}$ prise pour $r = R$, nous obtenons l'expression de la contrainte de cisaillement pariétale

$$\tau_p = -\frac{4\mu\overline{U_z}}{R} \quad (\text{V.348})$$

Au sein du fluide la contrainte de cisaillement est

$$\tau(r) = \mu \frac{\partial U_z(r)}{\partial r} = -\frac{4\mu\overline{U_z}}{R^2} r \quad (\text{V.349})$$

En combinant les relations, nous trouvons la distribution de la contrainte de cisaillement au sein du fluide, cette distribution est

$$\frac{\tau(r)}{\tau_p} = \frac{r}{R} \quad (\text{V.350})$$

Le coefficient de frottement pariétal, par définition est

$$C_{fp} = \frac{\tau_p}{\frac{\rho(\overline{U_z})^2}{2}} \quad (\text{V.351})$$

En y substituant l'expression de la contrainte de cisaillement pariétale, nous avons

$$C_{fp} = \frac{\frac{4\mu\overline{U_z}}{R}}{\frac{\rho(\overline{U_z})^2}{2}} = \frac{8\mu}{\rho\overline{U_z}R} = \frac{16\mu}{\rho\overline{U_z}D} \quad (\text{V.352})$$

Si nous introduisons le nombre de Reynolds $\text{Re}_D = \frac{\rho\overline{U_z}D}{\mu}$, le coefficient de frottement pariétal s'écrit alors

$$C_{fp} = \frac{16}{\text{Re}_D} \quad (\text{V.353})$$

V. 24. 1. Chute de pression pour un écoulement laminaire dans un tube

Calculons la chute de pression sur une longueur L pour l'écoulement laminaire dans le tube. Comme le gradient de pression $\frac{\partial P}{\partial z}$ est constant, nous pouvons écrire alors

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_2 - P_1}{L} = -\frac{P_1 - P_2}{L} = \frac{\Delta P}{L} \quad (\text{V.354})$$

En utilisant la relation, la chute de pression ΔP s'écrit en fonction de la vitesse moyenne sous la forme

$$\overline{U_z} = \frac{R^2}{8\mu} \left(-\frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{R^2}{8\mu} \frac{\Delta P}{L} \quad (\text{V.355})$$

soit

$$\Delta P = \frac{32\mu L}{D^2} \overline{U_z} \quad (\text{V.356})$$

Introduisons un coefficient adimensionnel Γ appelé coefficient de Darcy-Weisbach ou coefficient de pertes de charge, défini par

$$\Gamma = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2} \rho (\overline{U_z})^2 \frac{L}{D}} \quad (\text{V.357})$$

En comparant les équations V. 352 et V. 357, nous remarquons que

$$C_{fp} = \frac{\Delta P}{4 \frac{L}{D} \frac{\rho (\overline{U_z})^2}{2}} = \frac{\Gamma}{4} \quad (\text{V.358})$$

Si nous remplaçons le coefficient de frottement par son expression dans l'équation V. 353, nous trouvons que le coefficient de Darcy-Weisbach est

$$\Gamma = \frac{64}{Re_D} \quad (\text{V.359})$$

Cette formule est valable pour un écoulement laminaire et donc pour $Re_D < 2300$.

V. 25. Distribution de la température et détermination du nombre de Nusselt

L'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques est

$$U_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{V.360})$$

Nous avons déjà vu que la seule composante non-nulle de la vitesse est la composante U_z ($U_r = 0, U_\theta = 0$). Pour des raisons de symétrie, la température ne varie en fonction de l'angle θ ($\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$), de plus nous négligeons la conduction

de la chaleur dans la direction z ($\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$). Après ces considérations, l'équation de la chaleur dans ce cas, se réduit à

$$U_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (\text{V.361})$$

V. 25. 1. Tube soumis à un flux de chaleur pariétal uniforme

Pour un écoulement établi dans un tube soumis à un flux de chaleur pariétal constant, la variation de la température dans la direction z est constante et par conséquent le profil de la température du fluide ne change pas dans cette direction. Ce fait est traduit par la relation suivante

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dT_S}{dz} = \frac{dT_m}{dz} = \frac{q_z P}{\dot{m} C_p} \quad (\text{V.362})$$

Le débit massique $\dot{m}$ est lié à la vitesse moyenne $\overline{U_z}$ par la relation

$$\dot{m} = \rho \overline{U_z} S = \rho \pi R^2 \overline{U_z} \quad (\text{V.363})$$

en substituant cette relation dans l'équation V. 362, nous arrivons à

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dT_S}{dz} = \frac{dT_m}{dz} = \frac{q_z 2\pi R}{\rho \pi R^2 \overline{U_z} C_p} = \frac{2q_z}{\rho \overline{U_z} C_p R} \quad (\text{V.364})$$

introduisons les expressions de $\frac{dT}{dz}$ et de la vitesse $U_z(r)$ dans l'équation de la chaleur, et on obtient

$$2\overline{U_z} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \frac{2q_z}{\rho \overline{U_z} C_p R} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (\text{V.365})$$

équation qui après certaines simplifications devient

$$\frac{4q_z}{\lambda R} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (\text{V.366})$$

Ecrivons cette équation différemment avant de l'intégrer, en effet, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{4q_z}{\lambda} \left(\frac{r}{R} - \left(\frac{r}{R} \right)^3 \right) \quad (\text{V.367})$$

Une première intégration nous donne

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{4q_z}{\lambda} \left(\frac{r^2}{2R} - \frac{r^4}{4R^3} \right) + C_1 \quad (\text{V.368})$$

Soit

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{4q_z}{\lambda} \left(\frac{r}{2R} - \frac{r^3}{4R^3} \right) + \frac{C_1}{r} \quad (\text{V.369})$$

Intégrant encore une autre fois et nous obtenons l'expression de la distribution de la température sous la forme

$$T(r) = \frac{4q_z}{\lambda} \left(\frac{r^2}{4R} - \frac{r^4}{16R^3} \right) + C_1 \ln r + C_2 \quad (\text{V.370})$$

Comme la température doit rester finie au centre du tube, la constante C_1 doit être nulle. La constante C_2 est calculée à partir de la condition aux limites suivante

$$r = R, T = T_p(z) \quad (\text{V.371})$$

Ainsi, on a

$$T_p(z) = \frac{4q_z}{\lambda} \left(\frac{r^2}{4R} - \frac{r^4}{16R^3} \right)_{r=R} + C_2 \quad (\text{V.372})$$

D'où la valeur de la constante C_2

$$C_2 = T_p(z) - \frac{3q_z R}{4\lambda} \quad (\text{V.373})$$

En substituant cette valeur de C_2 dans la relation, nous avons pour la distribution de la température

$$T(r) - T_p(z) = \frac{q_z R}{\lambda} \left(\left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^4 - \frac{3}{4} \right) \quad (\text{V.374})$$

Calculons à présent la température moyenne $\bar{T}(z)$ du fluide à partir de la relation

$$\bar{T}(z) = \frac{2}{U_z R^2} \int_0^R U_z(r) T(r, z) r dr \quad (\text{V.375})$$

Avant d'effectuer l'intégrale, calculons la fonction $U_z(r)T(r, z)$, en effet on

$$U_z(r)T(r, z) = 2\bar{U}_z \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \left[\frac{q_z R}{\lambda} \left(\left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^4 - \frac{3}{4} \right) + T_p(z) \right] \quad (\text{V.376})$$

Soit

$$\begin{aligned} U_z(r)T(r, z) = & \frac{2\bar{U}_z q_z R}{\lambda} \left[\frac{7}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{5}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^4 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^6 - \frac{3}{4} \right] \\ & + 2\bar{U}_z T_p(z) \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{V.377})$$

Et l'intégrale V. 376 s'écrit

$$\begin{aligned}\bar{T}(z) = & \frac{4q_z}{\lambda R} \int_0^R \left[\frac{7}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{5}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^4 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^6 - \frac{3}{4} \right] r dr \\ & + \frac{4}{R^2} T_s(z) \int_0^R \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) r dr\end{aligned}\quad (\text{V.378})$$

En effectuant les calculs, nous trouvons

$$\bar{T}(z) = \frac{4q_z}{\lambda R} R^2 \left[\frac{7}{16} - \frac{5}{24} + \frac{1}{32} - \frac{3}{8} \right] + \frac{4}{R^2} \frac{R^2}{4} T_p(z) \quad (\text{V.379})$$

soit

$$\bar{T}(z) = -\frac{11}{24} \frac{q_z R}{\lambda} + T_p(z) \quad (\text{V.380})$$

D'où

$$T_p(z) - \bar{T}(z) = \frac{11}{24} \frac{q_z R}{\lambda} \quad (\text{V.381})$$

A partir de la loi de Newton, nous avons

$$q_z = h_z (T_p(z) - \bar{T}(z)) \quad (\text{V.382})$$

C'est-à-dire que

$$q_z = h_z \frac{11}{24} \frac{q_z R}{\lambda} \quad (\text{V.383})$$

D'où le nombre de Nusselt

$$Nu_z = \frac{hD}{\lambda} = \frac{48}{11} = 4,363 \quad (\text{V.384})$$

Ainsi, le nombre de Nusselt pour un tube soumis à un flux de chaleur pariétal uniforme est constant le long du tube.

V. 25. 2. Tube isotherme

Reprenons l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques

$$\rho C_P U_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (\text{V.385})$$

Pour résoudre cette équation introduisons les variables adimensionnelles suivantes

$$\theta(r) = \frac{T - T_P}{T_0 - T_P}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad \xi = \frac{z}{R}, \quad W(\eta) = \frac{U_z(\eta)}{U_z} \quad (\text{V.386})$$

où T_0 est la température au centre du tube.

Si nous transformons les dérivées en fonction des nouvelles variables, nous obtenons les égalités suivantes

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \xi} \quad (\text{V.387})$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad (\text{V.388})$$

En substituant ces relations dans l'équation de la chaleur, nous trouvons

$$\frac{\rho C_P}{R} U_z \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\lambda}{R^2 \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \quad (\text{V.389})$$

De même remplaçons le profil de la vitesse $U_z(\eta)$ en fonction du profil de la vitesse adimensionnelle $W(\eta)$, il vient alors

$$\frac{\rho C_P \overline{U_z} R}{R} W(\eta) \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\lambda}{R^2 \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \quad (\text{V.390})$$

En simplifiant, nous arrivons à l'équation suivante

$$\frac{\rho C_P \overline{U_z} R}{\lambda} W(\eta) \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \quad (\text{V.391})$$

Travaillons le terme constant $\frac{\rho C_P \overline{U_z} R}{\lambda}$, en effet, nous avons

$$\frac{\rho C_P \overline{U_z} R}{\lambda} = \frac{\rho C_P \overline{U_z} R \mu}{\lambda \mu} = \frac{\rho C_P \overline{U_z} D \mu}{2 \lambda \mu} = \frac{\text{Re}_D \text{Pr}}{2} \quad (\text{V.392})$$

Ainsi, l'équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{\text{Re}_D \text{Pr}}{2} W(\eta) \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \quad (\text{V.393})$$

La température adimensionnelle $\theta(\eta)$ est définie par l'expression

$$\theta(\eta) = \frac{T(\eta, \xi) - T_P}{T_0(\xi) - T_P} \quad (\text{V.394})$$

Dans ce cas, nous avons

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \theta(\eta) \frac{\partial T_0(\xi)}{\partial \xi} \quad (\text{V.395})$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = (T_0(\xi) - T_P) \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial r} \quad (\text{V.396})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = (T_0(\xi) - T_P) \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} \quad (\text{V.397})$$

Introduisons ces relations dans l'équation de la chaleur et nous obtenons

$$\frac{\text{Re}_D \text{Pr}}{2} W(\eta) \theta(\eta) \frac{\partial T_0(\xi)}{\partial \xi} = \frac{(T_0(\xi) - T_P)}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} \right) \quad (\text{V.398})$$

Equation que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\frac{\text{Re}_D \text{Pr}}{T_0(\xi) - T_p} \frac{\partial T_0(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} \right)}{\frac{W(\eta)\theta(\eta)}{2}} \quad (\text{V.399})$$

Cette équation est une équation à variables séparables, qui s'écrit en introduisant la constante $-\alpha^2$, comme

$$\frac{\text{Re}_D \text{Pr}}{T_0(\xi) - T_p} \frac{\partial T_0(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} \right)}{\frac{W(\eta)\theta(\eta)}{2}} = -\alpha^2 \quad (\text{V.400})$$

Ainsi, nous arrivons à deux équations différentielles ordinaires indépendantes

$$\frac{\frac{\partial T_0(\xi)}{\partial \xi}}{T_0(\xi) - T_p} = -\frac{\alpha^2}{\text{Re}_D \text{Pr}} \quad (\text{V.401})$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} \right) + \frac{\alpha^2}{2} W(\eta)\theta(\eta) = 0 \quad (\text{V.402})$$

Comme la température T_p de la paroi du tube est constante, l'équation différentielle peut être écrite comme

$$\frac{d(T_0(\xi) - T_p)}{T_0(\xi) - T_p} = -\frac{\alpha^2}{\text{Re}_D \text{Pr}} d\xi \quad (\text{V.403})$$

Et dont la solution est

$$T_0(\xi) - T_p = C_1 e^{-\frac{\alpha^2}{\text{Re}_D \text{Pr}} \xi} \quad (\text{V.404})$$

Si nous substituons le profil de la vitesse adimensionnelle

$$W(\eta) = 2(1 - \eta^2) \quad (\text{V.405})$$

dans l'équation différentielle, nous trouvons

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} \right) + \alpha^2 (1 - \eta^2) \theta(\eta) = 0 \quad (\text{V.406})$$

soit

$$\frac{\partial^2 \theta(\eta)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} + \alpha^2 (1 - \eta^2) \theta(\eta) = 0 \quad (\text{V.407})$$

Avec les conditions aux limites suivantes

$$r = 0, \quad T = T_0 \quad (\text{V.408})$$

$$\eta = 0, \quad \theta = 1 \quad (\text{V.409})$$

$$r = R, \quad T = T_p \quad (\text{V.410})$$

$$\eta = 1, \quad \theta = 0 \quad (\text{V.411})$$

Cherchons la température adimensionnelle $\theta(\eta)$ sous la forme d'une série infinie en fonction de la variable η .
Ecrivons alors cette série sous la forme condensée suivante

$$\theta(\eta) = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \eta^m \quad (\text{V.412})$$

Explicitement, la série s'écrit comme

$$\theta(\eta) = A_0 + A_1 \eta + A_2 \eta^2 + A_3 \eta^3 + A_4 \eta^4 + \dots + A_m \eta^m \quad (\text{V.413})$$

Dont la dérivée première et la dérivée seconde sont

$$\frac{d\theta(\eta)}{d\eta} = A_1 + 2A_2 \eta + 3A_3 \eta^2 + 4A_4 \eta^3 + \dots + (m+1)A_{m+1} \eta^m \quad (\text{V.414})$$

$$\frac{d^2 \theta(\eta)}{d\eta^2} = 2A_2 + 6A_3 \eta + 12A_4 \eta^2 + \dots + (m+1)(m+2)A_{m+2} \eta^m \quad (\text{V.415})$$

En substituant les relations dans l'équation différentielle ci-dessous, appelée équation d'Euler-Cauchy

$$\frac{\partial^2 \theta(\eta)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} + \alpha^2 (1 - \eta^2) \theta(\eta) = 0 \quad (\text{V.416})$$

Nous trouvons l'équation algébrique suivante

$$\begin{aligned} & 2A_2 + 6A_3\eta + 12A_4\eta^2 + \dots + (m+1)(m+2)A_{m+2}\eta^m \\ & + \frac{A_1}{\eta} + 2A_2 + 3A_3\eta + 4A_4\eta^2 + \dots + (m+1)A_{m+1}\eta^{m-1} \\ & + \alpha^2 (1 - \eta^2) (A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3 + A_4\eta^4 \dots + A_m\eta^m) = 0 \end{aligned} \quad (\text{V.417})$$

En égalisant les termes en η de même puissance, il vient alors

$$A_1 = 0 \quad (\text{V.418})$$

$$4A_2 + \alpha^2 A_0 = 0 \quad (\text{V.419})$$

$$9A_3 + \alpha^2 A_1 = 0 \quad (\text{V.420})$$

$$25A_5 + \alpha^2 A_3 = \alpha^2 A_0 \quad (\text{V.421})$$

$$[(m+2)(m+1) + (m+2)]A_{m+2} + \alpha^2 A_m = \alpha^2 A_{m-2} \quad (\text{V.422})$$

Remarquons que tous les coefficients d'indice impairs sont nuls ($A_1 = A_3 = A_5 = \dots = 0$).

En posant que $m = 2n$, l'équation devient

$$[(2n+2)(2n+1) + (2n+2)]A_{2n+2} + \alpha^2 A_{2n} = \alpha^2 A_{2n-2} \quad (\text{V.423})$$

soit

$$(2n+2)^2 A_{2n+2} + \alpha^2 A_{2n} = \alpha^2 A_{2n-2} \quad (\text{V.424})$$

D'où la relation

$$A_{2n+2} = \frac{\alpha^2}{(2n+2)^2} (A_{2n-2} - A_{2n}) \quad (\text{V.425})$$

Par conséquent la solution $\theta(\eta)$ peut être écrite sous la forme

$$\theta(\eta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_{2n} \eta^{2n} \quad (\text{V.426})$$

où les coefficients A_{2n} sont donnés par l'équation

$$A_{2n} = \frac{\alpha^2}{(2n)^2} (A_{2n-4} - A_{2n-2}) \quad , \quad n \geq 2 \quad (\text{V.427})$$

Remarquons que la solution ne renferme que les puissances paires de la variable η , soit

$$\theta(\eta) = A_0 + A_2 \eta^2 + A_4 \eta^4 + A_6 \eta^6 + \dots + A_{2n} \eta^{2n} \quad (\text{V.428})$$

A partir des conditions aux limites pour la température adimensionnelle $\theta(\eta)$

$$\eta = 0, \quad \theta = 1 \quad (\text{V.429})$$

$$\eta = 1, \quad \theta = 0 \quad (\text{V.430})$$

nous arrivons aux relations suivantes pour les coefficients A_{2n} , à savoir

$$A_0 = 1 \quad (\text{V.431})$$

$$A_0 + A_2 + A_4 + A_6 + \dots + A_{2n} = 0 \quad (\text{V.432})$$

A partir de la relation, il nous est possible de calculer les différents coefficients et nous trouvons ainsi A_2 , A_4 et A_6

$$A_2 = -\frac{\alpha^2}{4} A_0 \quad (\text{V.433})$$

$$A_4 = \frac{\alpha^2}{16}(A_0 - A_2) \quad (\text{V.434})$$

$$A_6 = \frac{\alpha^2}{36}(A_2 - A_4) \quad (\text{V.435})$$

Remarquons que le coefficient A_2 est fonction du coefficient A_0 , si nous exprimons aussi les coefficients A_4 et A_6 en fonction du coefficient A_0 , nous trouvons alors que

$$A_4 = \frac{\alpha^2}{16}\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)A_0 \quad (\text{V.436})$$

$$A_6 = \frac{\alpha^2}{36}\left(-\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{16}\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)\right)A_0 \quad (\text{V.437})$$

Substituant ces coefficients dans la relation, il vient

$$A_0 - \frac{\alpha^2}{4}A_0 + \frac{\alpha^2}{16}\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)A_0 + \frac{\alpha^2}{36}\left(-\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{16}\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)\right)A_0 + \dots = 0 \quad (\text{V.438})$$

réarrangeant cette égalité sous la forme

$$A_0 - \frac{\alpha^2}{4}A_0 + \frac{\alpha^2}{16}\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)A_0 - \frac{\alpha^2}{36}\left(\frac{5\alpha^2}{16} + \frac{\alpha^4}{64}\right)A_0 + \dots = 0 \quad (\text{V.439})$$

ou bien

$$A_0\left[1 - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{16}\left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right) - \frac{\alpha^2}{36}\left(\frac{5\alpha^2}{16} + \frac{\alpha^4}{64}\right) + \dots\right] = 0 \quad (\text{V.440})$$

soit

$$A_0\left[1 - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{16} + \frac{\alpha^4}{64} - \frac{5\alpha^4}{576} - \frac{5\alpha^6}{2304} + \dots\right] = 0 \quad (\text{V.441})$$

En se contentant du quatrième ordre pour le coefficient α , nous obtenons alors l'équation

$$A_0 \left[1 - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{16} + \frac{\alpha^4}{64} - \frac{5\alpha^4}{576} \right] = 0 \quad (\text{V.442})$$

