الفصل الاول

الأشعــــة

مقدمــــة:

لفهم وتفسير الظواهر الفيزيائية من الضروري ان نتعامل مع: مقادير فيزيائية (الكتلة -الطول -السرعة -الزمن -درجة الحرارة ...) وعلاقات رياضية.

تصنف المقادير الفيزيائية الى ثلاثة اقسام: سلمية (عددية) وشعاعية ومؤثرات.

- **المقادير الفيزيائية السلمية:** هي مقادير فيزيائية يعبر عنها بقيمة عددية واحدة فقط في الوحدة المناسبة. فعندما نقول ان الزمن المستغرق للانتقال من نقطة الى أخرى هو 60s فلا نحتاج الى أي إضافة لان المعنى تحدد تماما. من هذه المقادير نذكر (الكتلة -الطول -الزمن-درجة الحرارة ...). ان العمليات التي تديرها هي العمليات التي تتحكم وتدير الاعداد الحقيقية من جمع وطرح وضرب وتقسيم، فيما يعرف بالحساب أو جبر الاعداد. فمثلا إذا كان لدينا ساقان معدنيان طولهما هو: $L_2 = 5m,\ L_1 = 4m$

فان: $L_2/L_1 = 5/4\,,\ L_2 + L_1 = 5 + 4 = 9m,\ L_2 - L_1 = 5 - 4 = 1m$

- **المقادير الفيزيائية الشعاعية:** نذكر منها السرعة -الحقل الكهربائي-الدفع الخطي ... وهي المقادير الفيزيائية التي يلزم لتحديدها معرفة مقدارها واتجاهها (تحدد بعددين او ثلاثة اعداد). فمثلا يسمح الوصف الشعاعي للحركة بتحديد اتجاه الانتقال والسرعة والتسارع، كما أن طول الشعاع يعبرعن قيمة المقدار الشعاعي المعتبر. والعمليات التي تديرها هي العمليات التي تتحكم وتدير الاشعة.

- المؤثرات: لا نتطرق لموضوع المؤثرات في هذا المقياس.

نعرض في الفقرة الموالية الأشعة، في المستوي وفي الفضاء، والعمليات الممكنة عليها مثل الجمع والطرح والجداء السلمي والجداء الشعاعي.

1.1 تعريف الشعاع:

هو قطعة مستقيمة موجهة يتعين بعددين ويستعمل الرمز $\vec{A}$ للدلالة عليه مقدارا واتجاها.
يرمز لطوله او مقاسه أي القيمة العددية (الطويلة – الشدة) بالرمز: $A = |\vec{A}| = \|\ \vec{A}\ \|$، وهو أحد العددين المحددين له ويتضمن وحدته.

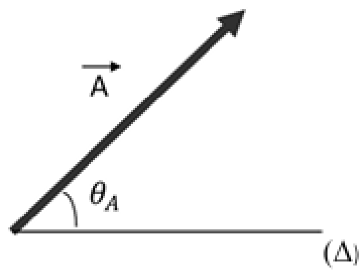
أما العدد الثاني الذي يحدده فهي الزاوية θ_A التي يصنعها هذا الشعاع بعكس جهة دو ا رن عقارب الساعة مع محور مرجعي (Δ) محدد مسبقا وتسمى هذه الزاوية عمدة الشعاع.
وبالتالي فإن الشعاع يتعين بمعرفة كل من طويلته وعمدته.

نحتاج غالبا، عوضا عن تمثيل الشعاع هندسيا الشكل (1.1)، إلى وصف الشعاع عدديا العلاقة (1.1)، ولذلك نصف شعاع ما عدديا بإعطاء قيمتين عدديتين احداهما لطوله والأخرى لعمدته.

يكتب الشعاع هندسيا كالتالي:

$$\vec{A}=(|\vec{A}|,\theta_A)=(A,\,\theta_A) \qquad (1.1)$$

يمثل الشعاع هندسيا كالتالي:



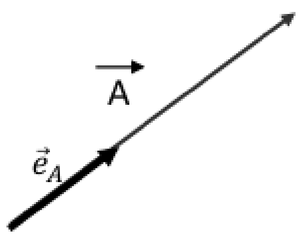
الشكل (1.1): تمثيل الشعاع $\vec{A}$ هندسيا

ملاحظة: الشعاع لا يتغير إذا نقلناه من مكانه شريطة المحافظة على طوليته وعمدته.

