التصحيح النموذجي للإمتحان النهائي
(مادة التحليل 01)
2026 - 2025
(الدورة العادية)

التمرين 01 ($\frac{08}{08}$)

01. تبيان أن: $u_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

نستعمل البرهان بالتراجع:

- من أجل: $n = 0$ ، لدينا: من التعريف: $\boxed{u_0 > 0}$ محققة .... ① (0,5)

- نفترض أن: $u_n > 0$

لدينا: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ ، بما أن: $u_n > 0$ فإن: $u_n + 1 > 0$ (1)

وعليه: $\dfrac{u_n}{u_n+1} > 0$ أي: $\boxed{u_{n+1} > 0}$ .... ②

من ① و ② نجد: $u_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

02. • تعريف الدالة g :

$$g(x) = \frac{x}{1+x} - x = \frac{x - x(1+x)}{1+x} = \boxed{-\frac{x^2}{1+x}}$$

• حساب المشتقة:

(1)
$$g'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2}{(1-x)^2}$$

$$g'(x) = -\frac{2x + x^2}{(1+x)^2}$$

$$\boxed{g'(x) = -\frac{x(2+x)}{(1+x)^2}}$$

نلاحظ أن: من أجل: $x > 0 \Leftarrow g'(x) < 0$

أي: g متناقصة تماما على المجال $]0, +\infty[$ (1)

• جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	0 ↘	$-\infty$

(0,5)

• أي: $\boxed{g(x) < 0}$

03. نستعمل نتيجة الجزء (02) حيث: $x = u_n > 0$

(0,5) لدينا: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} < u_n$

(0,5) نستنتج أن: المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

---

04. المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 0

(0,5) ومنه: (u_n) متقاربة.

* حساب النهاية:

(0,5) لدينا: العلاقة التراجعية حيث: $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}$

(0,5) $L = \dfrac{L}{1+L} \Rightarrow L + L^2 = L \Rightarrow \boxed{L = 0}$

---

05. المجموعة: $E = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

بما أن: (u_n) متناقصة تماما و $u_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

فإن: * $\max(E) = u_0$ ومنه: $\sup E = u_0$

(0,75) وبما أن: $u_0 > 0$ فإن: $\boxed{\sup E > 0 \text{ (موجب)}}$

* و المتتالية (u_n) تتناقص وتتقارب نحو 0 وكل حدودها موجبة

(0,75) ومنه: $\inf(E) = L = 0$

التمرين 02 $\frac{04}{08}$

01. دراسة إشتقاقية f عند 0، نستعمل التعريف:

(0,5) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^3 \cos\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h}$

(0,5) $= \lim\limits_{h \to 0} h^2 \cos\left(\frac{1}{h}\right)$

(0,25) نعلم أن: $\left|\cos\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq 1 \quad \forall h \neq 0$

وعليه: $0 \leq \left|h^2 \cos\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leq |h^2| = h^2$

وبما أن:

(0,5) $\lim\limits_{h \to 0} h^2 = 0$

فإن:

$\lim\limits_{h \to} h^2 \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0$

إذن: f قابلة للإشتقاق عند 0 و

(0,25) $\boxed{f'(0) = 0}$

02. دراسة استمرارية الدالة المشتقة f' عند $x=0$:

• حساب $f'(x)$ من أجل $x \neq 0$:

← نستعمل قواعد الإشتقاق :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

0,25

$$= 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

0,5

$$= 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

أي :

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

• حساب النهاية :

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left[3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

لدينا :

0,5

$$\begin{cases} 0 \leqslant \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 0 \leqslant \left|3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 3x^2 \\ 0 \leqslant \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant x \end{cases}$$

و

بما أن : $\begin{cases} \lim_{x \to 0} 3x^2 = 0 \\ \lim_{x \to 0} x = 0 \end{cases}$ و فإن : $\boxed{\lim_{x \to 0} f'(x) = 0}$

0,25

• الإستنتاج :

0,5

بما أن : $f'(0) = 0$ فإن : $\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$

وبالتالي : f' مستمرة عند $x=0$.

التمرين 03 : $\frac{04}{08}$

01. لدينا :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)$$

0,25 $\sin(x) = f(x) \Rightarrow f(0) = \sin(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x) \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \cos x \Rightarrow f^{(5)}(0) = 1$

أ/

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

أي:

0,5 $$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots$$

02 لدينا:

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

1 $$\simeq \left[x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{5!} \right]_0^1$$

0,5 $$\simeq \left(1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600}\right)$$

إذن:

0,5 $$\boxed{I \simeq 0,9461}$$

التمرين 04: $\frac{04}{08}$

01.

$$\frac{d}{dx}\sin^2(x^2+1) = 2\sin(x^2+1) \cdot \frac{d}{dx}\sin(x^2+1)$$

0,5 $$= 2\sin(x^2+1) \cdot \cos(x^2+1) \cdot \frac{d}{dx}(x^2+1)$$

0,5 $$= 2\sin(x^2+1) \cos(x^2+1) \frac{d}{dx}(x^2+1)$$

0,5 $$= 4x \sin(x^2+1)\cos(x^2+1)$$

02.

$$I = \int 2x\sqrt{x^2+3}\, dx$$

بالتعويض: $u = x^2+3$ نجد:

0,5 $du = 2x\,dx$

$$I = \int \sqrt{u}\, du = \int u^{\frac{1}{2}}\, du$$

0,25 $$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

0,25 $$= \frac{2}{3}(x^2+3)^{3/2} + C$$

03.

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(3e^{3x} - 5x)}{x}$$

0,5 $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{9e^{3x} - 5}{3e^{3x} - 5x}$$ (قاعدة لوبيتال)

0,5 $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{27e^{3x}}{9e^{3x} - 5}$$ (قاعدة لوبيتال)

0,5 $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{27 \times 3\, e^{3x}}{9 \times 3\, e^{3x}} = 3$$ (قاعدة لوبيتال)

4