Sachant que $A_0 = 1$, et en réduisant cette équation au même dénominateur commun, nous aboutissant à la relation

$$\frac{4\alpha^4 - 108\alpha^2 + 576}{576} = 0 \quad (\text{V.443})$$

Ou bien

$$4\alpha^4 - 108\alpha^2 + 576 = 0 \quad (\text{V.444})$$

D'où

$$\alpha^4 - 27\alpha^2 + 144 = 0 \quad (\text{V.445})$$

La solution de cette équation algébrique du quatrième ordre en α est

$$\alpha = 2,704364 \quad (\text{V.446})$$

Reprenons l'équation de la chaleur

$$\frac{\rho C_P U_z \theta}{R} \frac{\partial T_0}{\partial \xi} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (\text{V.447})$$

Intégrant les eux membres de cette équation entre $r = 0$ et $r = R$, sur une surface rdr

$$\int_0^R \frac{\rho C_P U_z \theta}{R} \frac{\partial T_0}{\partial \xi} r dr = \int_0^R \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) r dr \quad (\text{V.448})$$

Commençons par l'intégrale du membre gauche de l'équation. Comme la conductivité thermique est constante, l'intégrale s'effectue aisément et donne

$$\int_0^R \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) r dr = \lambda \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr = \lambda \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r=0}^{r=R} \quad (\text{V.450})$$

En explicitant un peu l'intégrale, il vient alors

$$\left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r=0}^{r=R} = \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r=R} - \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r=0} = \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r=R} = R \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (\text{V.451})$$

L'équation s'écrit dans ce cas comme

$$\int_0^R \frac{\rho C_P U_z \theta}{R} \frac{\partial T_0}{\partial \xi} r dr = \lambda R \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (\text{V.452})$$

Introduisons la température adimensionnelle $\theta(\eta)$ définie par l'expression

$$\theta(r) = \frac{T - T_P}{T_0 - T_P} \quad (\text{V.453})$$

d'où

$$\int_0^R \frac{\rho C_P U_z}{R} \left(\frac{T - T_P}{T_0 - T_P} \right) \frac{\partial T_0}{\partial \xi} r dr = \lambda R \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (\text{V.454})$$

ou bien

$$\int_0^R \frac{\rho C_P U_z}{R} \frac{\frac{\partial T_0}{\partial \xi}}{T_0 - T_P} (T - T_P) r dr = \lambda R \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (\text{V.455})$$

Remarquons que le terme $q_P = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R}$ est le flux de chaleur sur la paroi du tube, et faisons quelques petites transformations pour faire apparaître le nombre de Prandtl et de Reynolds, en effet, après cela, l'équation s'écrit

$$\int_0^R \rho C_P \frac{\lambda U_z}{\lambda U_z} \overline{U_z} \frac{2R}{2R^2} \frac{\mu}{\mu} \frac{\partial T_0}{T_0 - T_P} (T - T_P) r dr = Rq_P \quad (\text{V.456})$$

soit

$$\int_0^R \lambda \frac{U_z}{U_z} \frac{\text{Pr Re}_D}{2R^2} \frac{\partial T_0}{T_0 - T_P} (T - T_P) r dr = Rq_P \quad (\text{V.457})$$

A partir de l'équation

$$\frac{\frac{\partial T_0(\xi)}{\partial \xi}}{T_0(\xi) - T_P} = -\frac{\alpha^2}{\text{Re}_D \text{Pr}} \quad (\text{V.458})$$

L'équation V. 457 s'écrit

$$\int_0^R -\frac{\lambda \alpha^2}{2R^2} \frac{U_z}{U_z} (T - T_P) r dr = Rq_P \quad (\text{V.459})$$

Et en réarrangeant, nous arrivons à

$$-\frac{\lambda \alpha^2}{2} \int_0^R \frac{U_z (T - T_P) r dr}{R^2 U_z} = Rq_P \quad (\text{V.460})$$

En séparant l'intégrale, on a

$$-\frac{\lambda \alpha^2}{2} \left[\frac{1}{R^2 U_z} \int_0^R U_z T r dr - \frac{T_P}{R^2 U_z} \int_0^R U_z r dr \right] = Rq_P \quad (\text{V.461})$$

En divisant par le nombre deux, nous faisons apparaître les définitions de la vitesse moyenne et de la température moyenne

$$-\frac{\lambda\alpha^2}{4}\left[\frac{2}{R^2\overline{U}_z}\int_0^R U_z T r dr - \frac{2T_P}{R^2\overline{U}_z}\int_0^R U_z r dr\right] = Rq_P \quad (\text{V.462})$$

Ainsi, nous aboutissons à l'égalité suivante

$$-\frac{\lambda\alpha^2}{4}(\overline{T} - T_P) = Rq_P \quad (\text{V.463})$$

Le flux de chaleur sur la paroi du tube est

$$q_P = \frac{\frac{\lambda\alpha^2}{4}(T_P - \overline{T})}{\frac{D}{2}} = \frac{\lambda\alpha^2}{2D}(T_P - \overline{T}) = h(T_P - \overline{T}) \quad (\text{V.464})$$

Et par conséquent le nombre de Nusselt est

$$Nu_D = \frac{hD}{\lambda} = \frac{\alpha^2}{2} \quad (\text{V.465})$$

En remplaçant la constante α par sa valeur numérique, nous obtenons la valeur du nombre de Nusselt pour un tube isotherme, à savoir

$$Nu_D = \frac{(2,704364)^2}{2} = 3,656 \quad (\text{V.466})$$

V. 26. Écoulement turbulent dans un tube

Pour un écoulement turbulent dans un tube ($Re_D > 10^4$), les corrélations sont le plus souvent déduites d'études expérimentales car leurs dérivations théoriques sont très quasiment impossibles à cause de la complexité de la turbulence. Pour les écoulements turbulents dans des tubes lisses, le coefficient de Darcy-Weisbach Γ est donné par la formule

$$\Gamma = \frac{1}{(0,790 \ln Re_D - 1,64)^2}, \quad 10^4 < Re_D < 10^6 \quad (\text{V.467})$$

Le nombre de Nusselt dans ce cas est donné par la relation dite de Chilton-Colburn

$$Nu_D = 0,125 \Gamma Re_D Pr^{\frac{1}{3}} \quad (V.468)$$

Pour un écoulement turbulent établi dans un tube lisse, le coefficient de Darcy-Weisbach Γ est donné par la relation

$$\Gamma = \frac{0,184}{Re_D^{\frac{1}{5}}} \quad (V.469)$$

En substituant l'expression de Γ dans l'équation V. 468, nous obtenons une autre formule pour le nombre de Nusselt, à savoir

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{0,8} Pr^{\frac{1}{3}}, \quad Re_D > 10^4, \quad 0,7 < Pr < 160 \quad (V.470)$$

Cette relation est appelée relation de Colburn. Une autre version de cette équation est

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{0,8} Pr^{\alpha}, \quad \alpha = \begin{cases} 0,4 & \text{chauffage} \\ 0,3 & \text{refroidissement} \end{cases} \quad (V.471)$$

Cette équation modifiée est dite relation de Dittus-Boelter. Les propriétés thermophysiques sont évaluées à la température moyenne $\bar{T} = \frac{T_e + T_o}{2}$. Il existe une autre formule plus précise dite relation de Petukhov, c'est

$$Nu_D = \frac{\left(\frac{\Gamma}{8}\right) Re_D Pr}{1,07 + 12,7 \left(\frac{\Gamma}{8}\right)^{0,5} \left(Pr^{\frac{1}{3}} - 1\right)}, \quad \begin{cases} 10^4 < Re_D < 5 \cdot 10^6 \\ 0,5 \leq Pr \leq 2000 \end{cases} \quad (V.472)$$

Pour des faibles nombres de Reynolds, la formule V. 472 s'écrit

$$Nu_D = \frac{\left(\frac{\Gamma}{8}\right)(Re_D - 1000)Pr}{1 + 12,7\left(\frac{\Gamma}{8}\right)^{0,5}\left(\frac{1}{Pr^{\frac{1}{3}}}-1\right)}, \begin{cases} 3.10^3 < Re_D < 5.10^6 \\ 0,5 \leq Pr \leq 2000 \end{cases} \quad (V.473)$$

Pour les métaux liquides, le nombre de Nusselt pour un tube isotherme est donné par la relation

$$Nu_D = 4,8 + 0,0156 Re_D^{0,85} Pr_P^{\frac{1}{3}}, \begin{cases} 10^4 < Re_D < 10^6 \\ 0,004 < Pr < 0,01 \end{cases} \quad (V.474)$$

Pour un tube soumis à un flux de chaleur, le nombre de Nusselt est donné par la relation

$$Nu_D = 6,3 + 0,0167 Re_D^{0,85} Pr_P^{\frac{1}{3}}, \begin{cases} 10^4 < Re_D < 10^6 \\ 0,004 < Pr < 0,01 \end{cases} \quad (V.475)$$

Dans les deux cas, le nombre de Prandtl est évalué à la température de la paroi du tube T_p .

Pour un tube rugueux, le coefficient de Darcy-Weisbach Γ est donné par la relation

$$\frac{1}{\sqrt{\Gamma}} = -2,0 \log \left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3,7} + \frac{2,51}{Re_D \sqrt{\Gamma}} \right) \quad (V.476)$$

où $\frac{\varepsilon}{D}$ est la rugosité relative de la paroi interne du tube.

Cette relation s'appelle relation de Colebrooke.

V. 27. Convection libre (naturelle)

Dans la convection libre le mouvement du fluide est dû aux effets de la flottaison est liée au gradient de la masse volumique et le mouvement du fluide est induit par une force proportionnelle à la masse volumique. Généralement, la force motrice dérive du potentiel de la gravitation. Dans ce

chapitre nous étudions la convection dans le cas où le gradient de la masse volumique est causé par la différence de température et la force motrice est due à la gravitation.

V. 27. 1. Equations de la convection libre

Considérons une couche limite laminaire causée par l'effet de flottaison. si le fluide est incompressible et si l'écoulement est bidimensionnel et que les propriétés thermophysiques sont constante, les équations de la couche limite dans ce cas s'écrivent

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{V.477})$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{V.478})$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{V.479})$$

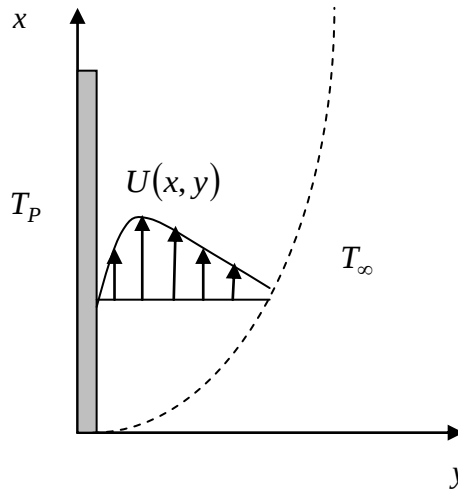


Figure V. 27. Couche limite pour la convection libre le long d'une plaque plane verticale.

Puisque la pression P ne dépend pas de la variable y et loin de la plaque le fluide est stagnant ($U = V = 0$), nous pouvons écrire que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_{\infty} g \quad (\text{V.480})$$

En substituant cette relation dans l'équation du mouvement, nous obtenons

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -g + \frac{\rho_{\infty}}{\rho} g + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{V.481})$$

Soit

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \left(\frac{\rho_{\infty} - \rho}{\rho} \right) + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{V.482})$$

Comme la masse volumique du fluide ρ est fonction de la température, il est légitime d'écrire un développement limité autour de la température T_{∞}

$$\rho(T) = \rho(T_{\infty}) + (T - T_{\infty}) \frac{\partial \rho}{\partial T} + (T - T_{\infty})^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} + \dots \quad (\text{V.483})$$

Si nous nous limitons au premier ordre, nous obtenons

$$\rho(T) \approx \rho(T_{\infty}) + (T - T_{\infty}) \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad (\text{V.484})$$

Introduisons le coefficient d'expansion thermique β défini par la relation

$$\beta = -\frac{1}{\rho(T)} \frac{\partial \rho(T)}{\partial T} \quad (\text{V.485})$$

La relation devient

$$\rho(T) \approx \rho(T_{\infty}) - \beta \rho(T) (T - T_{\infty}) \quad (\text{V.486})$$

Si nous notons par $\rho_{\infty} = \rho(T_{\infty})$, alors l'équation s'écrit

$$\frac{\rho_{\infty} - \rho}{\rho} \approx \beta (T - T_{\infty}) \quad (\text{V.487})$$

Cette simplification est appelée approximation de Boussinesq. Après cette manipulation les équations de la couche limite laminaire pour la convection libre s'écrivent alors sous la forme

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{V.488})$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{V.489})$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{V.490})$$

V. 27. 2. Adimensionnalisation

Si nous considérons le changement de variables suivant

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \hat{y} = \frac{y}{L} \quad (\text{V.491})$$

$$\hat{U} = \frac{U}{U_\infty}, \hat{V} = \frac{V}{U_\infty}, \hat{T} = \frac{T - T_p}{T_p - T_\infty} \quad (\text{V.492})$$

Nous obtenons les équations de la couche limite laminaire sous leurs formes adimensionnelles

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (\text{V.493})$$

$$\hat{U} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} + \hat{V} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{y}} = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)L}{U_\infty^2} \hat{T} + \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{y}^2} \quad (\text{V.494})$$

$$\hat{U} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \hat{V} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{\text{Re}_L \text{Pr}} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2} \quad (\text{V.495})$$

Le terme $\frac{g\beta(T_p - T_\infty)L}{U_\infty^2}$ peut être transformé comme suit

$$\frac{g\beta(T_P - T_\infty)L}{U_\infty^2} = \frac{g\beta(T_P - T_\infty)L^3}{\nu^2} \frac{\nu^2}{U_\infty^2 L^2} = \frac{Gr}{Re_L^2} \quad (V.496)$$

où Gr est un nouveau nombre adimensionnel appelé nombre de Grashof, défini par l'équation

$$Gr = \frac{g\beta(T_P - T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (V.497)$$

Le nombre de Grashof est le rapport entre les forces de flottaison et les forces d'inertie. Ainsi, les équations de la couche limite deviennent

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (V.498)$$

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \hat{x}} + \hat{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \hat{y}} = \frac{Gr}{Re_L^2} \hat{T} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \hat{y}^2} \quad (V.499)$$

$$\hat{U} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{x}} + \hat{V} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}} = \frac{1}{Re_L Pr} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{y}^2} \quad (V.500)$$

Regardons de près l'influence du terme $\frac{Gr}{Re_L^2}$ sur le transfert

de chaleur. Si $\frac{Gr}{Re_L^2} \approx 1$, nous sommes en présence des deux

types de convection, la convection forcée et la convection libre, c'est ce que nous appelons la convection mixte. Si

$\frac{Gr}{Re_L^2} \ll 1$, c'est la convection forcée qui domine et finalement

si $\frac{Gr}{Re_L^2} \gg 1$, c'est la convection libre qui est prépondérante.

Comme nous l'avons fait en convection forcée, nous pouvons déduire certaines relations fonctionnelles concernant les profils adimensionnels des vitesses et de la température. Ces relations fonctionnelles sont

$$\hat{U} = F_1(\hat{x}, \hat{y}, \text{Re}_L, Gr) \quad (\text{V.501})$$

$$\hat{V} = F_2(\hat{x}, \hat{y}, \text{Re}_L, Gr) \quad (\text{V.502})$$

$$\hat{T} = F_1(\hat{x}, \hat{y}, \text{Re}_L, Gr, \text{Pr}) \quad (\text{V.503})$$

V. 27. 3. Convection libre sur une surface plane verticale et isotherme

Pour une surface plane verticale et isotherme, les équations de la couche limite laminaire sont

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{V.504})$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{V.505})$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{V.506})$$

Avec les conditions aux limites

$$y = 0, U = 0, V = 0, T = T_p \quad (\text{V.507})$$

$$y = \infty, U = 0, V = 0, T = T_\infty \quad (\text{V.508})$$

Introduisons la variable adimensionnelle suivante

$$\eta = \frac{y}{x} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^4 \quad (\text{V.509})$$

$$\text{où } Gr_x = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)x^3}{\nu^2}.$$

Introduisons aussi une certaine fonction $f(\eta)$ telle que la fonction du courant $\Psi(x, y)$ s'écrit

$$\Psi(x, y) = 4\nu \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^4 f(\eta) \quad (\text{V.510})$$

Sachant que

$$U = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \quad (\text{V.511})$$

Nous pouvons calculer la composante U de la vitesse, en effet nous avons

$$U = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (\text{V.512})$$

En utilisant la relation, nous trouvons

$$U = \frac{2\nu}{x} Gr_x^{\frac{1}{2}} f'(\eta) \quad (\text{V.513})$$

En calculant aussi la composante V de la même façon et en introduisant la température adimensionnelle $\theta(\eta)$ telle que

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} \quad (\text{V.514})$$

Les équations deviennent

$$f'''(\eta) + 3f(\eta)f''(\eta) - 2(f'(\eta))^2 + \theta(\eta) = 0 \quad (\text{V.515})$$

$$\theta''(\eta) + 3Pr f(\eta)\theta'(\eta) = 0 \quad (\text{V.516})$$

Avec les conditions aux limites

$$\eta = 0, \quad f = f' = 0, \quad \theta = 1 \quad (\text{V.517})$$

$$\eta = \infty, \quad f' = 0, \quad \theta = 0 \quad (\text{V.518})$$

Le nombre de Nusselt local Nu_x est calculé à partir de la loi de Newton, à savoir

$$Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda} = \frac{\left(\frac{q_p}{T_p - T_\infty} \right) x}{\lambda} \quad (\text{V.519})$$

Le flux de chaleur pariétal q_p en vertu de la loi de Fourier est

$$q_P = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (\text{V.520})$$

Le gradient de température $\frac{\partial T}{\partial y}$ s'écrit en fonction de la variable η et de la température adimensionnelle $\theta(\eta)$ comme

$$q_P = -\frac{\lambda}{x} (T_P - T_\infty) \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (\text{V.521})$$

Et par conséquent le nombre de Nusselt devient

$$Nu_x = - \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\partial \theta(\eta)}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (\text{V.522})$$

De l'équation de la chaleur, nous pouvons écrire la relation fonctionnelle du nombre de Nusselt local sous la forme

$$Nu_x = \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}} F_4(\text{Pr}) \quad (\text{V.523})$$

La fonction $F_4(\text{Pr})$ a été corrélée numériquement à partir du graphe par une formule d'interpolation sous la forme

$$F_4(\text{Pr}) = \frac{0,75 \text{Pr}^{\frac{1}{2}}}{\left(1,238 \text{Pr} + 1,221 \text{Pr}^{\frac{1}{2}} + 0,609 \right)^{\frac{1}{4}}}, \quad 0 \leq \text{Pr} \leq \infty \quad (\text{V.524})$$

Le coefficient d'échange convectif local h_x s'écrit à partir de la relation sous la forme

$$h_x = \frac{\lambda}{x} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}} F_4(\text{Pr}) \quad (\text{V.525})$$

si nous utilisons la définition du nombre de Grashof local

$$Gr_x = \frac{g\beta(T_P - T_\infty)x^3}{\nu^2} \quad (V.526)$$

L'équation s'écrit alors comme

$$h_x = \frac{\lambda}{x^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{g\beta(T_P - T_\infty)}{4\nu^2} \right)^{\frac{1}{4}} F_4(\text{Pr}) \quad (V.527)$$

sachant que Le coefficient d'échange convectif moyen $\bar{h}$ est

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx \quad (V.528)$$

soit

$$\bar{h} = \frac{\lambda}{L} \left(\frac{g\beta(T_P - T_\infty)}{4\nu^2} \right)^{\frac{1}{4}} F_4(\text{Pr}) \int_0^L \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}} \quad (V.529)$$

En effectuant l'intégrale, nous obtenons

$$\bar{h} = \frac{4}{3} \frac{\lambda}{L} \left(\frac{g\beta(T_P - T_\infty)L^3}{4\nu^2} \right)^{\frac{1}{4}} F_4(\text{Pr}) \quad (V.530)$$

Ainsi, le nombre de Nusselt moyen s'écrit

$$\overline{Nu} = \frac{4}{3} \left(\frac{Gr_L}{4} \right)^{\frac{1}{4}} F_4(\text{Pr}) \quad (V.531)$$

ou bien

$$\overline{Nu} = \frac{4}{3} Nu_L \quad (V.532)$$

Comme aussi dans la convection libre il y a un mouvement du fluide, il est possible d'avoir des instabilités qui mènent vers la turbulence. La transition vers la turbulence dépend du rapport des forces de flottabilité aux forces visqueuses

dans le fluide. Le critère de transition dans ce cas est le nombre de Rayleigh défini comme le produit du nombre de Grashof par le nombre de Prandtl, soit

$$Ra_x = Gr_x Pr = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)x^3}{\nu\alpha} \approx 10^9 \quad (V.533)$$

V. 27. 4. Corrélations expérimentales pour la convection libre

Généralement les corrélations sont de la forme

$$\overline{Nu} = ARa_L^\alpha \quad (V.534)$$

où α est égale à $\frac{1}{4}$ pour le cas laminaire et $\frac{1}{3}$ pour le cas turbulent.