1. 2 شعاع الوحدة:

شعاع وحدة الاشعة هو شعاع طويلته تساوي الواحد (بدون وحدة). سوف يرمز له فيما سيأتي بالرمز $\vec{e}$. ان أشعة الوحدة تعين الاتجاهات في الفضاء. يمكن التعبير عن شعاع مواز لشعاع الوحدة بالعلاقة (2.1)، وتمثيلا هندسيا بالشكل (2.1):

$$\vec{A}=|\vec{A}|\,\vec{e}_A= A\,\vec{e}_A \qquad (2.1)$$

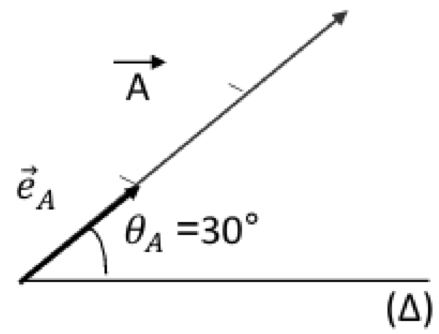


الشكل (2.1): التمثيل الهندسي للشعاع $\vec{A}$ وشعاع وحدته

من العلاقة (2.1)، نلاحظ بان شعاع الوحدة يمكن ان يكتب بالشكل: $\vec{e}_A=\frac{\vec{A}}{A}$

مثال: مثل الشعاع $\vec{A}=(3,30°)$، مع اظهار شعاع الوحدة $\vec{e}_A$ وفقه، ثم اكتب الشكل الهندسي لشعاع الوحدة؟

الحل: الشكل (3.1) يظهر التمثيل البياني للشعاع $\vec{A}$ ووفقه شعاع وحدته $\vec{e}_A$.



الشكل (3.1): الشعاع $\vec{A}$ وشعاع وحدته

الشعاع $\vec{A}$ وفق شعاع الوحدة $\vec{e}_A$ يمكن ان يكتب على الشكل: $\vec{A}=3\,\vec{e}_A$

ملاحظة: الصورة الهندسية للشعاع الوحدة في مثالنا هذا هي:

$$\vec{e}_A=(1,30°)$$

حيث بالنسبة لشعاع الوحدة $|\vec{e}_A|= e_A =1$

3.1 العمليات التي تدير الاشعة:

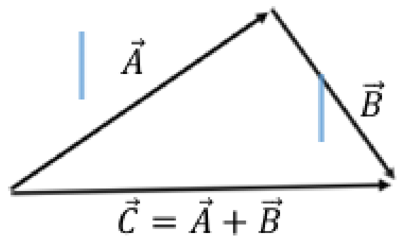
تتطلب الحسابات على الأشعة مجموعة من العمليات، مثل الجمع والطرح الشعاعيين، وضرب شعاع بمقدار سلمي والجداء السلمي والجداء الشعاعي.

4.1 جمع الأشعة:

ليكن الشعاعان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ من جنس واحد نرفق لهما شعاعا $\vec{C}$ بواسطة عملية الجمع الهندسي كالتالي:

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B} \qquad (3.1)$$

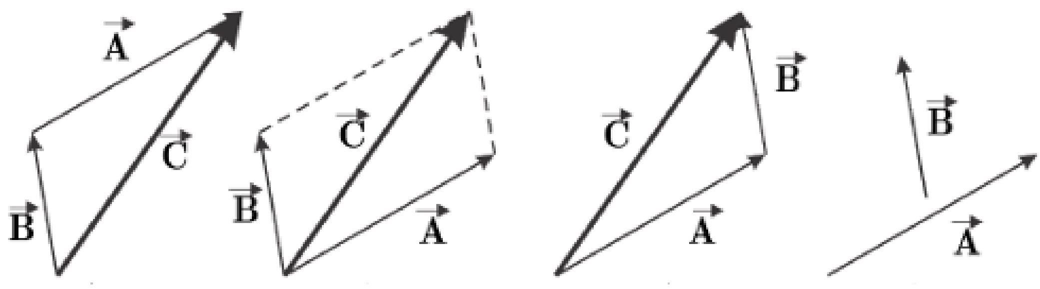
يدعى مجموع شعاعين غالبا بمحصلة هذين الشعاعين، لذا فإن الشعاع $\vec{C}$ هو محصلة الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.



الشكل (4.1):محصلة شعاعين

إن طريقة إجراء الجمع الشعاعي هندسيا تتم على الشكل التالي:

ليكن الشعاعان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كما في الشكل (5.1) نحصل على محصلة هذين الشعاعين بإعادة رسم الشعاع $\vec{B}$ وذلك بوضع بدايتة عند نهاية الشعاع $\vec{A}$ محافظين على طوله واتجاهه دون تغيير، ان المحصلة $\vec{C}$ تبدأ من بداية الشعاع $\vec{A}$ وتنتهي عند نهاية الشعاع $\vec{B}$. يمكننا أيضا الحصول على هذه المحصلة برسم الشعاع $\vec{B}$ انطلاقاً من بداية الشعاع $\vec{A}$ ثم نرسم متوازي الأضلاع الناشئ عن هذين الشعاعين، فتكون المحصلة هي قطر متوازي الأضلاع المنطلق من بدايتي الشعاعين، كما هو موضح على الشكل (5.1).



