

Chapitre 1 : Introduction Générale et Formulation d'un Programme Linéaire (Modélisation)

1 Introduction

L'optimisation joue un rôle crucial dans la prise de décision, que ce soit dans les domaines économique, militaire ou industriel. La **programmation linéaire (PL)** s'est imposée comme l'un des outils les plus puissants et les plus étudiés depuis le milieu du XX^e siècle. Les premiers travaux fondateurs remontent à 1947, avec les contributions de **George B. Dantzig** et de son équipe au sein de l'US Air Force, qui ont développé la **méthode du Simplexe**.

Les problèmes de programmation linéaire consistent généralement à **allouer des ressources limitées** de manière optimale, afin de **maximiser un profit** ou de **minimiser un coût**, sous un ensemble de **contraintes linéaires**. La solution optimale correspond à la meilleure combinaison de décisions réalisables.

Bien que la méthode du Simplexe présente une complexité théorique non polynomiale, elle s'avère extrêmement efficace en pratique. De nombreux logiciels (CPLEX, Gurobi, GLPK, etc.) l'implémentent et permettent de résoudre des problèmes de grande taille en quelques secondes.

2 Historique de la programmation linéaire

Les prémices mathématiques de la PL remontent aux travaux de **Fourier**, **Motzkin** et **Farkas** entre 1870 et 1930. Cependant, c'est avec **Dantzig** (1947) que la discipline prend son essor, grâce au développement de l'algorithme du Simplexe dans le cadre du projet **SCOOP**.

Parallèlement, le mathématicien et économiste russe **Kantorovich** propose en 1939 une méthode inspirée des multiplicateurs de Lagrange pour résoudre des problèmes de transport. Plus tard, en 1984, **Karmarkar** introduit une méthode de point intérieur, offrant une approche polynomiale pour la résolution de grands problèmes linéaires.

Aujourd'hui, la PL est au cœur de la recherche opérationnelle et de l'aide à la décision, avec des solveurs capables de traiter des modèles comportant plusieurs centaines de milliers de variables et contraintes.

3 Définition de la programmation linéaire

La programmation linéaire est une **technique mathématique d'optimisation** qui consiste à maximiser ou minimiser une **fonction objectif linéaire**, sous un ensemble de **contraintes linéaires** (égalités ou inégalités).

[Baumol] La programmation linéaire est une technique mathématique d'optimisation d'une fonction objectif linéaire sous des contraintes linéaires. Elle vise à choisir, parmi différentes actions, celle qui permet d'atteindre au mieux un objectif donné.

[Dorfman & Samuelson] La programmation linéaire est une méthode pour déterminer le meilleur plan d'action en situation de ressources limitées, que ce soit au niveau économique global, sectoriel ou en entreprise.

4 Présentation théorique de la programmation linéaire

Un programme linéaire s'écrit généralement sous la forme algébrique suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser (ou Minimiser)} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sous contraintes} & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

4.1 Forme matricielle

Le même programme linéaire peut s'écrire de manière compacte en notation matricielle :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser (ou Minimiser)} & z = \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{sous contraintes} & \begin{cases} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{array}$$

où :

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ est le **vecteur des variables de décision** (de dimension $n \times 1$)
- $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^\top$ est le **vecteur des coefficients de la fonction objectif** (de dimension $n \times 1$)
- $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ est la **matrice des coefficients technologiques** (de dimension $m \times n$)
- $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^\top$ est le **vecteur des ressources** (de dimension $m \times 1$)
- $\mathbf{0}$ est le vecteur nul de dimension $n \times 1$

5 Formulation d'un programme linéaire (Modélisation)

5.1 Les conditions de formulation

Pour qu'un problème puisse être modélisé sous forme linéaire, quatre conditions doivent être vérifiées :

1. Les variables de décision sont **positives**.
2. La fonction objectif est **linéaire**.
3. Les contraintes sont exprimées par des **équations ou inéquations linéaires**.
4. Tous les paramètres sont **connus avec certitude**.

5.2 Les étapes de formulation

1. **Identifier les variables de décision** (inconnues du problème).
2. **Exprimer les contraintes** sous forme d'équations/inéquations linéaires.
3. **Définir la fonction objectif** linéaire à maximiser ou minimiser.

5.3 Exemple 1 : Problème agricole

Un agriculteur dispose de 150 ha, 480 h de main-d'œuvre et 440 m d'eau. Il cultive des tomates (100 Dt/ha, 1 h/ha, 4 m/ha) et des piments (200 Dt/ha, 4 h/ha, 2 m/ha). Il ne peut pas cultiver plus de 90 ha de tomates.