V. 27. 4. 1. Plaque verticale

Pour une plaque verticale, le nombre de Nusselt moyen est donné par les formules

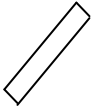
$$\overline{Nu} = \begin{cases} 0,59Ra_L^{\frac{1}{4}}, & 10^4 \leq Ra_L \leq 10^9 \\ 0,10Ra_L^{\frac{1}{3}}, & 10^9 \leq Ra_L \leq 10^{13} \end{cases} \quad (V.535)$$

Il existe une autre formule plus générale qui s'applique pour l'ensemble des valeurs du nombre de Rayleigh, c'est la formule de Churchill et Chu

$$\overline{Nu} = \left[0,825 + \frac{0,387Ra_L^{\frac{1}{4}}}{\left(1 + \left(\frac{0,492}{Pr} \right)^{\frac{9}{16}} \right)^{\frac{8}{27}}} \right]^2 \quad (V.536)$$

Si l'écoulement est laminaire, il est préférable d'utiliser la formule

$$\overline{Nu} = 0,680 + \frac{0,670 Ra_L^{\frac{1}{4}}}{\left(1 + \left(\frac{0,492}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right)^{\frac{4}{9}}}, \quad Ra_L \leq 10^9 \quad (V.537)$$

Géométrie	L_C	Rayleigh Ra_L	$\overline{Nu}$
	L	$10^4 \leq Ra_L \leq 10^9$ $10^9 \leq Ra_L \leq 10^{13}$	$\overline{Nu} = \begin{cases} 0,59 Ra_L^{\frac{1}{4}} \\ 0,10 Ra_L^{\frac{1}{3}} \end{cases}$
	L	$Ra_L \leq 10^9$	$Ra_L = \frac{g \cos \varphi \beta (T_P - T_\infty) L^3}{\nu \alpha}$
	$\frac{S}{P}$	$10^4 \leq Ra_L \leq 10^7$ $10^7 \leq Ra_L \leq 10^{11}$ $10^9 \leq Ra_L \leq 10^{11}$	$\overline{Nu} = 0,54 Ra_L^{\frac{1}{4}}$ $\overline{Nu} = 0,15 Ra_L^{\frac{1}{3}}$ $\overline{Nu} = 0,27 Ra_L^{\frac{1}{4}}$
	L		$D \geq \frac{35L}{Gr_L^{\frac{1}{4}}}$

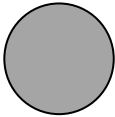
	D	$Ra_D \leq 10^{12}$	$\overline{Nu} = \left[0,6 + \frac{0,387 Ra_D^{\frac{1}{6}}}{\left(1 + \left(\frac{0,559}{Pr} \right)^{\frac{9}{16}} \right)^{\frac{8}{27}}} \right]^2$
	D	$Ra_D \leq 10^{11}$ $Pr \geq 0,7$	$\overline{Nu} = 2 + \frac{0,589 Ra_D^{\frac{1}{4}}}{\left(1 + \left(\frac{0,464}{Pr} \right)^{\frac{9}{16}} \right)^{\frac{4}{9}}}$

Tableau V. 8. Corrélations pour Nusselt moyen en convection libre sur des surfaces.

V. 27. 4. 2. Convection libre pour surface ailettées et circuit imprimés

Le cas de la convection libre entre deux plaques parallèles constituant un canal est très répandu en pratique. Quand les plaques sont chaudes, l'air entre par le bas dans le canal et se chauffe à fur et à mesure au contact des plaques et monte vers la sortie supérieure.

En pratique, ce cas de figure se rencontre avec les surfaces ailettées ou les puits de chaleur des circuits imprimés.

Les surfaces ailettées sont très utilisées comme puits de chaleur pour le refroidissement des équipements électroniques.

Considérons le cas d'une surface ailettées orientée verticalement, si les ailettes ont une longueur L et sont espacées d'une distance e , le nombre de Rayleigh dans ce cas est défini par l'expression

$$Ra_e = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)e^3}{\nu\alpha} \quad (\text{V.538})$$

$$Ra_L = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)L^3}{\nu\alpha} = Ra_e \left(\frac{L}{e}\right)^3 \quad (\text{V.539})$$

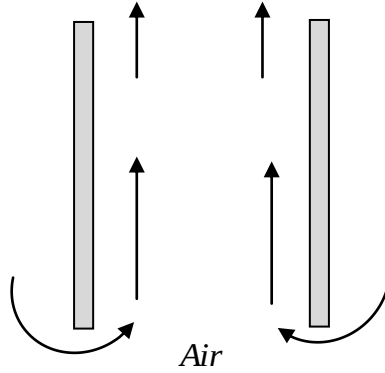


Figure V. 28. Convection libre dans un canal vertical et isotherme.

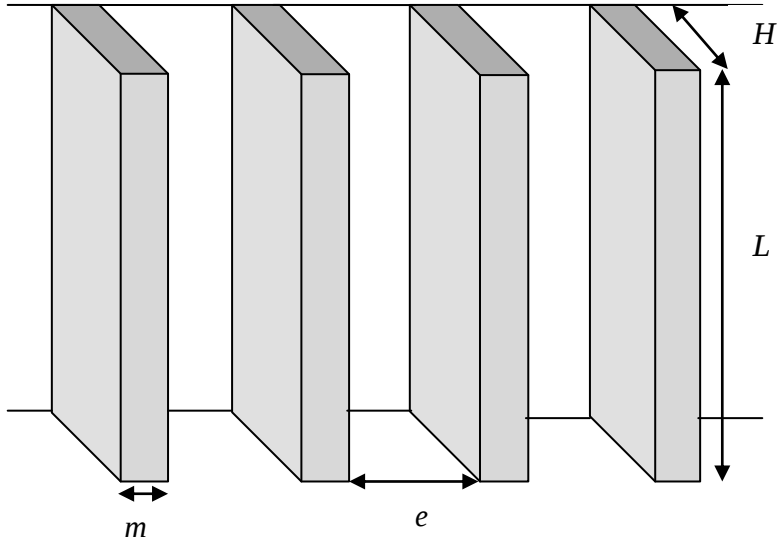


Figure V. 29. Surface verticale ailettée.

Pour ce cas de figure, le nombre de Nusselt moyen pour le cas où les plaques sont isothermes est donné par la formule

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}e}{\lambda} = \left[\frac{576}{\left(Ra_e \frac{e}{L}\right)^2} + \frac{2,873}{\left(Ra_e \frac{e}{L}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (V.540)$$

Un puit de chaleur avec un espacement des ailettes est très réduit aura une grande surface d'échange mais un coefficient d'échange convectif très réduit à cause de la résistance induite vis-à-vis du mouvement du fluide. Un puit de chaleur avec un espacement des ailettes très grand aura une faible surface mais un coefficient d'échange très grand. Par conséquent, il existe un espacement optimal qui maximise le transfert de chaleur par convection. Pour des plaques isothermes, l'espacement optimal est

$$e_{opt} = 2,714 \left(\frac{e^3 L}{Ra_e} \right)^{\frac{1}{4}} = 2,714 \frac{L}{Ra_L^{\frac{1}{4}}} \quad (V.541)$$

En substituant cette expression dans l'équation nous obtenons

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}e_{opt}}{\lambda} = 1,307 \quad (V.542)$$

La quantité de chaleur échangée dans ce cas est

$$Q = 2NLH(T_p - T_\infty) \quad (V.543)$$

où N est le nombre d'ailettes et les propriétés thermophysiques sont évaluées à la température moyenne

$$\bar{T} = \frac{T_P + T_\infty}{2}.$$

Si les plaques sont soumises à un flux de chaleur pariétal q_P , le nombre de Grashof dans ce cas est

$$Ra_e = \frac{g\beta q_P e^4}{\nu \alpha} \quad (\text{V.544})$$

et par conséquent le nombre de Nusselt moyen sera

$$\overline{Nu}_L = \frac{\overline{h}_L e}{\lambda} = \left[\frac{48}{Ra_e \frac{e}{L}} + \frac{2,51}{\left(Ra_e \frac{e}{L}\right)^{0,4}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{V.545})$$

Pour des laques soumises à un flux de chaleur pariétal, l'espacement optimal est

$$e_{opt} = 2,714 \left(\frac{e^4 L}{Ra_e} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (\text{V.546})$$

La quantité de chaleur échangée dans ce cas est

$$Q = 2NLHq_P \quad (\text{V.547})$$

Où N est le nombre d'ailettes et les propriétés thermophysiques sont évaluées à la température moyenne

$$\bar{T} = \frac{T_L + T_\infty}{2}, \quad T_L \text{ est la température du bord supérieur de}$$

l'ailette et elle déterminée à partir de la relation

$$T_L = \frac{q_P}{h_L} + T_\infty \quad (\text{V.548})$$

V. 27. 4. 3. Convection libre dans les enceintes

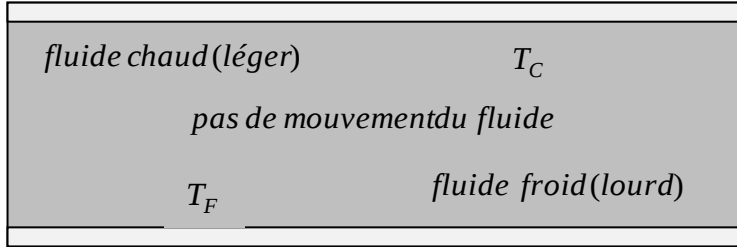
L'étude de la convection libre dans les enceintes est très importante. Dans une enceinte verticale, le fluide au contact de la paroi chaude monte puisque sa masse volumique diminue et le fluide au contact de la paroi descend puisque sa masse volumique augmente. Il se crée alors au sein de l'enceinte un mouvement du fluide de bas en haut ce qui contribue à une augmentation du transfert de chaleur entre le fluide et le milieu extérieur.

Dans le cas d'une enceinte horizontale, la situation dépend de la position de la paroi chaude. Si la plaque chaude est en haut, il n'y aura pas de mouvement du fluide puisque le fluide est au contact avec la paroi froide qui est en bas. Ainsi, le transfert de chaleur se fera par conduction pure. Si la paroi chaude est en bas, le fluide au contact de cette paroi voit sa masse volumique diminuer et il monte chassant ainsi le fluide en haut qui au contact de la paroi froide. Il se crée donc un mouvement de circulation du fluide de bas en haut et le transfert de chaleur se fera par convection libre.

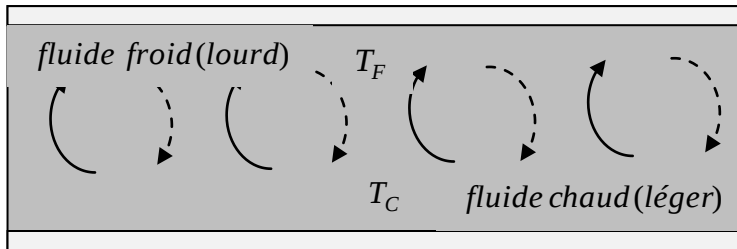
Pour l'enceinte le nombre de Rayleigh est

$$Ra_L = \frac{g\beta(T_C - T_F)L_C^3}{\nu\alpha} \quad (\text{V.538})$$

où L_C est la longueur caractéristique qui est dans ce cas la distance séparant les parois chaude et froide, T_C et T_F sont respectivement les températures de la paroi chaude et la paroi froide.



(a)



(b)

Figure V. 30. Courants de convection dans une enceinte horizontale. (a) plaque chaude en haut, (b) plaque chaude en bas.

V. 27. 4. 3. 1. Enceintes rectangulaires et horizontales

Pour une enceinte de forme rectangulaire et placée horizontalement et contenant de l'air ou autres gaz, le nombre de Nusselt moyen est donné par les relations

$$\overline{Nu} = \begin{cases} 0,195 Ra_L^{\frac{1}{4}}, & 10^4 \leq Ra_L \leq 4.10^5 \\ & 0,2 \leq Pr \leq 2 \\ 0,068 Ra_L^{\frac{1}{3}}, & 4.10^5 \leq Ra_L \leq 10^7 \\ & 0,2 \leq Pr \leq 2 \end{cases} \quad (V.535)$$

pour les liquides, le Nusselt moyen est

$$\overline{Nu} = 0,069 Ra_L^{\frac{1}{3}} Pr^{0,074}, \quad 3 \cdot 10^5 \leq Ra_L \leq 7 \cdot 10^9 \quad (V.535)$$

Pour l'air, nous pouvons utiliser cette autre formule

$$\overline{Nu} = 1 + 1,44 \left[1 - \frac{1708}{Ra_L} \right]^+ + \left[\frac{Ra_L^{\frac{1}{3}}}{18} - 1 \right]^+, \quad Ra_L \leq 10^8 \quad (V.535)$$

L'expression $[]^+$ indique que si la quantité entre crochets est négative, il faut la prendre égale à zéro.

Cette formule peut être utilisée pour l'eau et les liquides de faible nombre de Prandtl pour $Ra_L < 10^5$.

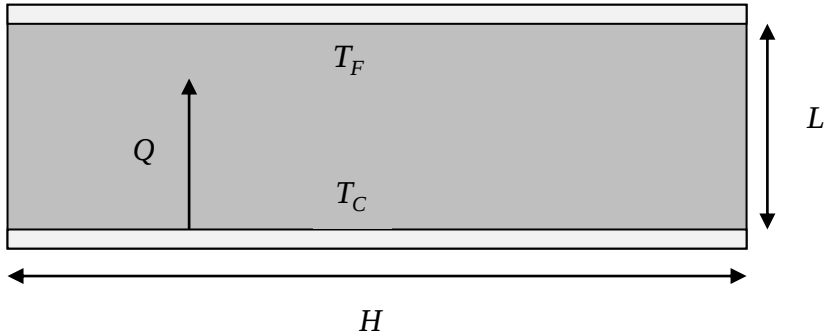


Figure V. 31. Enceinte horizontale avec parois isothermes.

V. 27. 4. 3. 2. Enceintes rectangulaires et inclinées

La convection libre de l'air dans une enceinte rectangulaires inclinées est très présente lors de l'étude des capteurs solaires plans. En effet, l'échange de chaleur dans l'air présent entre la plaque métallique noire et le vitrage qui constitue une enceinte rectangulaire inclinée se fait par convection libre. Si l'enceinte est inclinée d'un angle θ par

rapport au plan horizontal, le nombre de Nusselt moyen est donné par la relation qui est valable avec les conditions $\frac{H}{L} \geq 12$, $0^\circ < \theta < 70^\circ$, $Ra_L < 10^5$.

$$\overline{Nu} = 1 + 1,44 \left[1 - \frac{1708}{Ra_L \cos \theta} \right]^+ \left[1 - \frac{1708 (\sin 1,8\theta)^{1,6}}{Ra_L \cos \theta} \right] + \left[\frac{(Ra_L \cos \theta)^{\frac{1}{3}}}{18} - 1 \right]^+ \quad (V.535)$$

Pour $\frac{H}{L} < 12$, nous définissons un certain angle critique θ_C

dépendant du rapport $\frac{H}{L}$ comme le montre le tableau ci-dessous.

$\frac{H}{L}$	$\theta_C (^\circ)$
1	25
3	53
6	60
12	67
$\succ 12$	70

Tableau V. 9. Valeurs du facteur de correction C pour différentes valeurs du nombre de tubes.

Dans ce cas, le nombre de Nusselt moyen est donné par les formules suivantes

$$\overline{Nu} = \overline{Nu}(\theta = 0^\circ) \left(\frac{\overline{Nu}(\theta = 90^\circ)}{\overline{Nu}(\theta = 0^\circ)} \right)^{\frac{\theta}{\theta_C}} (\sin \theta_C)^{\frac{\theta}{4\theta_C}}, \quad 0^\circ < \theta < \theta_C \quad (\text{V.535})$$

$$\overline{Nu} = \overline{Nu}(\theta = 90^\circ) (\sin \theta)^{\frac{1}{4}}, \quad \theta_C < \theta < 90^\circ \quad (\text{V.535})$$

$$\overline{Nu} = 1 + (\overline{Nu}(\theta = 90^\circ) - 1) \sin \theta, \quad 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad (\text{V.535})$$

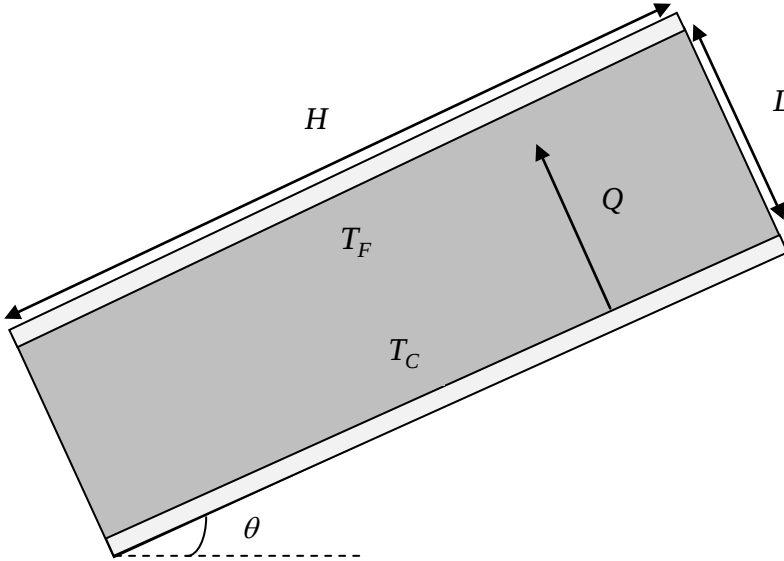


Figure V. 32. Enceinte inclinée avec parois isothermes.

V. 27. 4. 3. 3. Enceintes rectangulaires verticales

Pour des enceintes rectangulaires verticales, le nombre de Nusselt moyen est donné par les relations

$$\overline{Nu} = 0,18 \left(\frac{\text{Pr} Ra_L}{0,2 + \text{Pr}} \right)^{0,29}, \quad \begin{cases} 1 \prec \frac{H}{L} \prec 2 \\ \frac{\text{Pr} Ra_L}{0,2 + \text{Pr}} \succ 10^3 \\ 0 \prec \text{Pr} \prec \infty \end{cases} \quad (\text{V.535})$$

$$\overline{Nu} = 0,22 \left(\frac{\text{Pr} Ra_L}{0,2 + \text{Pr}} \right)^{0,28} \left(\frac{H}{L} \right)^{-\frac{1}{4}}, \quad \begin{cases} 2 \prec \frac{H}{L} \prec 10 \\ Ra_L \prec 10^{10} \\ 0 \prec \text{Pr} \prec \infty \end{cases} \quad (\text{V.535})$$

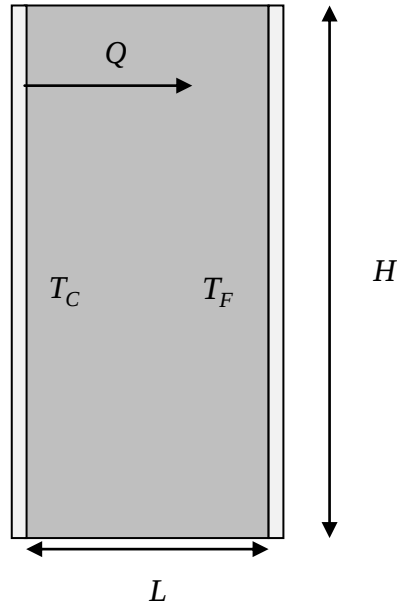


Figure V. 33. Enceinte verticale avec parois isothermes.