الشكل (5.1): طريقة إجراء جمع شعاعين هندسيا

عملية الجمع الشعاعي هي عملية تبديلية:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \qquad (4\ .1)$$

نستطيع تعيين الشعاع $\vec{C}$ مباشرة من الشكل بقياس طوله وعمدته بواسطة المسطرة والمنقلة ثم تتم كتابته على الصورة الهندسية بالشكل التالي:

$\vec{C} =| \vec{A} + \vec{B} |$ حيث $\vec{C}=(|\vec{C}|, \theta_c)=(C, \theta_c)$

عندما نريد جمع أكثر من شعاعين معاً، مثلا الجمع الشعاعي لثلاثة أشعة $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ حيث:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \qquad (5.1)$$

في هذه الحالة نقوم برسم الأشعة الثلاثة على التتالي، بحيث تكون بداية كل شعاع عند نهاية الشعاع الذي قبله. ويكون الشعاع المحصلة هو الشعاع الذي تكون بدايته بداية الشعاع الأول ونهايته نهاية الشعاع الأخير. يمكن أيضا ان نقوم بجمع الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ فنحصل على الشعاع $\vec{D}$ ثم نجمع $\vec{D}$ و $\vec{C}$ لنحصل على الشعاع المحصلة $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \overrightarrow{(A + B)} + \vec{C} = \vec{D} + \vec{C} \qquad (6 .1)$$

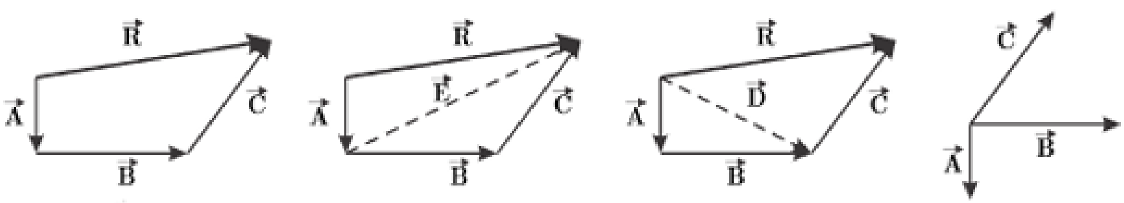
أو

$$\vec{R} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{E} \qquad (7 .1)$$

وهذا يعني أن عملية جمع الأشعة هي عملية تجميعية.

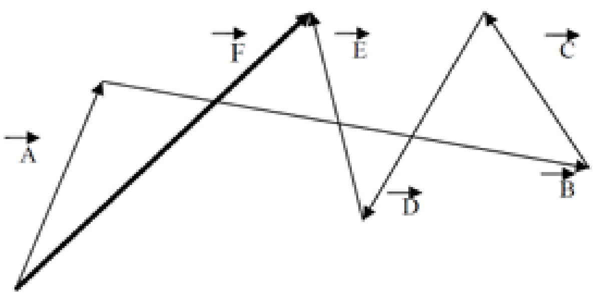
نذكر، بناء على خواص الجمع الهندسي للأشعة، أن عملية جمع الأشعة تؤخذ بأي ترتيب، وفي حالة خاصة، يمكن استبدال أي جزء منها بمحصلته دون أن يتغير الناتج كما يوضح ذلك الشكل (6.1).

الشكل (6.1) يوضح الجمع الشعاعي لثلاثة أشعة $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ بطرق مختلفة.



الشكل (6.1): الجمع الشعاعي لثلاثة أشعة $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ بطرق مختلفة

- جمع عدة أشعة: $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{F} = \vec{F}$



التمثيل الهندسي لجمع عدة أشعة: $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}+\vec{F}=\vec{F}$

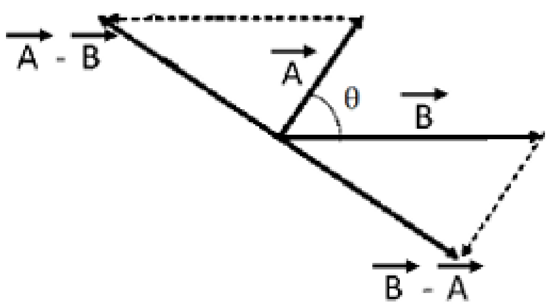
5.1 الفرق بين الأشعة:

ان عملية طرح الاشعة تعتبر حالة خاصة من عملية الجمع لأنه يمكن كتابة:

$$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \qquad (8.1)$$

نعرف عكس الشعاع $\vec{B}$ ونرمز له بالرمز $(-\vec{B})$، بأنه شعاع له طول الشعاع نفسه و يعاكسه في الاتجاه ($\theta_{-B}=\theta_B+180°$, $|\vec{B}|=|-\vec{B}|$).

