Abdelhafid Boussouf University - Mila
Faculty of Science and Technology
Common Core ST Department
January 2026
Module: Analysis 1

Academic Year: 2025/2026
1st Year Common Core ST
And 1st Year Engineering
Duration: 120 minutes
Semester I

الإمتحان النهائي: التحليل 1
Final exam: Analysis 1

Exercise 1: (8 points)

Consider the sequence $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by: (نعتبر أن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بـ)

$$\begin{cases} U_0 > 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Show that $U_n > 0$ for all $n \in \mathbb{N}$. ($0 < U_n$ بين أن)
2. Define $g(x) = \dfrac{x}{1+x} - x$. Study the variations of g on $]0,+\infty[$, and determine its sign on $]0,+\infty[$.
نعرّف الدالة $g(x) = \dfrac{x}{1+x} - x$. ادرس تغيّرات g على المجال $]0,+\infty[$ ، وحدّد إشارتها على $]0,+\infty[$.
3. Deduce the monotonicity of the sequence (U_n). (استنتج رتابة المتتالية (U_n))
4. Conclude that (U_n) is convergent and calculate its limit. (استنتج أن (U_n) متقاربة واحسب نهايتها.)
5. Let $E = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Determine $\inf E$ and show that $\sup E$ is positive.
لتكن $E = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. حدّد $\inf E$ وبين أن $\sup E$ موجب.

Exercise 2: (4 points)

Consider the function defined on $\mathbb{R}$ by: (نعتبر الدالة معرفة في $\mathbb{R}$ بـ)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

1. Is the function f differentiable at $x = 0$? If yes, compute $f'(0)$.
هل الدالة f قابلة للإشتقاق عند $x = 0$ ؟ إذا كان الجواب نعم، احسب $f'(0)$.
2. Study the continuity of the derivative function $f'(x)$ at $x = 0$.
ادرس استمرارية الدالة المشتقة $f'(x)$ عند $x = 0$.

Exercise 3: (4 points)

Consider the following integral: (نعتبر التكامل التالي)

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

1. Find the Taylor series expansion of $\frac{\sin x}{x}$ around $x = 0$ up to the term in x^4.
أوجد سلسلة تايلور للدالة $\frac{\sin x}{x}$ حول النقطة $x = 0$ حتى الحد x^4 .

2. Integrate the series term by term from 0 to 1 and approximate I by giving four decimal places.
كامل السلسلة حدًا بحد من 0 إلى 1 ثم قرّب قيمة I بإعطاء أربعة أرقام عشرية.

Recall: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ (تذكير)

Exercise 4: (4 points)

Find:(أوجد)

$$(1)\frac{d\sin^2(x^2+1)}{dx} \qquad (2)I = \int 2x\sqrt{x^2+3}dx \qquad (3)L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3e^{3x}-5x)}{x}$$

.....**Good luck**
بالتوفيق