Si le rapport $\frac{H}{L}$ est très grand, nous pouvons utiliser les relations suivantes

$$\overline{Nu} = 0,42 Ra_L^{\frac{1}{4}} Pr^{0,012} \left(\frac{H}{L} \right)^{-0,3}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 10 \prec \frac{H}{L} \prec 40 \\ 10^4 \prec Ra_L \prec 10^7 \\ 1 \prec Pr \prec 2.10^4 \end{array} \right. \quad (V.535)$$

$$\overline{Nu} = 0,42 Ra_L^{\frac{1}{3}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \prec \frac{H}{L} \prec 40 \\ 10^6 \prec Ra_L \prec 10^9 \\ 1 \prec Pr \prec 20 \end{array} \right. \quad (V.535)$$

Rayonnement thermique

1. Introduction

Le transfert de chaleur s'effectue selon trois modes différents qui sont la conduction, la convection et le rayonnement thermique. Quand un gradient de température existe au sein d'un milieu immobile qui peut être un solide ou un fluide, nous utilisons le terme de conduction pour faire allusion au transfert de chaleur qui s'effectue à travers le milieu. Le terme de convection fait référence au mode de transfert de chaleur entre une surface solide et un fluide en mouvement ou entre deux fluides en mouvements quand un gradient de température existe. Le troisième mode de transfert de chaleur concerne le rayonnement thermique. Toute surface solide ou fluide émet un rayonnement thermique sous forme d'ondes électromagnétiques (lumière) qui voyage sans support matériel dans l'espace environnant.

La conduction est le processus par lequel la chaleur est transmise dans un système solide de sa région chaude vers sa région froide ou entre deux systèmes en contact (l'un chaud et l'autre froid). Ce transfert d'énergie se transmet par les vibrations des molécules du système autour de leurs positions d'équilibre. D'après la théorie cinétique, l'énergie ou la vitesse des molécules est proportionnelle à la température. Donc, en allant vers les régions de basses températures les molécules cèdent une partie de leurs énergies par des chocs élastiques ou par diffusion des électrons (cas des métaux).

La conduction tente à équilibrer la température au sein du système mais le processus continue si une différence de température est maintenue

$$\vec{q} = -\lambda S \vec{\nabla} T(M, t) \quad (\text{VI.1})$$

Lors du transfert de chaleur entre un fluide et un solide ou entre deux fluides, la quantité de chaleur échangée est donnée par la formule de Newton

$$Q = \bar{h}S (T_p - T_\infty) \quad (\text{VI.2})$$

où $\bar{h}$ est le coefficient de transfert convectif moyen, T_p et T_∞ sont respectivement les températures de la surface et du fluide et S est la surface d'échange. Toute surface à la température T_p émet un rayonnement qu'on appelle rayonnement thermique pourvu que cette température soit différente du zéro absolu. Cette quantité de chaleur se calcul à partir de la formule

$$Q \propto T^4 \quad (\text{VI.3})$$

Si la surface à la température T_p est entourée d'un milieu infini de température T_∞ , la quantité de chaleur nette échangée est

$$Q \propto (T_p^4 - T_\infty^4) \quad (\text{VI.4})$$

2. Nature du rayonnement thermique

L'énergie du rayonnement thermique consiste d'ondes électromagnétiques ou de particules sans masse appelées photons. Dans la nature, aucun modèle de description de l'énergie du rayonnement n'est capable de décrire à lui seul tous les phénomènes observés. Les ondes électromagnétiques ou les photons se propagent dans n'importe quel milieu à la célérité c appelée célérité de la lumière. La célérité de la lumière dépend du milieu dans lequel elle se propage, elle est liée à la célérité dans le vide c_0 par la formule

$$c = \frac{c_0}{n} \quad (\text{VI.5})$$

où n est l'indice de réfraction du milieu et $c_0 = 2,998.10^8 \text{ ms}^{-1}$. Par définition l'indice de réfraction du vide est $n=1$. Pour les gaz

à la température ambiante, l'indice de réfraction est proche de l'unité, pour l'air, sa valeur est $n = 1,00029$ pour la lumière visible. La lumière se propage plus lentement dans les diélectriques, qui ont un indice de réfraction compris entre 1,4 et 4 et ne pénètre pratiquement pas dans les conducteurs. Toute onde électromagnétique est caractérisée soit par sa fréquence ν , sa fréquence angulaire ω , sa longueur d'onde λ ou son nombre d'onde η . Ces différentes grandeurs sont reliées par la relation

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} = c\eta \quad (\text{VI.6})$$

Si nous considérons l'aspect corpusculaire de la lumière, chaque photon transporte alors une énergie ε donnée par la relation

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (\text{VI.7})$$

où h est la constante de Planck dont la valeur est

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} \quad (\text{VI.8})$$

La fréquence d'une onde électromagnétique ne change pas quand elle passe d'un milieu à un autre puisque l'énergie du photon doit être conservée, mais sa longueur d'onde change puisque l'indice de réfraction change d'un milieu à un autre. La figure suivante montre le spectre des ondes électromagnétiques. Notons que le rayonnement thermique est compris entre $\lambda = 0,1 \mu\text{m}$ et $\lambda = 100 \mu\text{m}$, il couvre ainsi la partie visible du spectre électromagnétique.

Quand une onde électromagnétique tombe sur une surface solide ou liquide, l'onde peut être réfléchiée partiellement ou totalement et la partie non-réfléchiée pénètre dans le milieu, et en traversant le milieu, l'onde continue à être atténuée. Si l'onde est complètement absorbée, le milieu est dit opaque. Si l'onde traverse le milieu sans atténuation, le milieu est considéré comme transparent ou semi-transparent si l'atténuation est partielle.

Une surface complètement opaque qui ne réfléchit aucune onde est appelée surface absorbante parfaite ou surface noire. Une surface qui ne réfléchit aucune radiation ne peut pas être vue, elle apparaît noire à nos yeux et de ce fait elle absorbe le maximum des radiations qui lui tombent dessus.

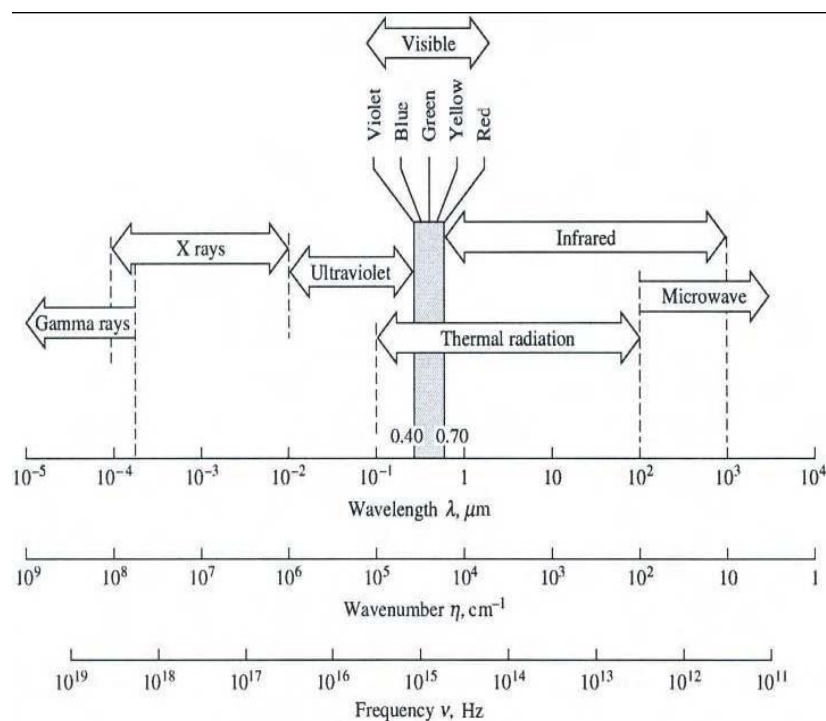


Figure VI. 1. Spectre des ondes électromagnétiques.

Considérons une enceinte dont la paroi interne est noire, thermiquement isolée à l'extérieur et contenant un petit objet noir. Avec le temps, en vertu du deuxième principe de la thermodynamique, l'enceinte et le petit objet atteignent la même température d'équilibre. Cela veut dire que chaque surface que ce

soit de l'enceinte ou du petit objet émette autant de radiation qu'elles en absorbent. Mais comme leurs surfaces sont noires, elles absorbent le maximum de radiation et par conséquent elles émettent aussi le maximum de radiation.

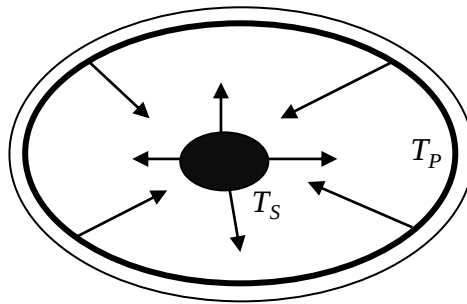


Figure VI. 2. Enceinte en équilibre avec un corps.

Lors de l'étude des interactions entre les radiations et les corps, nous faisons toujours intervenir la notion de corps noir. Ainsi, un corps noir est une surface qui absorbe et émet le maximum de radiation dans toutes les directions.

3. Lois fondamentales du rayonnement thermique

3. 1. Définitions

3. 1. 1. Angle solide

Par analogie avec l'angle formé par deux droites dans un plan, que l'on mesure en radians, par la longueur de l'arc intercepté sur le cercle de rayon unité. Nous mesurons un angle solide Ω en stéradians par l'aire de la surface interceptée par un cône de rayon unité. Un angle solide Ω est donc mesuré en stéradians par le rapport $\frac{S}{R^2}$ de la surface interceptée sur une sphère de rayon R au carré de ce rayon. En effet, l'angle solide Ω autour d'un point P situé sur un plan est

$$\Omega = \frac{S}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \quad (\text{VI.9})$$

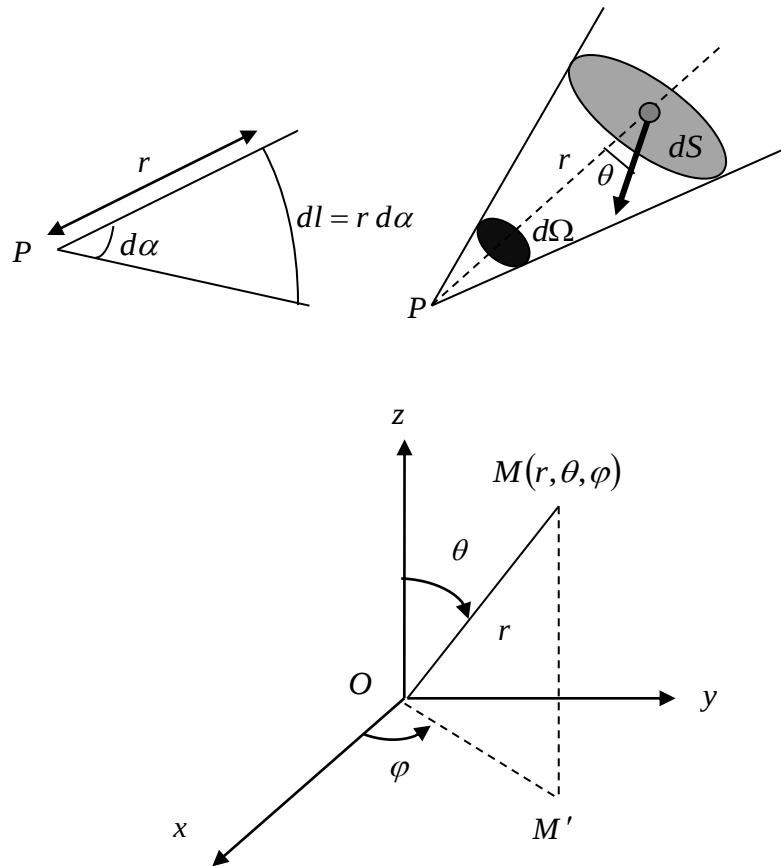


Figure VI. 3. Définitions de l'angle plan, l'angle solide et des coordonnées sphériques.

Un élément de surface dS suffisamment petit pour pouvoir être considéré comme plan, et tout entier situé à une distance r d'un point P , est vu de ce point P sous un angle solide $d\Omega$ tel que

$$d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} \quad (\text{VI.10})$$

ici α est l'angle du vecteur normal à l'élément de surface dS avec la direction joignant le point P au centre de l'élément de surface dS . En effet, si nous désignons par dS_p la projection de la surface dS sur la sphère de centre P , nous pouvons écrire

$$d\Omega = \frac{dS_p}{r^2} = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} \quad (\text{VI.11})$$

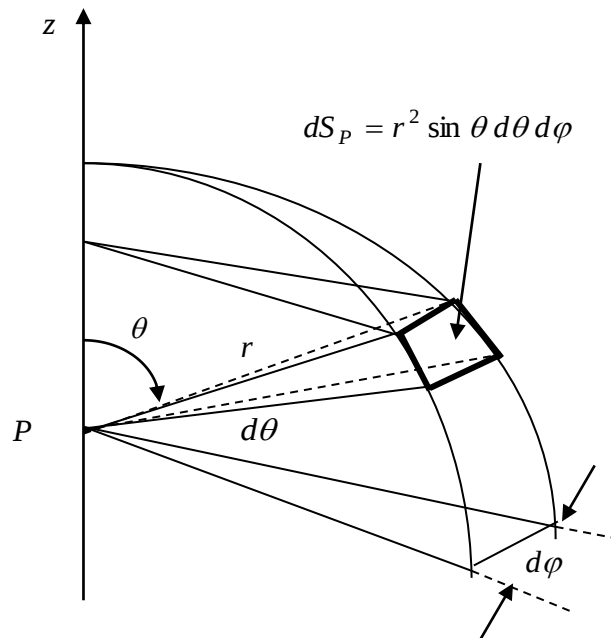


Figure VI. 4. Angle solide en coordonnées sphériques.

Si nous, nous remplaçons l'expression de la surface dS_p dans la définition de l'angle solide $d\Omega$, nous obtenons

$$d\Omega = \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{VI.12})$$

L'angle solide sous lequel un hémisphère est vu est

$$\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = 2\pi \quad (\text{VI.13})$$

3. 1. 2. Relation entre intensité radiative et émission de rayonnement

Considérons une émission dans une direction particulière d'une surface élémentaire dS_0 comme la montre la figure ci-dessous.

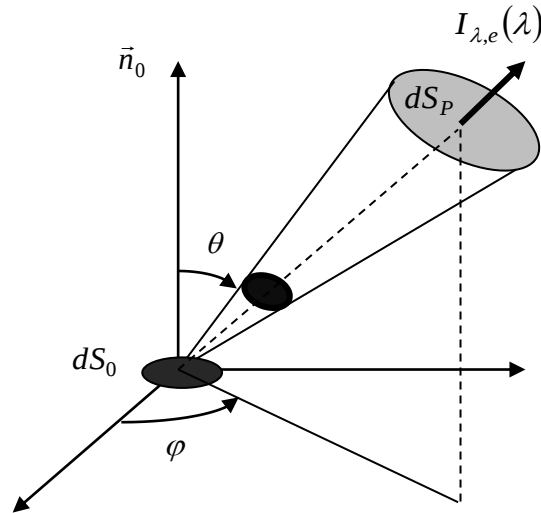


Figure VI. 5. Emission de rayonnement dans l'angle solide $d\Omega$.

Cherchons le taux avec lequel l'émission à partir de la surface dS_0 passe à travers la surface dS_p . Cette quantité peut être exprimée en termes d'intensité spectrale $I_{\lambda,e}$ du rayonnement émis. Formellement, nous définissons l'intensité spectrale $I_{\lambda,e}$ comme le

taux avec le quel l'énergie rayonnante est émise à la longueur d'onde λ dans la direction (φ, θ) par unité de surface de la surface émettrice normale à cette direction, par angle solide unité autour de cette direction et par intervalle unité de longueur d'onde $d\lambda$ autour de la longueur d'onde λ .

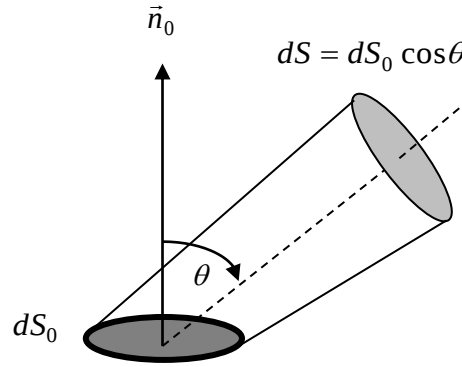


Figure VI. 6. Projection de la surface dS_0 dans la direction θ .

Mathématiquement, l'intensité $I_{\lambda,e}$ est

$$I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) = \frac{dq}{dS_0 \cos \theta d\Omega d\lambda} \quad (\text{VI.14})$$

où $dq_\lambda = \frac{dq}{d\lambda}$ est le taux avec le quel le rayonnement à la longueur d'onde λ quitte la surface dS_0 et passe à travers la surface dS . Notons que l'unité de l'intensité spectrale $I_{\lambda,e}$ est $W/m^2 \text{sr} \mu m$. L'équation VI. 14 peut être réécrite sous la forme

$$dq_\lambda = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) dS_0 \cos \theta d\Omega \quad (\text{VI.15})$$

Cette relation nous permet de calculer le taux avec le quel le rayonnement émis par une surface se propage dans une région de

l'espace définie par l'angle solide $d\Omega$ autour de la direction (θ, φ) . Mais pour calculer ce taux, il faut connaître l'intensité spectrale $I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi)$ du rayonnement émis. Introduisons une nouvelle grandeur dq'_λ définie comme le flux spectral du rayonnement associé à la surface émettrice dS_0 , en effet, nous pouvons écrire

$$dq'_\lambda = \frac{dq_\lambda}{dS_0} \quad (\text{VI.16})$$

de la relation VI. 15, nous avons

$$dq'_\lambda = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta d\Omega \quad (\text{VI.17})$$

en utilisons la relation VI. 12, nous obtenons

$$dq'_\lambda = I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{VI.18})$$

3. 1. 3. Pouvoir émissif

Le pouvoir émissif hémisphérique E_λ est défini comme le taux avec le quel le rayonnement de longueur d'onde λ est émis dans toutes les directions d'une surface par unité d'intervalle de longueur d'onde autour de λ et par unité de surface. Par conséquent, le pouvoir émissif hémisphérique E_λ est le flux de chaleur spectral associé à l'émission dans un hémisphère hypothétique autour de la surface dS_0 . Ce pouvoir émissif hémisphérique est donné par la relation

$$E_\lambda(\lambda) = q'_\lambda(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{VI.19})$$

Notons que le pouvoir émissif hémisphérique E_λ est associé à la surface dS_0 , par contre l'intensité $I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi)$ est associée à la surface projetée $dS = dS_0 \cos \theta$. Le pouvoir émissif hémisphérique

total E est le taux avec lequel le rayonnement est émis par unité de surface dans toutes les directions et avec toutes les longueurs d'onde possible. Par conséquent, nous devons avoir

$$E = \int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda) d\lambda \quad (\text{VI.20})$$

ou bien

$$E = \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi d\lambda \quad (\text{VI.21})$$

Le terme pouvoir émissif implique que l'émission du rayonnement est dans toutes les directions, il est possible dans ce cas d'oublier le mot hémisphérique. Dorénavant, nous utilisons tout simplement les termes pouvoir émissif spectral et pouvoir émissif total. Généralement, la distribution directionnelle de l'émission du rayonnement dépend de la nature de la surface émettrice, mais il existe un cas spécial qui est le cas d'une surface émettrice dite diffuse. Ainsi, pour une surface émettrice diffuse, l'intensité du rayonnement émis $I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi)$ ne dépend pas de la direction, c'est-à-dire que $I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) = I_{\lambda,e}(\lambda)$. Dans ce cas, l'équation VI. 21 s'écrit

$$E_{\lambda}(\lambda) = I_{\lambda,e}(\lambda) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi = \pi I_{\lambda,e}(\lambda) \quad (\text{VI.22})$$

Il en est de même pour le pouvoir émissif total, à partir de l'équation VI. 20, nous obtenons aussi

$$E = \pi I_e \quad (\text{VI.23})$$

3. 1. 4. Irradiation

Après avoir considéré le rayonnement émis par une surface, intéressons-nous maintenant au rayonnement incident sur une surface quelconque. Ce rayonnement incident peut provenir d'émission et de réflexion d'autres surfaces et aura une distribution spectrale et directionnelle déterminé par l'intensité spectrale $I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi)$. Cette quantité est définie comme le taux avec lequel une énergie rayonnante de longueur d'onde tombe dans la direction (θ, φ) par unité de surface réceptrice normale à sa direction par angle solide unité $d\Omega$ autour de cette direction et par unité d'intervalle de longueur $d\lambda$ d'onde autour de la longueur d'onde λ .