Formulation algébrique :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 100x_1 + 200x_2 \\ \text{sous contraintes} & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 150 & (\text{surface}) \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 440 & (\text{eau}) \\ x_1 + 4x_2 \leq 480 & (\text{main-d'œuvre}) \\ x_1 \leq 90 & (\text{limitation tomates}) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Formulation matricielle :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = (100 \quad 200) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{sous contraintes} & \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 150 \\ 440 \\ 480 \\ 90 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \end{array}$$

5.4 Exemple 2 : Problème médical

Un médecin doit prescrire des pilules de deux formats pour fournir au moins 12 g d'aspirine, 74 g de bicarbonate et 24 g de codéine.

- Petite pilule : 2 g aspirine, 5 g bicarbonate, 1 g codéine.
- Grande pilule : 1 g aspirine, 8 g bicarbonate, 6 g codéine.

On cherche à **minimiser le nombre total de pilules**.

Formulation algébrique :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & z = x_1 + x_2 \\ \text{sous contraintes} & \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 & (\text{aspirine}) \\ 5x_1 + 8x_2 \geq 74 & (\text{bicarbonate}) \\ x_1 + 6x_2 \geq 24 & (\text{codéine}) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Formulation matricielle :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & z = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{sous contraintes} & \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 12 \\ 74 \\ 24 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \end{array}$$

5.5 Exemple 3 : Problème de production

Une usine fabrique deux produits P1 et P2 sur trois machines M1, M2, M3. Les temps de fabrication (en minutes) et les profits sont donnés ci-dessous :

Produit	M1	M2	M3	Profit (Dt)
P1	11	7	6	900
P2	9	12	16	1000

Les disponibilités mensuelles sont : 9900 min pour M1, 8400 min pour M2, 9600 min pour M3.

Formulation algébrique :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 900x_1 + 1000x_2 \\ \text{sous contraintes} & \begin{cases} 11x_1 + 9x_2 \leq 9900 & (\text{M1}) \\ 7x_1 + 12x_2 \leq 8400 & (\text{M2}) \\ 6x_1 + 16x_2 \leq 9600 & (\text{M3}) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Formulation matricielle :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = (900 \quad 1000) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{sous contraintes} & \left\{ \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 7 & 12 \\ 6 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 9900 \\ 8400 \\ 9600 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{array}$$

6 Les formes d'un programme linéaire

Un programme linéaire peut se présenter sous différentes formes :

6.1 Forme générale (mixte)

- Contient à la fois des contraintes d'égalité et d'inégalité.
- Variables éventuellement libres (non restreintes en signe).

Forme matricielle :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{sous contraintes} & \begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{x} = \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{A}_3 \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{x} \text{ libre} \end{cases} \end{array}$$

6.2 Forme standard

- Toutes les contraintes sont des **égalités**.
- Toutes les variables sont **positives**.
- La fonction objectif est à **maximiser**.

Forme matricielle :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{sous contraintes} & \begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{array}$$

6.3 Forme canonique

- Toutes les contraintes sont des **inégalités de type** $\leq$ (pour une maximisation) ou $\geq$ (pour une minimisation).
- Toutes les variables sont **positives**.

Forme matricielle pour maximisation :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{sous contraintes} & \begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{array}$$

Forme matricielle pour minimisation :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{sous contraintes} & \begin{cases} \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \end{array}$$

6.4 Conversion entre les formes

1. **Variable libre** $\rightarrow$ remplacer x_j libre par $x_j = x_j^+ - x_j^-$ avec $x_j^+, x_j^- \geq 0$.
2. **Minimisation** $\rightarrow$ multiplier la fonction objectif par -1 pour maximiser.
3. **Égalité** $\rightarrow$ remplacer $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} = b_i$ par $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i$ et $-\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq -b_i$.
4. **Inégalité** $\rightarrow$ introduire une **variable d'écart** $s_i \geq 0$ pour obtenir une égalité :

$$\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \leq b_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0$$

$$\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} \geq b_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - s_i = b_i, \quad s_i \geq 0$$

Exemple de conversion d'une égalité :

$$\text{Forme initiale :} \quad 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 17$$

$$\text{Forme canonique :} \quad \begin{cases} 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\ -9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17 \end{cases}$$

$$\text{Forme standard :} \quad \begin{cases} 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 + s_1 = 17 \\ -9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + s_2 = -17 \\ s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Conclusion

Ce chapitre a introduit les concepts fondamentaux de la programmation linéaire, son historique, sa définition théorique et les étapes de modélisation. Nous avons présenté à la fois la forme algébrique et la forme matricielle des programmes linéaires, cette dernière offrant une notation compacte et puissante pour la manipulation théorique et numérique. Les exemples illustrent comment formuler des problèmes concrets sous forme de PL. La maîtrise de ces bases est essentielle pour aborder les méthodes de résolution, telles que le Simplexe, qui seront présentées dans les chapitres suivants.