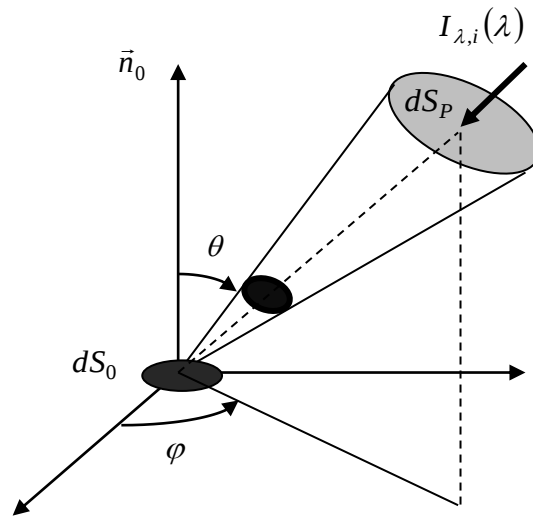


Figure VI. 7. Direction du rayonnement incident.

L'intensité spectrale du rayonnement incident $I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi)$ peut être reliée à un nouveau flux radiatif appelé irradiation qui englobe tous les rayonnements incidents de toutes les directions. L'irradiation spectrale $G_\lambda(\lambda, \theta, \varphi)$ définit le taux de rayonnement de longueur

d'onde λ incident sur l'unité de surface par unité d'intervalle de longueur d'onde $d\lambda$ autour de la longueur d'onde λ . Par conséquent, l'irradiation $G_\lambda(\lambda, \theta, \varphi)$ est définie par la relation

$$G_\lambda(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{VI.24})$$

Si nous considérons l'irradiation totale G qui est le taux de rayonnement incident sur une surface, venant de toutes les directions et englobant toutes les longueurs d'onde, nous pouvons écrire alors

$$G = \int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda \quad (\text{VI.25})$$

en tenant compte de la relation VI. 24, nous obtenons

$$G = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi d\lambda \quad (\text{VI.26})$$

Si le rayonnement incident est diffus, l'intensité $I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi)$ sera indépendante de la direction et par conséquent, nous obtenons

$$G_\lambda(\lambda) = \pi I_{\lambda,i}(\lambda) \quad (\text{VI.27})$$

et

$$G = \pi I_i \quad (\text{VI.28})$$

3. 1. 5. Radiosité

La radiosité englobe tous les rayonnements émis par une surface. Ce rayonnement tient compte du rayonnement réfléchi par la

surface en plus du rayonnement directement émis par cette même surface.

La radiosité spectrale $J_\lambda(\lambda, \theta, \varphi)$ représente le taux avec le quel l'énergie rayonnante de longueur d'onde quitte dans la direction (θ, φ) une surface unité par unité d'intervalle de longueur $d\lambda$ d'onde autour de la longueur d'onde λ .

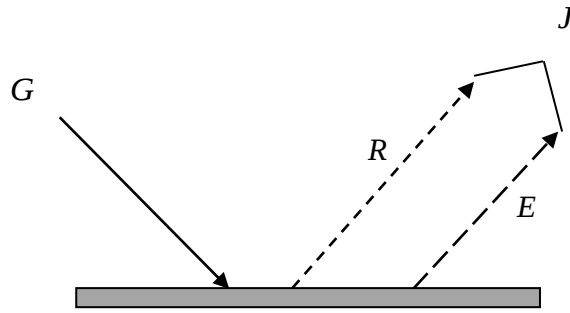


Figure VI. 8. Radiosité d'une surface.

Si nous désignons par $I_{\lambda, e+r}(\lambda, \theta, \varphi)$ l'intensité spectrale du rayonnement émis plus le rayonnement réfléchi par la surface, nous pouvons écrire alors

$$J_\lambda(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda, e+r}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{VI.29})$$

la radiosité totale J est

$$J = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda, e+r}(\lambda, \theta, \varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi d\lambda \quad (\text{VI.30})$$

Si la surface est un émetteur diffus et un réflecteur diffus, nous pouvons écrire que

$$J_{\lambda}(\lambda) = \pi I_{\lambda, e+r}(\lambda) \quad (\text{VI.31})$$

et

$$J = \pi I_{e+r} \quad (\text{VI.32})$$

4. Équations de Maxwell et ondes électromagnétiques

4. 1. Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont déduites des quatre lois suivantes

- a) La loi de Gauss : le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge électrique totale englobée divisée par la permittivité du vide.
- b) L'inexistence de monopôles magnétiques fait que le flux du champ magnétique, à travers n'importe quelle surface fermée, est nul.
- c) Loi de Faraday-Henry : la force électromotrice générée autour d'un circuit fermé est égale à moins la variation dans le temps du flux du champ magnétique à travers le circuit fermé.
- d) Loi d'Ampère-Maxwell : la circulation du champ magnétique autour d'un circuit fermé est proportionnelle à la somme de tous les courants qui traverse le circuit.

Considérons deux charges électriques q_1 et q_2 localisées dans l'espace aux points P_1 et P_2 . En vertu de la loi de Coulomb, la force F_{12} qui agit sur la charge électrique q_2 est

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (\text{VI.33})$$

où $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ sont les vecteurs positions des points P_1 et P_2 par rapport à un repère cartésien dans l'espace, et ε_0 est la permittivité du vide.

Si nous considérons N charges électriques $q_1, \dots, q_N$ localisées dans l'espace aux points $P_1, \dots, P_N$ de vecteurs positions $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$, la force $\vec{F}$ qui agit sur une charge électrique test q de vecteur position $\vec{r}$ est

$$\vec{F} = q \sum_{i=1}^{i=N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (\text{VI.34})$$

Introduisons un champ vectoriel $\vec{E}(\vec{r})$ appelé champ électrique, tel que la force qui agit sur la charge électrique test q s'écrit

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}) \quad (\text{VI.35})$$

dans ce cas, le champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ s'écrit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (\text{VI.36})$$

Pour une charge électrique singulière, le champ électrique est

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (\text{VI.37})$$

Supposons maintenant qu'au lieu d'avoir des charges électriques discrètes, nous avons une certaine distribution continue de charge électrique représentée par la densité de charge volumique $\rho(\vec{r})$. La charge électrique à un point P de vecteur position $\vec{r}'$ est $\rho(\vec{r})dV$ où dV est l'élément de volume autour du point P . Le champ électrique créé par cette distribution de charge s'écrit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \quad (\text{VI.38})$$

Considérons une charge électrique q placée à l'origine. Le champ électrique créé par cette charge est radial et a une symétrie sphérique autour de l'origine. Si nous prenons une sphère de rayon r autour de la charge électrique, le flux du champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ à travers la surface de la sphère est

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_S E_r dS = E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{VI.39})$$

À partir du théorème d'Ostrogradski, nous avons

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV \quad (\text{VI.40})$$

d'où

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{VI.41})$$

où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur nabla. Si au lieu d'avoir une charge électrique q , nous avons une densité de charge volumique $\rho(\vec{r})$, la formule VI. 41 s'écrit

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (\text{VI.42})$$

soit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (\text{VI.43})$$

Les lignes du champ magnétiques $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sont toujours des lignes fermées du fait qu'ils n'existent pas de monopôles magnétiques. Par conséquent, le flux du champ magnétique à travers n'importe

quelle surface traversée par les lignes du champ magnétique est nul, d'où

$$\int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = - \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}_1 dS + \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}_1 dS = 0 \quad (\text{VI.44})$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradski, nous avons

$$\int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) dV \quad (\text{VI.45})$$

d'où

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{VI.46})$$

D'après la loi de Faraday-Henry, la force électromotrice $V(t)$ est

$$V(t) = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (\text{VI.47})$$

Mais nous savons que la force électromotrice générée autour du circuit fermé est la circulation du champ électrique autour de ce circuit

$$V(t) = \int_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} \quad (\text{VI.48})$$

En éliminant la force électromotrice entre les relations VI. 47 et VI. 48, nous obtenons

$$\int_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (\text{VI.49})$$

Si nous utilisons le théorème de Stokes

$$\int_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (\text{VI.50})$$

l'équation VI. 49 s'écrit

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \bullet d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \bullet d\vec{S} \quad (\text{VI.51})$$

d'où

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{VI.52})$$

D'après la loi d'Ampère-Maxwell, la circulation du champ magnétique est

$$\int_C \vec{B}(\vec{r}, t) \bullet d\vec{l} = \mu_0 I(t) \quad (\text{VI.53})$$

où μ_0 est la perméabilité du vide et $I(t)$ est la somme de tous les courants qui traversent le circuit. Le courant électrique I peut être écrit sous la forme

$$I(t) = \int_S \vec{j} \bullet d\vec{S} + \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \bullet d\vec{S} \quad (\text{VI.54})$$

En combinant, ces deux équations, nous obtenons

$$\int_C \vec{B}(\vec{r}, t) \bullet d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \bullet d\vec{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \bullet d\vec{S} \quad (\text{VI.55})$$

avec le théorème de Stokes, cette relation s'écrit

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{VI.56})$$

Maintenant, résumons les équations de Maxwell

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} \quad (\text{VI.57})$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{VI.58})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{VI.59})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{VI.60})$$

Si nous nous plaçons dans le vides où $\rho(\vec{r}, t) = 0$ et $\vec{j} = 0$, les équations de Maxwell deviennent

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{VI.61})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{VI.62})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{VI.63})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{VI.64})$$

Si nous faisons le produit vectoriel de l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ par l'équation VI. 63, nous obtenons

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t)) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t))}{\partial t} \quad (\text{VI.65})$$

À partir de l'identité vectorielle

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t)) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)) - \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (\text{VI.66})$$

l'équation VI. 65 s'écrit

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)) - \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t))}{\partial t} \quad (\text{VI.67})$$

mais comme $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$, nous obtenons

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t))}{\partial t} \quad (\text{VI.68})$$

en y rapportant la relation VI. 64, il vient

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{VI.69})$$

Avec la même procédure, nous obtenons une équation similaire pour le champ magnétique

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{VI.70})$$

Si nous écrivons l'équation VI. 69 sous la forme

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{VI.71})$$

Équation ayant la forme d'une équation d'onde

$$\Delta f(\vec{r}, t) = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{VI.72})$$

équation différentielle qui décrit la propagation de la grandeur $f(\vec{r}, t)$ comme une onde avec la vitesse C . Ainsi, les champs électrique et magnétique qui obéissent aux équations VI. 69 et VI. 70 se propagent comme des ondes avec la vitesse

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (\text{VI.73})$$

Si nous prenons les valeurs numériques de $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ NA}^2$, nous obtenons pour la vitesse c_0 la valeur

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} \quad (\text{VI.74})$$

qui n'est rien d'autre que la vitesse de la lumière dans le vide. Cette analogie poussa Maxwell à supposer que la lumière est la propagation de deux ondes formées, l'une par un champ électrique et l'autre par un champ magnétique, c'est ce que nous appelons une onde électromagnétique

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{VI.75})$$

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{VI.76})$$

Les ondes électromagnétiques monochromatiques dites planes sont décrites par les expressions suivantes

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{M} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{VI.77})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{N} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{VI.78})$$

où $\omega = 2\pi\nu$ et $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ sont respectivement la fréquence angulaire et le module du vecteur d'onde $\vec{k}$. Ecrivons ces équations sous la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{M} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.79})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{N} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.80})$$

En posons que $\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{M} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ et $\vec{B}_0(\vec{r}) = \vec{N} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, nous pouvons alors décrire une onde électromagnétique monochromatique plane par les relations

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.81})$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.82})$$

En substituant ces expressions dans les équations VI. 69 et VI. 70, nous obtenons

$$\Delta(\vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 (\vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t})}{\partial t^2} \quad (\text{VI.83})$$

$$\Delta(\vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 (\vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t})}{\partial t^2} \quad (\text{VI.84})$$

soient

$$\Delta \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} = -\frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.85})$$

$$\Delta \vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} = -\frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{B}_0(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.86})$$

et en simplifiant par $e^{-i\omega t}$, nous arrivons aux équations

$$\Delta \vec{E}_0(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{E}_0(\vec{r}) = 0 \quad (\text{VI.87})$$

$$\Delta \vec{B}_0(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{B}_0(\vec{r}) = 0 \quad (\text{VI.88})$$

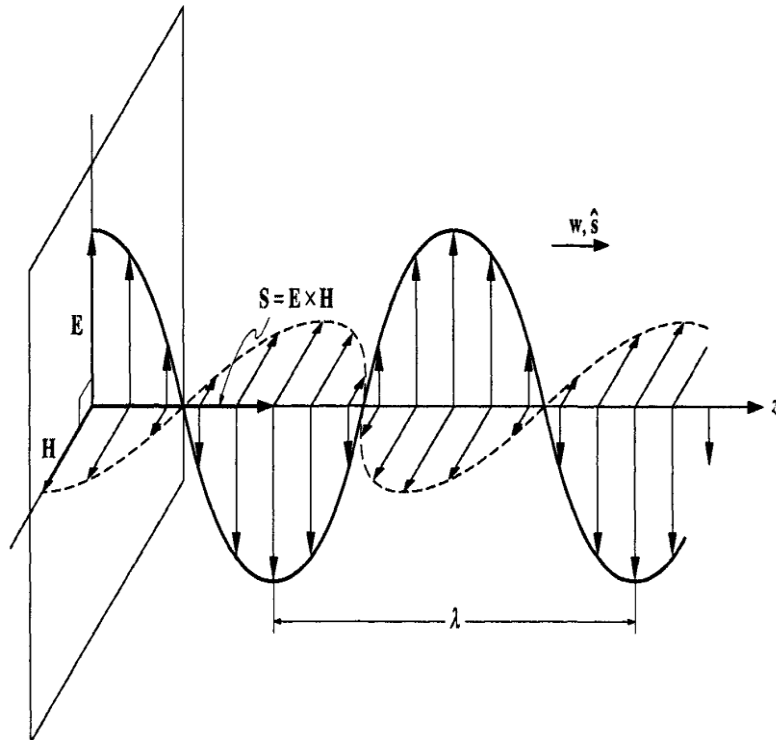


Figure VI. 9. Onde électromagnétique plane.

Reprenons l'équation $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{M}e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ et en calculant $\vec{\nabla} \bullet \vec{E}(\vec{r}, t)$, nous obtenons

$$\vec{\nabla} \bullet (\vec{M}e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) = i\vec{k} \bullet \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (\text{VI.89})$$

de même pour $\vec{\nabla} \bullet \vec{B}(\vec{r}, t)$

$$\vec{\nabla} \bullet (\vec{N}e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) = i\vec{k} \bullet \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (\text{VI.90})$$

A partir des deux premières équations de Maxwell, $\vec{\nabla} \bullet \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$ et $\vec{\nabla} \bullet \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$, nous déduisons que

$$\vec{k} \bullet \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{VI.91})$$

$$\vec{k} \bullet \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{VI.92})$$

Ces deux relations montrent que le vecteur d'onde $\vec{k}$ est perpendiculaire au vecteur champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et au vecteur champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ et par conséquent, les champs électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sont aussi perpendiculaires entre eux.

4. 2. Ondes électromagnétiques stationnaires dans une cavité

Considérons une enceinte métallique de côtés L_1 , L_2 et L_3 à la température T . Chaque paroi émet des radiations électromagnétiques (rayonnement thermique) qui se réfléchissent sur les autres parois et forment un ensemble d'ondes électromagnétiques stationnaires. Les champs électriques des ondes électromagnétiques stationnaires dans cette enceinte dans les directions Ox , Oy et Oz sont

$$E_x(x, y, z, t) = E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \sin 2\pi \nu t \quad (\text{VI.93})$$

$$E_y(x, y, z, t) = E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \sin 2\pi \nu t \quad (\text{VI.94})$$

$$E_z(x, y, z, t) = E_{0z} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \sin 2\pi \nu t \quad (\text{VI.95})$$

où E_{0x} , E_{0y} et E_{0z} sont les amplitudes du champ électrique dans les directions Ox , Oy et Oz , et k_x , k_y et k_z sont les projections du vecteur nombre d'onde $\vec{k}$.

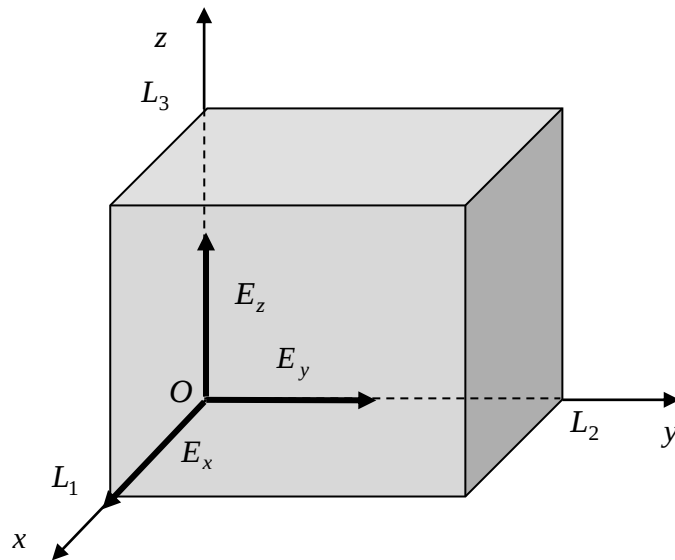


Figure VI. 10. Cavité contenant des ondes électromagnétiques.

Si nous considérons l'onde selon l'axe Ox par exemple, nous remarquons, que l'onde a une amplitude sinusoïdale $E_{0x} \sin k_x x$ qui oscille dans le temps comme un oscillateur harmonique avec une fréquence ν . Sur les parois de la cavité, les conditions aux limites sont telles que les composantes du champ tangentielles aux parois s'annulent.

Pour les parois perpendiculaires à l'axe Ox , les composantes tangentielles du champ électrique sont $E_y(x, y, z, t)$ et $E_z(x, y, z, t)$. En effet, nous pouvons écrire

$$E_y(0, y, z, t) = E_{0y} \sin k_x 0 \cos k_y y \sin k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.96})$$

$$E_y(L_1, y, z, t) = E_{0y} \sin k_x L_1 \cos k_y y \sin k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.97})$$

$$E_z(0, y, z, t) = E_{0z} \sin k_x 0 \sin k_y y \cos k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.98})$$

$$E_z(L_1, y, z, t) = E_{0z} \sin k_x L_1 \sin k_y y \cos k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.99})$$

Nous remarquons que pour $x = 0$, les champs $E_y(x, y, z, t)$ et $E_z(x, y, z, t)$ s'annulent, c'est le premier nœud, un deuxième nœud aussi existe pour $x = L_1$ si la condition suivante est satisfaite

$$k_x L_1 = n_x \pi \quad (\text{VI.100})$$

Nous pouvons écrire les mêmes conditions pour les deux faces perpendiculaires à l'axe Oy , à savoir

$$E_x(x, 0, z, t) = E_{0x} \cos k_x x \sin k_y 0 \sin k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.101})$$

$$E_x(x, L_2, z, t) = E_{0x} \cos k_x x \sin k_y L_2 \sin k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.102})$$

$$E_z(x, 0, z, t) = E_{0z} \sin k_x x \sin k_y 0 \cos k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.103})$$

$$E_z(x, L_2, z, t) = E_{0z} \sin k_x x \sin k_y L_2 \cos k_z z \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.104})$$

Nous déduisons le deuxième nœud à partir de la condition

$$k_y L_2 = n_y \pi \quad (\text{VI.105})$$

Pour les faces perpendiculaires à l'axe Oz , nous écrivons

$$E_x(x, y, 0, t) = E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z 0 \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.106})$$

$$E_x(x, y, L_3, t) = E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z L_3 \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.107})$$

$$E_y(x, y, 0, t) = E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z 0 \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.108})$$

$$E_y(x, y, L_3, t) = E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z L_3 \sin 2\pi \nu t = 0 \quad (\text{VI.109})$$

Nous déduisons le deuxième nœud à partir de la condition

$$k_z L_3 = n_z \pi \quad (\text{VI.110})$$

En résumé, nous avons obtenus trois conditions pour avoir des ondes électromagnétiques stationnaires dans une cavité, ces conditions sont

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L_1}, \quad k_y = \frac{n_y \pi}{L_2}, \quad k_z = \frac{n_z \pi}{L_3} \quad (\text{VI.111})$$

où n_x , n_y et n_z sont des nombres entiers positifs allant de zéro jusqu'à l'infini. Si nous considérons la composante $E_x(x, y, z, t)$ du champ électrique, elle doit impérativement vérifier l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(x, y, z, t)}{\partial z^2} \\ = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 E_x(x, y, z, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{VI.112})$$

en y substituant l'équation VI. 93, nous obtenons

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \quad (\text{VI.113})$$

À partir des relations VI. 111, nous arrivons à

$$\left(\frac{n_x \pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L_2} \right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{L_3} \right)^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \quad (\text{VI.114})$$

Considérons que la cavité est cubique de côté L , et remplaçons la fréquence angulaire ω par la fréquence ν , l'équation VI. 114 devient alors

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{4L^2\nu^2}{c_0^2} \quad (\text{VI.115})$$

Comme les nombres n_x , n_y et n_z prennent des valeurs allant de zéro à l'infinie, ils définissent une infinité d'ondes stationnaires dans la cavité. Remarquons, que si nous considérons un repère défini par les nombres n_x , n_y et n_z , l'équation VI. 115 est l'équation d'une sphère de rayon $\frac{2L\nu}{c_0}$. Nous pouvons considérer

que les variations des nombres n_x , n_y et n_z est continue et dans ce cas, le nombre de modes d'oscillations N_ν sera défini par la relation

$$N_\nu = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2L\nu}{c_0} \right)^3 \quad (\text{VI.116})$$

Le nombre de modes d'oscillations n_ν par unité de volume et par intervalle de fréquence est

$$n_\nu = \frac{1}{V} \frac{dN_\nu}{d\nu} \quad (\text{VI.117})$$

Si nous utilisons la relation $N_\nu = \frac{4\pi L^3 \nu^3}{3c_0^3}$, nous obtenons

$$n_\nu = \frac{1}{L^3} \frac{d\left(\frac{4\pi L^3 \nu^3}{3c_0^3}\right)}{d\nu} = \frac{4\pi \nu^2}{c_0^3} \quad (\text{VI.118})$$

La densité d'énergie électromagnétique u_ν contenue dans le volume de la cavité est

$$u_\nu = 2n_\nu \bar{E} \quad (\text{VI.119})$$

où $\overline{E}$ est l'énergie moyenne de chaque oscillateur contenu dans la cavité, le facteur 2 vient de la polarisation du champ électrique. En injectant la relation dans l'équation VI. 118, nous obtenons alors

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c_0^3} \overline{E} \quad (\text{VI.120})$$

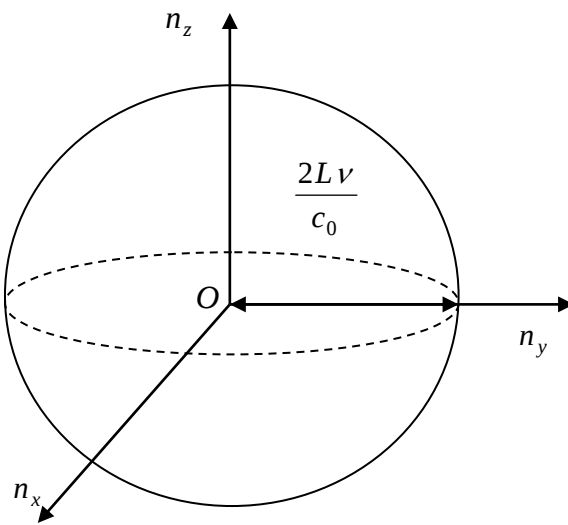


Figure VI. 11. Système de coordonnées n_x , n_y et n_z .

5. Rayonnement d'un corps noir, loi de Planck

5. 1. Notion de corps noir

Un corps noir possède les caractéristiques suivantes :

- Il absorbe tout le rayonnement incident indépendamment de la longueur d'onde et de la direction du rayonnement.
- Pour une température et une longueur d'onde données, aucune ne peut émettre une énergie rayonnante supérieure à celle émise par un corps noir.

- c) Bien que le rayonnement émis par un corps noir soit fonction de la température et de la longueur d'onde, il est indépendant de la direction. Ainsi, le corps noir est un émetteur diffus.

Étant un émetteur et un absorbeur parfait, le corps noir sert comme référence standard de comparaison des propriétés radiatives des surfaces sujettes à l'étude.

Malgré, il est commun d'admettre que certaines surfaces s'approchent d'un corps, aucune surface ne possède ses propriétés spécifiques. L'approche la plus admissible d'un corps noir est une cavité dont la surface interne est maintenue à une température uniforme. Si un rayonnement entre dans la cavité par une petite ouverture, il subira une multitude de réflexions sur la surface interne avant de sortir par la même ouverture, dans ce cas, le rayonnement est presque totalement absorbé et nous réalisons un corps noir. Du point de vu thermodynamique, il est possible d'admettre que le rayonnement qui quitte la cavité ne dépendra que de la température de la paroi interne et correspond au rayonnement d'un corps noir.

Comme l'émission du rayonnement d'un corps noir est diffuse, l'intensité spectrale $I_{\lambda,b}$ émise est surement indépendante de la direction. Le rayonnement cumulé dans la cavité résulte des émissions et réflexions de la paroi interne de la cavité, il doit être de la même nature que le rayonnement sortant par l'ouverture et par conséquent, le rayonnement dans la cavité est aussi un rayonnement de corps noir. Ainsi, pour n'importe quelle portion de la paroi interne de la cavité, nous avons toujours $G_{\lambda}(\lambda, T) = E_{\lambda,b}(\lambda, T)$.

5. 2. Loi de Planck

Nous avons obtenu la densité d'énergie contenue dans le volume d'une cavité contenant un rayonnement électromagnétique, cette densité d'énergie est donnée par la formule

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c_0^3} \bar{E} \quad (\text{VI.121})$$

De la thermodynamique statistique, nous savons que la probabilité de trouver un système N_i à l'état d'énergie E_i est donnée par la ce que nous appelons la distribution de Boltzmann

$$P = Ae^{-\frac{E_i}{kT}} \quad (\text{VI.122})$$

où k est la constante de Boltzmann et E_i est la température absolue du système. Par conséquent, l'énergie moyenne $\bar{E}$ d'un tel système est

$$\bar{E}_i = \frac{\int_0^\infty E_i e^{-\frac{E_i}{kT}} dE_i}{\int_0^\infty e^{-\frac{E_i}{kT}} dE_i} \quad (\text{VI.123})$$

L'hypothèse de Planck est que l'énergie échangée entre les oscillateurs sur la paroi de la cavité d'un corps noir et les ondes électromagnétiques stationnaires qui s'y trouvent se fait par paquets d'énergie discrets appelés quantas donnés par la formule

$$E_n = nh\nu \quad (\text{VI.124})$$

où n est un nombre entier.

Calculons à présent, l'énergie moyenne $\bar{E}$ des oscillateurs se trouvant sur la paroi de la cavité qui constitue le corps noir. Cette énergie moyenne $\bar{E}$ est donnée par la formule où nous avons remplacé l'intégrale par une sommation puisque les énergies E_n sont échangées par paquets discrets $E_n = nh\nu$

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} nh\nu e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}} \quad (\text{VI.125})$$

Si nous posons que $x = \frac{h\nu}{kT}$, la formule précédente s'écrit alors sous la forme

$$\bar{E} = kT \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} nx e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-nx}} = kT \frac{N(x)}{D(x)} \quad (\text{VI.126})$$

où les fonctions $N(x)$ et $D(x)$ sont définies par les expressions suivante

$$N(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} nx e^{-nx} \quad (\text{VI.127})$$

$$D(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-nx} \quad (\text{VI.128})$$

Si nous explicitons la fonction $D(x)$

$$D(x) = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots e^{-nx} \quad (\text{VI.129})$$

nous remarquons qu'elle représente une suite géométrique de raison e^{-x} , par conséquent, nous pouvons écrire la fonction $D(x)$ sous la forme

$$D(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad (\text{VI.130})$$

Explicitement, la fonction $N(x)$ s'écrit

$$N(x) = xe^{-x} + 2xe^{-2x} + 3xe^{-3x} + \dots + nxe^{-nx} \quad (\text{VI.131})$$

ou encore

$$N(x) = x(e^{-x} + 2e^{-2x} + 3e^{-3x} + \dots + ne^{-nx}) \quad (\text{VI.132})$$

cette la fonction $N(x)$ peut être réécrite aussi sous la forme

$$N(x) = -x \frac{d}{dx} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots + e^{-nx}) = -x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} \right) \quad (\text{VI.133})$$

soit

$$N(x) = \frac{xe^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \quad (\text{VI.134})$$

En substituant les expressions des fonctions $N(x)$ et $D(x)$ dans l'équation VI. 126, nous obtenons pour l'énergie moyenne la relation

$$\bar{E} = kT \frac{xe^{-x}(1 - e^{-x})}{(1 - e^{-x})^2} = kT \frac{h\nu}{kT} \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (\text{VI.135})$$

Par conséquent, la densité d'énergie u_ν contenue dans le volume d'une cavité contenant un rayonnement électromagnétique est

$$u_\nu = \frac{8\pi h}{c_0^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (\text{VI.136})$$

Trouvons maintenant, la relation entre la densité d'énergie u_ν et le pouvoir émissif spectral E_ν .

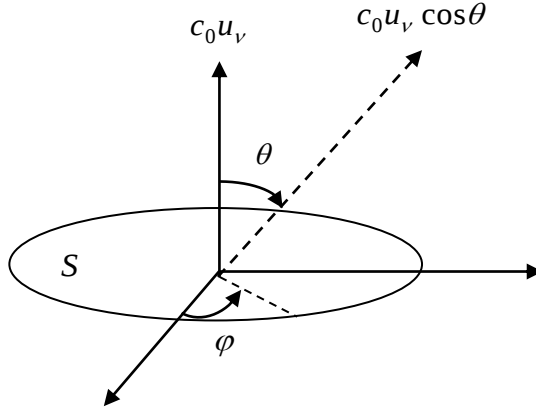


Figure VI. 12. Puissance rayonnée dans la direction θ .

Si nous appelons dP la puissance rayonnée par l'élément de surface dS , l'énergie $dPdt$ rayonnée pendant le temps dt est égale à l'énergie électromagnétique contenue dans le volume dSc_0dt , nous obtenons alors

$$\frac{dP}{dS} = \frac{1}{2} u_v c_0 \cos \theta \quad (\text{VI.137})$$

La puissance rayonnée par unité de surface est à répartir sur toutes les directions possibles, proportionnellement à l'angle solide $d\Omega$, ce qui permet d'écrire

$$E_{v,b} = \frac{\int \frac{dP}{dS} d\Omega}{\int d\Omega} \quad (\text{VI.138})$$

en y substituant les expressions de l'angle solide $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ et la puissance rayonnée par unité de surface $\frac{dP}{dS} = \frac{1}{2} u_v c_0 \cos \theta$, cette relation devient

$$E_{\nu,b} = \frac{1}{2} u_{\nu} c_0 \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (\text{VI.139})$$

en calculant les intégrales, nous aboutissons à la relation

$$E_{\nu,b} = \frac{c_0}{4} u_{\nu} \quad (\text{VI.140})$$

Si nous remplaçons la densité d'énergie u_{ν} par son expression, le pouvoir émissif spectral du corps noir devient

$$E_{\nu,b} = \frac{2\pi h}{c_0^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (\text{VI.141})$$

Généralement, nous utilisons à la place de la fréquence ν la longueur d'onde λ , pour cela écrivons l'expression du pouvoir émissif spectral en fonction de la longueur d'onde λ , en utilisant la relation

$$E_{\lambda,b} = -E_{\nu,b} \frac{d\nu}{d\lambda} \quad (\text{VI.142})$$

d'où

$$E_{\lambda,b} = -\frac{2\pi h}{c_0^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \frac{d\nu}{d\lambda} \quad (\text{VI.143})$$

à partir de la relation $\nu = \frac{c_0}{\lambda}$, nous avons

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c_0}{\lambda^2} \quad (\text{VI.144})$$

Maintenant, en substituant $\frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c_0}{\lambda^2}$ et $\nu = \frac{c_0}{\lambda}$ dans l'équation VI. 141, nous trouvons

$$E_{\lambda,b} = \frac{2\pi h}{c_0^2} \frac{\left(\frac{c_0}{\lambda}\right)^3}{e^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1} \frac{c_0}{\lambda^2} \quad (\text{VI.145})$$

soit

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{2\pi h c_0^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1 \right)} \quad (\text{VI.146})$$

L'intensité spectrale $I_{\lambda,b}(\lambda, T)$ pour un corps noir est par conséquent égale à

$$I_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{2h c_0^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc_0}{\lambda kT}} - 1 \right)} \quad (\text{VI.147})$$

Si nous introduisons les constantes $C_1 = 2\pi h c_0^2$ et $C_2 = \frac{hc_0}{k}$, le pouvoir émissif spectral peut s'écrire sous la forme

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad (\text{VI.148})$$

Cette formule s'appelle la loi de Planck pour le corps noir, connaissant les valeurs de $c_0 = 2,998.10^8 \text{ ms}^{-1}$, $h = 6,626.10^{-34} \text{ Js}$ et $k = 1,381.10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ qui sont respectivement la vitesse de la

lumière dans le vide, la constante de Planck et la constante de Boltzmann, nous obtenons, pour les constantes C_1 et C_2 , les valeurs

$$C_1 = 2\pi hc_0^2 = 3,742 \cdot 10^8 \text{ W}\mu\text{m}^4 \text{m}^{-2} \quad (\text{VI.149})$$

$$C_2 = \frac{hc_0}{k} = 1,439 \cdot 10^4 \mu\text{mK} \quad (\text{VI.150})$$

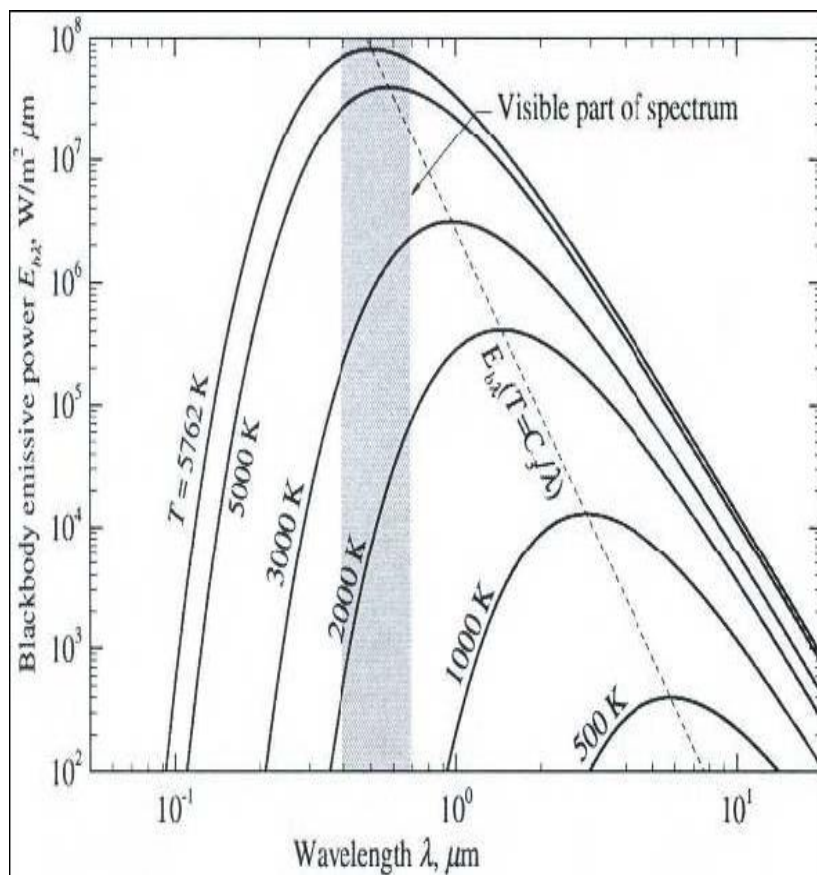


Figure VI. 13. Pouvoir émissif d'un corps noir en fonction de la longueur d'onde.

5. 3. Loi de déplacement de Wien

Nous remarquons que la distribution du pouvoir émissif spectral $E_{\lambda,b}(\lambda, T)$ d'un corps noir admet un maximum à $\lambda_{\max}$ qui dépend de la température T . Pour trouver ce maximum, calculons

$$\frac{dE_{\lambda,b}(\lambda, T)}{d\lambda} = 0 \quad (\text{VI.151})$$

en dérivant la relation VI. 148 par rapport à la longueur d'onde λ nous obtenons

$$\frac{dE_{\lambda,b}(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{-5C_1\lambda^4 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right) + C_1C_2 \frac{\lambda^3}{T} e^{\frac{C_2}{\lambda T}}}{\left(\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right) \right)^2} = 0 \quad (\text{VI.152})$$

d'où

$$-5C_1\lambda^4 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right) + C_1C_2 \frac{\lambda^3}{T} e^{\frac{C_2}{\lambda T}} = 0 \quad (\text{VI.153})$$

en simplifiant et en réarrangeant nous obtenons

$$\lambda T \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right) = \frac{C_2}{5} e^{\frac{C_2}{\lambda T}} \quad (\text{VI.154})$$

Si nous notons par $x = \frac{C_2}{\lambda T}$, cette relation s'écrit alors sous la forme

$$\frac{e^x - 1}{e^x} = \frac{x}{5} \quad (\text{VI.155})$$

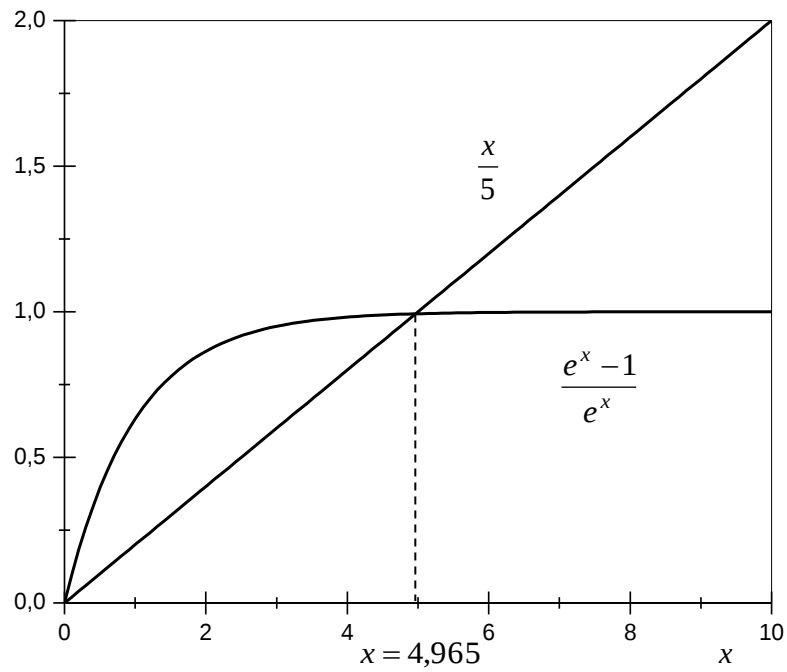


Figure VI. 14. Fonctions $\frac{e^x - 1}{e^x}$ et $\frac{x}{5}$.

Sur la figure VI. 14 nous avons représenté les fonctions $\frac{e^x - 1}{e^x}$ et

$\frac{x}{5}$ leur point d'intersection est la solution de l'équation

$\frac{e^x - 1}{e^x} = \frac{x}{5}$. La valeur x qui correspond à la solution est $x = 4,965$.

Sachant que $x = \frac{C_2}{\lambda T}$, nous pouvons écrire alors

$$\frac{C_2}{\lambda_{\max} T} = 4,965 \quad (\text{VI.156})$$

en y substituant la valeur numérique de la constante C_2 , nous obtenons

$$\lambda_{\max} T = 2898 \mu m K \quad (\text{VI.157})$$

Cette relation s'appelle la loi de déplacement de Wien. Cette loi montre que la longueur d'onde qui correspond à la valeur maximale du pouvoir émissif spectral est inversement proportionnelle à la température absolue du corps noir. Le pouvoir émissif spectral maximal $E_{\lambda_{\max}}(T)$ qui correspond à la longueur maximale $\lambda_{\max}$ est obtenu en injectant la relation VI. 157 dans l'équation VI. 148, soit

$$E_b(\lambda_{\max}, T) = C_3 T^5 \quad (\text{VI.158})$$

Cette relation montre que Le pouvoir émissif spectral maximal $E_{\lambda_{\max}}(T)$ dépend de la puissance cinquième de la température absolue du corps noir.

5. 4. Cas limites de la loi de Planck

Maintenant, étudions les cas limites de la loi de Planck.

Considérons le cas où le terme $\frac{C_2}{\lambda T}$ est très petit devant l'unité,

nous pouvons alors développer le terme $e^{\frac{C_2}{\lambda T}}$ au premier ordre, soit

$$e^{\frac{C_2}{\lambda T}} = 1 + \frac{C_2}{\lambda T} \quad (\text{VI.159})$$

en substituant dans l'équation VI. 148, nous obtenons

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(1 + \frac{C_2}{\lambda T} - 1\right)} = \frac{C_1}{C_2} \frac{T}{\lambda^4} \quad (\text{VI.160})$$

Cette loi s'appelle la loi de Rayleigh-Jeans.

Si maintenant, nous considérons le cas où le terme $\frac{C_2}{\lambda T}$ est très grand devant l'unité, nous pouvons écrire alors que

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}} \quad (\text{VI.161})$$

cette loi s'appelle la loi de Wien.

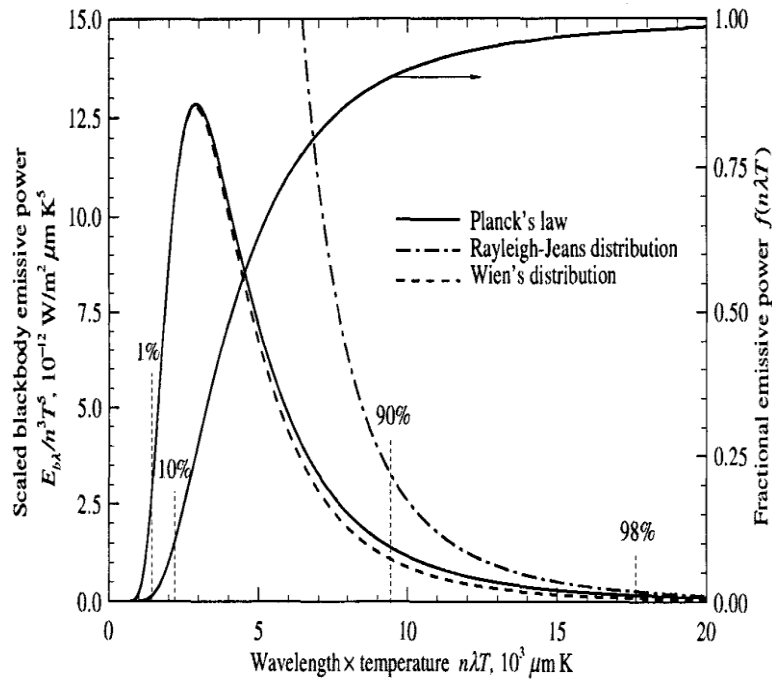


Figure VI. 15. Cas limites de la loi de Planck.

5. 5. Loi de Stefan-Boltzmann

Le pouvoir émissif total d'un corps noir $E_b(T)$ qui est obtenu en intégrant le pouvoir émissif spectral $E_{\lambda,b}(\lambda, T)$ sur toutes les longueurs d'onde possible λ , c'est-à-dire

$$E_b(T) = \int_0^{\infty} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda \quad (\text{VI.162})$$

En utilisant l'équation VI. 148, nous pouvons réécrire cette relation sous la forme

$$E_b(T) = \int_0^{\infty} \frac{C_1 d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad (\text{VI.163})$$

Pour calculer cette intégrale, faisons un changement de variable en posant $x = \frac{C_2}{\lambda T}$, d'où

$$d\lambda = -\frac{C_2}{T} \frac{dx}{x^2} \quad (\text{VI.164})$$

et ainsi, l'intégrale s'écrit

$$E_b(T) = \frac{C_1}{C_2^4} T^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (\text{VI.165})$$

Sachant que l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$ est égale à $\frac{\pi^4}{15}$, nous obtenons

$$E_b(T) = \frac{\pi^4}{15} \frac{C_1}{C_2^4} T^4 \quad (\text{VI.166})$$

Si nous notons le terme constant $\frac{\pi^4}{15} \frac{C_1}{C_2^4}$ par σ , le pouvoir émissif total d'un corps noir, s'écrit alors

$$E_b(T) = \sigma T^4 \quad (\text{VI.167})$$

la constante σ est appelée la constante de Stefan-Boltzmann et elle égale à

$$\sigma = 5,670.10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (\text{VI.168})$$

L'équation VI. 167 est la loi de Stefan-Boltzmann, elle nous permet de calculer la quantité du rayonnement émise dans toutes les directions sur l'ensemble des longueurs d'ondes par un corps noir juste en connaissant sa température.

5. 6. Bandes d'émission

Parfois, il est nécessaire de connaître la fraction du pouvoir émissif total émis par un corps noir dans un certain intervalle de longueurs d'ondes $[0, \lambda]$. Pour une température et un intervalle de longueurs d'ondes donnés $[0, \lambda]$, cette fraction est déterminée à partir de la relation

$$f_{0-\lambda} = \frac{\int_0^{\lambda} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda} \quad (\text{VI.169})$$

en y introduisons l'expression du pouvoir émissif spectral $E_{\lambda,b}(\lambda, T)$, cette relation s'écrit

$$f_{0-\lambda} = \frac{\int_0^\lambda \frac{C_1 d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)}}{\int_0^\infty \frac{C_1 d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)}} = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^\lambda \frac{C_1 d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad (\text{VI.170})$$

La fraction du pouvoir émissif spectral émis dans l'intervalle des longueurs d'ondes $[\lambda_1, \lambda_2]$ est

$$f_{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{\int_0^{\lambda_2} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda - \int_0^{\lambda_1} E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^\infty E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda} = f_{0-\lambda_2} - f_{0-\lambda_1} \quad (\text{VI.171})$$

Si nous faisons le changement de variable $x = \lambda T$, la fraction du pouvoir émissif $f_{\lambda_1-\lambda_2}$ dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ peut-être réécrit sous la forme

$$f_{x_1-x_2} = \frac{C_1}{\sigma} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^5 \left(e^{\frac{C_2}{x}} - 1 \right)} \quad (\text{VI.172})$$

soit

$$f_{x_1-x_2} = f_{0-x_2} - f_{0-x_1} \quad (\text{VI.173})$$

5. 7. Loi de Stefan -Boltzmann à partir de la thermodynamique classique

Considérons une cavité de volume V à la température T et contenant des ondes électromagnétiques dont la densité d'énergie est u . A partir de la théorie électromagnétique de la lumière, la pression du rayonnement P dans la cavité est

$$P = \frac{u}{3} \quad (\text{VI.174})$$

Si U est l'énergie interne de la cavité, nous pouvons écrire alors

$$U = uV \quad (\text{VI.175})$$

À partir du premier principe de la thermodynamique, nous avons

$$dU = -PdV + TdS \quad (\text{VI.176})$$

ou encore

$$TdS = dU + PdV \quad (\text{VI.177})$$

Si nous y introduisons les expressions de l'énergie interne U et de la pression P , il vient alors

$$TdS = d(uV) + \frac{u}{3} dV = Vdu + u dV + \frac{u}{3} dV \quad (\text{VI.178})$$

ou bien

$$TdS = Vdu + \frac{4}{3} u dV \quad (\text{VI.179})$$

d'où l'expression de l'entropie dS

$$dS = \frac{V}{T} du + \frac{4}{3T} u dV \quad (\text{VI.180})$$

Comme la densité d'énergie u des ondes électromagnétiques dans la cavité ne dépend que de la température T , nous pouvons écrire alors

$$du = \frac{du}{dT} dT \quad (\text{VI.181})$$

et dans ce cas, l'équation VI. 180 devient

$$dS = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3T} u dV \quad (\text{VI.182})$$

Puisque l'entropie S est fonction de la température T et du volume V , sa dérivée totale est

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV \quad (\text{VI.183})$$

en comparant les équations VI. 182 et VI. 183, nous obtenons

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} \quad (\text{VI.184})$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{4}{3T} u \quad (\text{VI.185})$$

Sachant que l'entropie S est une fonction d'état, elle doit impérativement vérifier la condition

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} \quad (\text{VI.186})$$

Si nous calculons les fonctions $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}$ et $\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$ en utilisant les relations VI. 184, VI. 185, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V}{T} \frac{du}{dT} \right) = \frac{1}{T} \frac{du}{dT} \quad (\text{VI.187})$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{4}{3T} u \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{T} \frac{du}{dT} - \frac{u}{T^2} \right) \quad (\text{VI.188})$$

Si nous substituons ces expressions dans l'équation VI. 186, nous obtenons

$$\frac{1}{T} \frac{du}{dT} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{T} \frac{du}{dT} - \frac{u}{T^2} \right) \quad (\text{VI.189})$$

équation, qui après simplification devient

$$\frac{4u}{T} = \frac{du}{dT} \quad (\text{VI.190})$$

soit

$$\frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T} \quad (\text{VI.191})$$

La solution de cette équation différentielle à variables séparables est

$$\ln u = \ln C + 4 \ln T \quad (\text{VI.192})$$

ou en éliminant la fonction logarithme

$$u(T) = CT^4 \quad (\text{VI.193})$$

La densité d'énergie u est liée au pouvoir émissif E_b par la relation

$$E_b = \frac{c_0}{4} u \quad (\text{VI.194})$$

ou encore

$$E_b = \frac{c_0 C}{4} T^4 = AT^4 \quad (\text{VI.195})$$

C'est la loi de Stefan-Boltzmann obtenue à partir de la thermodynamique classique.

6. Émission de rayonnement par des surfaces réelles

Ayant développé la notion de corps noir pour décrire les surfaces émettrices idéales, nous considérons à présent le comportement des surfaces réelles. Rappelons que le corps noir est un émetteur idéal et qu'aucune surface ne peut émettre plus de rayonnement à la même température. Par conséquent, le corps noir sert de référence dans la description du rayonnement émis par une surface réelle. Une propriété du rayonnement par une surface réelle connue sous le nom d'émissivité peut être définie comme le rapport du rayonnement émis par une surface réelle quelconque au rayonnement émis par un corps noir à la même température. En général, le rayonnement émis par une surface réelle diffère de rayonnement décrit par la loi de Planck. De même que, la distribution directionnelle diffère de celui d'une émission diffuse. Nous pouvons maintenant, définir l'émissivité spectrale directionnelle $\varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi, T)$ d'une surface réelle à la température T comme le rapport de l'intensité du rayonnement émis à la longueur d'onde λ dans la direction (θ, φ) à l'intensité du rayonnement émis par un corps noir à la même température et la même longueur d'onde. Par conséquent

$$\varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi, T) = \frac{I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi, T)}{I_{\lambda,b}(\lambda, T)} \quad (\text{VI.196})$$

L'absence des variables directionnelles (θ, φ) au dénominateur implique l'intensité du rayonnement est indépendante de la direction ce qui est une caractéristique du rayonnement d'un corps noir. L'émissivité directionnelle totale $\varepsilon_{\theta}(\theta, \varphi, T)$, qui est la moyenne de l'émissivité spectrale directionnelle $\varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi, T)$, est définie par la relation

$$\varepsilon_{\theta}(\theta, \varphi, T) = \frac{I_e(\theta, \varphi, T)}{I_b(T)} \quad (\text{VI.197})$$

L'émissivité spectrale hémisphérique $\varepsilon_\lambda(\lambda, T)$ est définie par

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \frac{E_\lambda(\lambda, T)}{E_{\lambda,b}(\lambda, T)} \quad (\text{VI.198})$$

Si nous utilisons l'expression du pouvoir émissif spectral, nous obtenons

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \varphi, T) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,b}(\lambda, T) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (\text{VI.199})$$

Sachant que l'intensité spectrale $I_{\lambda,b}(\lambda, T)$ du corps noir est indépendante de la direction (θ, φ) , et en utilisons la relation VI. 196, nous pouvons réécrire la relation sous la forme

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \frac{I_{\lambda,b}(\lambda, T) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi, T) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{I_{\lambda,b}(\lambda, T) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (\text{VI.200})$$

soit

$$\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, \varphi, T) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (\text{VI.201})$$

Pour la plus part des surfaces, $\varepsilon_{\lambda, \theta}$ est indépendant de l'angle φ , ainsi en calculant l'intégrale dans le dénominateur, nous obtenons

$$\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, T) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{VI.202})$$

L'émissivité totale hémisphérique qui la moyenne sur toutes les directions possible et la totalité des longueurs d'ondes est

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_b(T)} \quad (\text{VI.203})$$

En utilisons les relations $E = \int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda) d\lambda$ et $\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{E_{\lambda}(\lambda, T)}{E_{\lambda, b}(\lambda, T)}$,

nous trouvons

$$\varepsilon(T) = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) E_{\lambda, b}(\lambda, T) d\lambda}{E_b(T)} \quad (\text{VI.204})$$

7. Absorption, réflexion et transmission de rayonnement par des surfaces réelles

Nous avons déjà défini l'irradiation $G_{\lambda}(\lambda, \theta, \varphi)$ comme le taux du rayonnement de longueur d'onde λ incident sur l'unité de surface

par unité d'intervalle de longueur d'onde $d\lambda$ autour de la longueur d'onde λ .

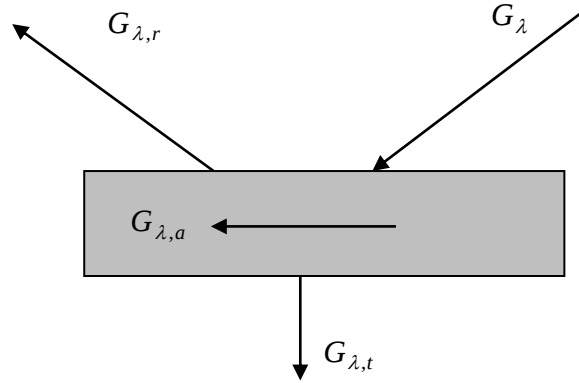


Figure VI. 16. Surface semi-transparente.

Généralement, l'irradiation interagit avec des milieux semi-transparents, par conséquent une partie de ce rayonnement peut être absorbée, réfléchiée ou transmise. Par un simple bilan, nous pouvons affirmer que

$$G_\lambda = G_{\lambda,r} + G_{\lambda,a} + G_{\lambda,t} \quad (\text{VI.205})$$

7. 1. Absorptivité

L'absorptivité détermine la fraction de l'irradiation absorbée par la surface. Comme l'émissivité elle dépend de la direction (θ, φ) et de la longueur d'onde λ . L'absorptivité spectrale directionnelle $\alpha_\lambda(\lambda, \theta, \varphi)$ est définie par la fraction de l'intensité spectrale incidente dans la direction (θ, φ) et absorbée par la surface. Par conséquent

$$\alpha_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi) = \frac{I_{\lambda,a}(\lambda, \theta, \varphi)}{I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi)} \quad (\text{VI.206})$$

L'absorptivité spectrale hémisphérique $\alpha_\lambda(\lambda)$ est défini par

$$\alpha_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,a}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \quad (\text{VI.207})$$

relation qui peut s'écrire aussi sous la forme

$$\alpha_\lambda(\lambda) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \alpha_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi) I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (\text{VI.208})$$

Si l'intensité incidente du rayonnement est diffuse et $\alpha_{\lambda,\theta}$ est indépendante de l'angle φ , l'équation VI. 208 devient

$$\alpha_\lambda(\lambda) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha_{\lambda,\theta}(\lambda) \cos \theta \sin \theta d\theta \quad (\text{VI.209})$$

L'absorptivité hémisphérique totale α , représente la moyenne sur toutes les directions et les longueurs d'ondes, est définie par la fraction de l'irradiation totale, absorbée par la surface, soit

$$\alpha = \frac{G_a}{G} \quad (\text{VI.210})$$

relation que nous pouvons aussi écrire sous la forme

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) G_\lambda(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda} \quad (\text{VI.211})$$

7. 2. Réflectivité

La réflectivité détermine la fraction du rayonnement incident réfléchi par la surface. Sa définition est plus compliquée du fait que de plus de son dépendance de la direction (θ, φ) du rayonnement incident, elle dépend aussi de la direction du rayonnement réfléchi. La réflectivité spectrale directionnelle $\rho_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, \varphi)$ d'une surface est définie comme la fraction de l'intensité spectrale incidente dans la direction (θ, φ) qui est réfléchie par la surface. Mathématiquement, elle est égale à

$$\rho_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, \varphi) = \frac{I_{\lambda, r}(\lambda, \theta, \varphi)}{I_{\lambda, i}(\lambda, \theta, \varphi)} \quad (\text{VI.212})$$

La réflectivité spectrale hémisphérique $\rho_{\lambda}(\lambda)$ est définie par la fraction de l'irradiation qui est réfléchie par la surface, soit

$$\rho_{\lambda}(\lambda) = \frac{G_{\lambda, r}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)} \quad (\text{VI.213})$$

relation qui peut être écrite sous la forme

$$\rho_{\lambda}(\lambda) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \rho_{\lambda, \theta}(\lambda, \theta, \varphi) I_{\lambda, i}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda, i}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi} \quad (\text{VI.214})$$

La réflectivité hémisphérique totale ρ est

$$\rho = \frac{G_r}{G} \quad (\text{VI.215})$$

ou en d'autres termes

$$\rho = \frac{\int_0^{\infty} \rho_{\lambda}(\lambda) G_{\lambda}(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} G_{\lambda}(\lambda) d\lambda} \quad (\text{VI.216})$$

7. 3. Transmissivité

La transmissivité spectrale hémisphérique $\tau_{\lambda}(\lambda)$ est définie par la fraction de l'irradiation qui est transmise la surface, soit

$$\tau_{\lambda}(\lambda) = \frac{G_{\lambda,t}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)} \quad (\text{VI.217})$$

La transmissivité hémisphérique totale τ est

$$\tau = \frac{G_t}{G} \quad (\text{VI.218})$$

relation qui peut être écrite sous la forme

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} \tau_{\lambda}(\lambda) G_{\lambda}(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} G_{\lambda}(\lambda) d\lambda} \quad (\text{VI.219})$$

A partir de la relation

$$G_{\lambda} = G_{\lambda,r} + G_{\lambda,a} + G_{\lambda,t} \quad (\text{VI.220})$$

nous pouvons écrire

$$\rho_{\lambda}(\lambda) G_{\lambda} + \alpha_{\lambda}(\lambda) G_{\lambda} + \tau_{\lambda}(\lambda) G_{\lambda} = G_{\lambda} \quad (\text{VI.221})$$

en simplifiant par G_λ , nous obtenons une relation qui lie entre elles la réflectivité spectrale, l'absorptivité spectrale et la transmissivité spectrale d'un milieu semi-transparent

$$\rho_\lambda(\lambda) + \alpha_\lambda(\lambda) + \tau_\lambda(\lambda) = 1 \quad (\text{VI.222})$$

Si nous considérons les valeurs moyennes sur toutes les longueurs d'ondes, nous pouvons aussi écrire que

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad (\text{VI.223})$$

Pour un milieu opaque, il n'y a pas de transmission du rayonnement, dans ce cas, les relations précédentes s'écrivent

$$\rho_\lambda(\lambda) + \alpha_\lambda(\lambda) = 1 \quad (\text{VI.224})$$

$$\rho + \alpha = 1 \quad (\text{VI.225})$$

8. Loi de Kirchhoff

Considérons une cavité isotherme de température intérieure T_p contenant plusieurs corps $C_i (1 \leq i \leq n)$ de surface S_i et de dimensions largement inférieures à celles de la cavité de sorte que leurs présences n'affectent pas le rayonnement établi qui résulte des émissions et réflexions successives par la paroi interne de la cavité, ainsi, cette paroi constitue un corps noir.

Quelque soit, leurs orientations, l'irradiation que chaque corps reçoit est diffuse et provient de l'émission de la paroi de la cavité, qui est un corps noir à la température T_p . Par conséquent, nous avons

$$G = E_b(T_p) \quad (\text{VI.226})$$

Dans l'état stationnaire, un équilibre thermique s'établit entre les différents corps C_i et la cavité, par conséquent, nous devons avoir la condition d'égalité des différentes températures, soit

$$T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_n = T_p \quad (\text{VI.227})$$

Cette égalité des températures implique la nullité du transfert net de rayonnement échangé entre les corps.

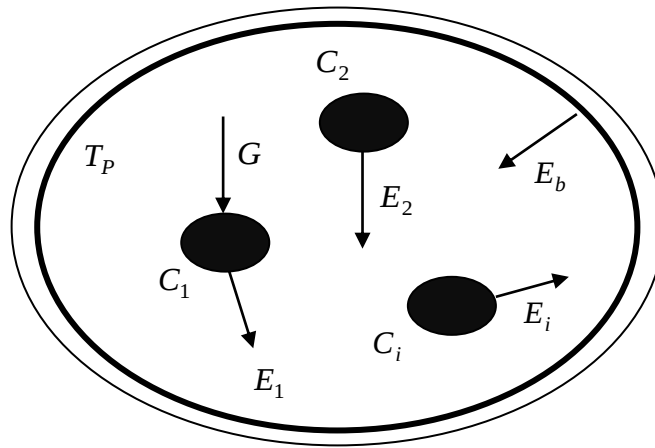


Figure VI. 17. Echange radiative dans une enceinte isotherme.

Faisons un bilan sur le corps C_1 , à l'équilibre thermique, le corps reçoit l'irradiation G et absorbe une énergie $\alpha_1 G S_1$, au même temps, il émet l'énergie $E_1(T_1)$, par conséquent, nous devons avoir l'égalité

$$\alpha_1 G S_1 = E_1(T_P) S_1 \quad (\text{VI.228})$$

en utilisant la relation VI. 226, nous pouvons aussi écrire

$$\alpha_1 E_b(T_P) S_1 = E_1(T_P) S_1 \quad (\text{VI.229})$$

soit

$$E_b(T_P) = \frac{E_1(T_P)}{\alpha_1} \quad (\text{VI.230})$$

ce résultat s'applique à chaque corps C_i , nous obtenons ainsi la relation

$$\frac{E_1(T_P)}{\alpha_1} = \frac{E_2(T_P)}{\alpha_2} = \frac{E_3(T_P)}{\alpha_3} = \dots = \frac{E_n(T_P)}{\alpha_n} = E_b(T_P) \quad (\text{VI.231})$$

Cette relation est la loi de Kirshhoff. Comme les absorptivités α_i sont inférieures à l'unité, nous devons toujours avoir $E_i(T_i) < E_b(T_P)$. Ainsi, aucune surface réelle n'a un pouvoir émissif supérieur à celui d'un corps noir à la même température. Si nous utilisons la relation $\varepsilon = \frac{E}{E_b}$, alors l'équation s'écrit

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} = \frac{\varepsilon_3}{\alpha_3} = \dots = \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} = 1 \quad (\text{VI.232})$$

Ce résultat montre que pour n'importe quelle cavité, l'émissivité hémisphérique totale est égale à l'absorptivité hémisphérique totale, soit

$$\varepsilon = \alpha \quad (\text{VI.233})$$

Cette relation peut être généralisée pour les grandeurs spectrales et directionnelles, ainsi, nous devons avoir toujours les égalités

$$\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda \quad (\text{VI.234})$$

$$\varepsilon_{\lambda,\theta} = \alpha_{\lambda,\theta} \quad (\text{VI.235})$$

9. Surfaces grises

Selon les définitions des propriétés spectrales hémisphériques, cherchons sous quelles conditions, l'égalité suivante est valable

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = ? \alpha_\lambda(\lambda) \quad (\text{VI.236})$$

soit

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi, T) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi} \\
&= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \alpha_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \varphi) I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}
\end{aligned} \tag{VI.237}$$

Comme en vertu de la loi de Kirchhoff, nous avons $\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = \alpha_{\lambda}(\lambda)$, $\varepsilon_{\lambda,\theta} = \alpha_{\lambda,\theta}$, cette égalité tient si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- a) L'irradiation $I_{\lambda,i}$ est diffuse, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la direction (θ, φ) ,
- b) La surface est diffuse, c'est-à-dire que $\varepsilon_{\lambda,\theta}$ et $\alpha_{\lambda,\theta}$ ne dépendent pas de la direction (θ, φ) .

La première condition est satisfaite dans la plus part des cas. La deuxième condition aussi est satisfaite pour beaucoup de surfaces, surtout les surfaces non-conductrices d'électricité.

En supposant que l'irradiation et la surface sont diffuses, cherchons sous quelles conditions l'égalité $\varepsilon = \alpha$ est valide

$$\varepsilon = ? \alpha \tag{VI.238}$$

soit

$$\frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) E_{\lambda, b}(\lambda, T) d\lambda}{E_b(T)} = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda}(\lambda) G_{\lambda}(\lambda) d\lambda}{G} \quad (\text{VI.239})$$

Comme $\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda}$, l'égalité tient si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite.

- a) L'irradiation correspond à l'émission d'un corps noir ayant la température de la surface en question,
- b) La surface est grise, c'est-à-dire que ε_{λ} et α_{λ} sont indépendants de la longueur d'onde λ .

10. Facteur de forme

10. 1. Définition du facteur de forme

Considérons deux surfaces rayonnantes quelconques S_i et S_j orientées arbitrairement dans l'espace. Les éléments de surfaces dS_i et dS_j sont séparées par la distance $\vec{r}$ qui fait les angles θ_i et θ_j avec les vecteurs normales aux surfaces $\vec{n}_i$ et $\vec{n}_j$. Le facteur F_{ij} est défini comme la fraction du rayonnement quittant la surface S_i et intercepté par la surface S_j .

La quantité du rayonnement quittant l'élément de surface dS_i et interceptée par l'élément de surface dS_j est

$$dq_{ij} = I_{e+r,i} \cos \theta_i dS_i d\Omega_{ji} \quad (\text{VI.240})$$

où $I_{e+r,i}$ est l'intensité du rayonnement quittant l'élément de surface dS_i par émission et réflexion et $d\Omega_{ji}$ est l'angle solide sur l'élément de surface dS_j vu par l'élément de surface dS_i . Cette angle solide $d\Omega_{ji}$ est naturellement donné par la relation

$$d\Omega_{ji} = \frac{\cos\theta_j dS_j}{r^2} \quad (\text{VI.241})$$

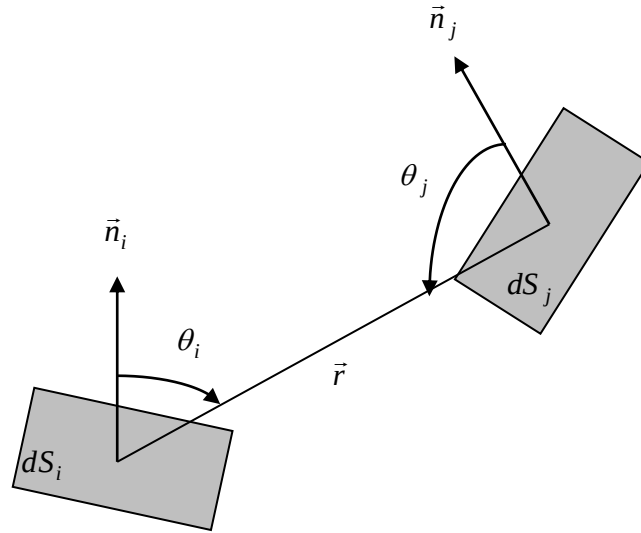


Figure VI. 18. Facteur de forme.

Si nous admettons que la surface S_i émis et réfléchi d'une façon diffuse, nous pouvons remplacer l'intensité $I_{e+r,i}$ par la radiosité ($J_i = \pi I_{e+r,i}$). En substituant l'expression de l'angle solide $d\Omega_{ji}$ et de l'intensité $I_{e+r,i}$ dans la relation, nous obtenons

$$dq_{ij} = J_i \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j dS_i dS_j}{\pi r^2} \quad (\text{VI.242})$$

La quantité du rayonnement totale quittant la surface S_i et interceptée par la surface S_j est obtenue en intégrant sur la totalité des surfaces S_i et S_j , soit

$$q_{ij} = J_i \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j dS_i dS_j}{\pi r^2} \quad (\text{VI.243})$$

où la radiosité J_i est considérée comme uniforme sur toute la surface S_i . Le facteur de forme F_{ij} , comme nous l'avons défini, s'écrit alors

$$F_{ij} = \frac{q_{ij}}{S_i J_i} \quad (\text{VI.244})$$

En utilisant la relation VI. 243, nous obtenons pour le facteur de forme F_{ij} l'équation

$$F_{ij} = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j dS_i dS_j}{\pi r^2} \quad (\text{VI.245})$$

De la même façon, le facteur de forme F_{ji} est défini comme la fraction du rayonnement quittant la surface S_j et intercepté par la surface S_i . Avec un raisonnement similaire, nous obtenons la relation suivante pour le facteur de forme F_{ji} , soit

$$F_{ji} = \frac{1}{S_j} \int_{S_j} \int_{S_i} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j dS_i dS_j}{\pi r^2} \quad (\text{VI.246})$$

10. 2. Propriétés du facteur de forme

A partir des équations VI.245 et VI.246, nous pouvons écrire

$$\int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j dS_i dS_j}{\pi r^2} = F_{ij} S_i = F_{ji} S_j \quad (\text{VI.247})$$

d'où la relation

$$F_{ij} S_i = F_{ji} S_j \quad (\text{VI.248})$$

appelée relation de réciprocité.

Pour une enceinte fermée nous avons aussi la relation

$$\sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} = 1 \quad (\text{VI.249})$$

Notons que si une surface S_i est convexe ou plane, le facteur de forme $F_{ii} = 0$ et si elle est concave $F_{ii} \neq 0$.

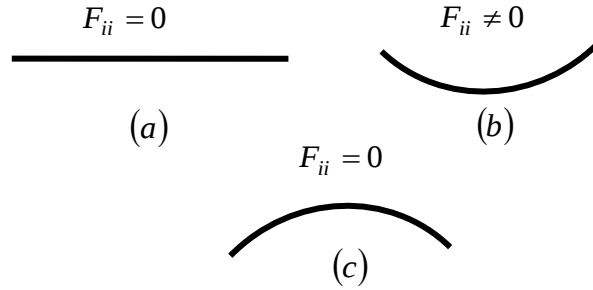


Figure VI. 19. Facteur de forme F_{ii} , (a) : surface plane, (b) : surface concave, (c) : surface convexe.

Pour une enceinte formée par n surfaces S_i , il faut déterminer n^2 facteurs de forme que nous pouvons écrire sous la forme d'une matrice

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \vdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & \vdots & F_{2n} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & \vdots & F_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & F_{n3} & \vdots & F_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.250})$$

Cependant, il n'est pas nécessaire de déterminer les n^2 individuellement. Les n facteurs de facteurs sont déterminés à partir de la règle de sommation appliquée à chaque surface. En plus

de ça, $\frac{n(n-1)}{2}$ facteurs de forme sont obtenus à partir de la relation de réciprocité, il ne reste alors en fin de compte que seulement $n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ facteurs de forme à calculer directement. Pour illustrer ce qui a été dit, considérons une enceinte formée de trois surfaces S_1 , S_2 et S_3 . Pour cette enceinte, la matrice F s'écrit

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.251})$$

Il y donc neuf facteurs de forme, il ne reste alors que $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ facteurs de forme à déterminer directement et qui sont F_{12} , F_{13} et F_{23} . Les six autres facteurs de forme sont obtenus à partir des règles de réciprocité et de sommation. En appliquant les règles de réciprocité et de sommation, nous pouvons écrire les six relations nécessaires pour la détermination des six facteurs de forme restants, ces relations sont

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \quad (\text{VI.252})$$

$$F_{21} + F_{22} + F_{23} = 1 \quad (\text{VI.253})$$

$$F_{31} + F_{32} + F_{33} = 1 \quad (\text{VI.254})$$

$$F_{12}S_1 = F_{21}S_2 \quad (\text{VI.255})$$

$$F_{13}S_1 = F_{31}S_3 \quad (\text{VI.256})$$

$$F_{23}S_2 = F_{32}S_3 \quad (\text{VI.257})$$

11. Échanges radiatifs entre des surfaces opaques, diffuses et grises dans une enceinte

Pour étudier les échanges entre les surfaces dans une enceinte, nous devons faire certaines hypothèses. Chaque surface de l'enceinte est supposée être à une température uniforme et caractérisée par une radiosité et irradiation uniformes. Nous supposons aussi que les surfaces sont opaques, diffuses et grises et que le milieu dans l'enceinte est considéré comme non-participatif. L'énergie rayonnante q_i qui quitte la surface S_i est égale à la différence entre la radiosité J_i émise par cette surface et l'irradiation incidente G_i qu'elle reçoit. Par conséquent, nous devons écrire que

$$q_i = S_i J_i - S_i G_i \quad (\text{VI.258})$$

À partir de la définition de la radiosité, nous avons

$$J_i = E_i + \rho_i G_i \quad (\text{VI.259})$$

Comme la surface est opaque, nous avons la relation

$$\rho_i = 1 - \alpha_i \quad (\text{VI.260})$$

la relation VI. 259 s'écrit

$$J_i = E_i + (1 - \alpha_i) G_i \quad (\text{VI.261})$$

En substituant cette relation dans l'équation VI. 258, nous trouvons

$$q_i = S_i (E_i + (1 - \alpha_i) G_i) - S_i G_i \quad (\text{VI.262})$$

soit

$$q_i = S_i (E_i - \alpha_i G_i) \quad (\text{VI.263})$$

Sachant que le pouvoir émissif E_i de la surface peut être exprimé en fonction du pouvoir émissif d'un corps noir à la même température $E_{b,i}$ par la relation $E_i = \varepsilon_i E_{b,i}$, de plus à partir de la loi de Kirshhoff, nous avons $\alpha_i = \varepsilon_i$, nous pourrions maintenant, réécrire les relations VI. 261 et VI. 263 sous la forme

$$J_i = \varepsilon_i E_{b,i} + (1 - \varepsilon_i) G_i \quad (\text{VI.264})$$

$$q_i = S_i \varepsilon_i (E_{b,i} - G_i) \quad (\text{VI.265})$$

De l'équation VI. 264, l'irradiation G_i est

$$G_i = \frac{J_i - \varepsilon_i E_{b,i}}{1 - \varepsilon_i} \quad (\text{VI.266})$$

sa substitution dans les relations VI. 265, nous conduit à la relation

$$q_i = S_i \left(J_i - \frac{J_i - \varepsilon_i E_{b,i}}{1 - \varepsilon_i} \right) \quad (\text{VI.267})$$

soit

$$q_i = \frac{\varepsilon_i S_i}{1 - \varepsilon_i} (E_{b,i} - J_i) \quad (\text{VI.268})$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$q_i = \frac{E_{b,i} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i S_i}} \quad (\text{VI.269})$$

Nous concluons que ce transfert radiatif peut être associé au potentiel $E_{b,i} - J_i$ et à une résistance radiative de la

surface $R_r = \frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i S_i}$.

11. 1. Échanges radiatifs entre les surfaces

L'irradiation G_i de la surface S_i de toutes les radiosités émise par toutes les surfaces de l'enceinte y compris la surface elle-même. Nous pouvons écrire alors

$$S_i G_i = \sum_{j=1}^{j=n} S_j F_{ji} J_j \quad (\text{VI.270})$$

En utilisant la relation de réciprocité $S_i F_{ij} = S_j F_{ji}$, cette équation devient

$$S_i G_i = \sum_{j=1}^{j=n} S_i F_{ij} J_j \quad (\text{VI.271})$$

En éliminant la surface S_i et en substituant dans l'équation VI. 263, nous obtenons

$$q_i = S_i \left(J_i - \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j \right) \quad (\text{VI.272})$$

11. 1. 1. Surfaces isothermes

Supposons que les surfaces S_i de l'enceinte sont maintenues aux températures uniformes T_i . En utilisant la loi de Stefan-Boltzmann, la relation VI. 268 s'écrit alors sous la forme

$$q_i = \frac{\varepsilon_i S_i}{1 - \varepsilon_i} (\sigma T_i^4 - J_i) \quad (\text{VI.273})$$

En combinant les équations VI. 272 et VI. 273, nous obtenons

$$J_i - \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j = \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} (\sigma T_i^4 - J_i) \quad (\text{VI.274})$$

qui après réarrangement devient

$$J_i - (1 - \varepsilon_i) \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j = \varepsilon_i \sigma T_i^4 \quad (\text{VI.275})$$

Si nous faisons intervenir le symbole de Kronecker δ_{ij} , nous pouvons alors écrire

$$J_i = \delta_{ij} J_j \quad (\text{VI.276})$$

et ainsi, l'équation VI. 275 devient

$$\delta_{ij} J_j - (1 - \varepsilon_i) \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j = \varepsilon_i \sigma T_i^4 \quad (\text{VI.277})$$

Mais comme la sommation est sur l'indice j , il nous est permis de mettre le signe de sommation devant tout le membre de gauche de l'équation et obtenir

$$\sum_{j=1}^{j=n} (\delta_{ij} - (1 - \varepsilon_i) F_{ij}) J_j = \varepsilon_i \sigma T_i^4 \quad (\text{VI.278})$$

Puisque les indices i et j varient de 1 à n , et que la sommation est sur l'indice j , nous pouvons expliciter l'équation et obtenir un système de n équations pour les radiosités J_i . Ce système d'équations sous forme matricielle est

$$\begin{bmatrix} 1 - (1 - \varepsilon_1) F_{11} & -(1 - \varepsilon_1) F_{12} & \cdot & -(1 - \varepsilon_1) F_{1n} \\ -(1 - \varepsilon_2) F_{21} & 1 - (1 - \varepsilon_2) F_{22} & \cdot & -(1 - \varepsilon_2) F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -(1 - \varepsilon_n) F_{n1} & -(1 - \varepsilon_n) F_{n2} & \cdot & 1 - (1 - \varepsilon_n) F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \cdot \\ J_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \\ \varepsilon_2 \sigma T_2^4 \\ \cdot \\ \varepsilon_n \sigma T_n^4 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.279})$$

11. 1. 2. Surfaces soumises à un flux de chaleur pariétal

Supposons que les surfaces S_i de l'enceinte sont soumises aux flux de chaleurs pariétaux q_i . A partir de la relation VI. 272, nous avons

$$J_i - \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j = \frac{q_i}{S_i} \quad (\text{VI.280})$$

Si nous faisons intervenir le symbole de Kronecker δ_{ij} , nous pouvons alors écrire

$$J_i = \delta_{ij} J_j \quad (\text{VI.281})$$

d'où

$$\delta_{ij} J_j - \sum_{j=1}^{j=n} F_{ij} J_j = \frac{q_i}{S_i} \quad (\text{VI.282})$$

mais comme la sommation est indépendante de l'indice i , nous pouvons transcrire cette équation sous la forme

$$\sum_{j=1}^{j=n} (\delta_{ij} - F_{ij}) J_j = \frac{q_i}{S_i} \quad (\text{VI.283})$$

Puisque les indices i et j varient de 1 à n , et que la sommation est sur l'indice j , nous pouvons expliciter l'équation et obtenir un système de n équations pour les radiosités J_i . Ce système d'équations sous forme matricielle est

$$\begin{bmatrix} 1-F_{11} & -F_{12} & \cdot & -F_{1n} \\ -F_{21} & 1-F_{22} & \cdot & -F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -F_{n1} & -F_{n2} & \cdot & 1-F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \cdot \\ J_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_1}{S_1} \\ \frac{q_2}{S_2} \\ \cdot \\ \frac{q_n}{S_n} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.284})$$

12. Échanges radiatifs entre des surfaces noires

Si l'enceinte est constituée de surfaces noires, le rayonnement net échangée par la surface S_i est

$$q_i = S_i (E_{b,i} - G_i) \quad (\text{VI.285})$$

L'irradiation qui tombe sur la surface S_i et qui provient des autres surfaces S_j est

$$S_i G_i = E_{b,1} S_1 F_{1i} + E_{b,2} S_2 F_{2i} + \cdots + E_{b,n} S_n F_{ni} = \sum_{j=1}^{j=n} E_{b,j} S_j F_{ji}$$

A partir de la relation de réciprocité

$$S_i F_{ij} = S_j F_{ji} \quad (\text{VI.286})$$

La relation VI. 285 s'écrit

$$q_i = S_i E_{b,i} - \sum_{j=1}^{j=n} E_{b,j} S_j F_{ji} = S_i E_{b,i} - \sum_{j=1}^{j=n} E_{b,j} S_i F_{ij} \quad (\text{VI.287})$$

soit

$$q_i = S_i \left(E_{b,i} - \sum_{j=1}^{j=n} E_{b,j} F_{ij} \right) \quad (\text{VI.288})$$

ou bien

$$q_i = \sum_{j=1}^{j=n} (E_{b,i} - E_{b,j}) S_i F_{ij} \quad (\text{VI.289})$$