نعرف الفرق الشعاعي $(\vec{A}-\vec{B})$ بانه محصلة الشعاعين $(\vec{A})$ و$(-\vec{B})$ كما هو موضح في الشكل (1. 7).



الشكل (7.1): يمثل محصلة الشعاعين $(\vec{A})$ و$(-\vec{B})$، $(-\vec{A})$ و$(\vec{B})$.

نلاحظ أنّ عملية طرح الاشعة ليست تبديلية:

$$\vec{A}-\vec{B}\neq\vec{B}-\vec{A} \qquad (9.1)$$

1 . 6 جداء شعاع في مقدار سلمي:

إن حاصل جداء الشعاع غير المعدوم $\vec{A}$ بالعدد الحقيقي n هو شعاع جديد $\vec{B}$ يوازي الشعاع $\vec{A}$.

$$\vec{B}\ //\ \vec{A} \quad ; \quad \vec{B}=n\vec{A}$$

طويلة الشعاع $\vec{B}$ تساوي القيمة المطلقة للعدد n مضروبة بطويلة الشعاع $\vec{A}$.

$$|\vec{B}|=B=|n||\vec{A}|=|n|A \qquad (10.1)$$

اتجاه الشعاع $\vec{B}$ يتعلق بإشارة العدد (n) حيث:

له اتجاه الشعاع $\vec{A}$ نفسه إذا كان العدد n موجباً (n>0)، ويعاكسه بالاتجاه إذا كان العدد n سالباً (n<0) الشكل (1. 8).

1 . 7 الجداء السلمي

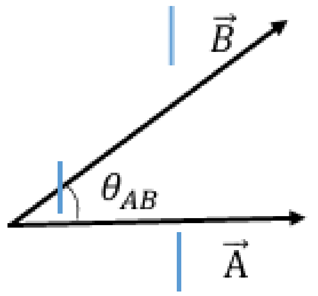
من العمليات التي تدير الأشعة هي عملية الجداء السلمي لشعاعين.

إذا كان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ شعاعين (ليس شرطا ان يكونا من جنس واحد)، فإن الجداء السلمي لهذين الشعاعين الذي يرمز له بالرمز ($\vec{A}.\vec{B}$) هو مقدار سلمي يساوي جداء طويلتيهما مضروبا بجيب تمام الزاوية المحصورة بينهما، أي أن:

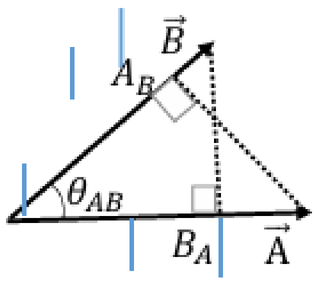
$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|cos\theta_{AB} \qquad (13.1)$$

θ_{AB} أصغر زاوية بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$، حيث ان: $0 < \theta_{AB} < \pi$. الشكل (1. 12)

يمكن النظر للجداء السلمي لشعاعين على أنه ناتج ضرب طول أحدهما بمسقط الآخر عليه الشكل (13.1)، يمكن كتابة الجداء السلمي على أحد الصور المبينة في العلاقة (14.1):



الشكل (1. 12)



الشكل (1. 13)

$$\vec{A}.\vec{B} = A.B.cos\theta_{AB} = A_B.B = A.B_A \qquad (14.1)$$

نسمي المقدار: $B_A = B.cos\theta_{Ab}$ مركبة او مسقط الشعاع $\vec{B}$ وفق الشعاع $\vec{A}$

نسمي المقدار: $A_B = A.cos\theta_{Ab}$ مركبة او مسقط الشعاع $\vec{A}$ وفق الشعاع $\vec{B}$

مثال: عين الجداء السلمي للشعاعين: $\vec{A}(3, 60°)$ و $\vec{B}(2, -10°)$

وكذا مسقط كل منهما على الآخر؟

الحل:

الجداء السلمي للشعاعين بحسب العلاقة (13.1) هو:

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|cos\theta_{AB} = 2x3.\cos(70) = 6x0.342 = 2.052$$

مسقط الشعاع $\vec{A}$ وفق الشعاع $\vec{B}$ يحسب كالتالي:

$$A_B = \mathrm{A.cos}\theta_{Ab} = 3\mathrm{x}0.342 = 1.026$$

مسقط الشعاع $\vec{B}$ وفق الشعاع $\vec{A}$ يحسب كالتالي:

$$B_A = \mathrm{B.cos}\theta_{Ab} = 2\mathrm{x}0.342 = 0.684$$

للجداء السلمي الخواص التالية:

1-الجداء السلمي تبديلي:

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|cos\theta_{AB} = |\vec{B}|.|\vec{A}|\cos(-\theta_{AB}) = \vec{B}.\vec{A} \qquad (15.1)$$

2-الجداء السلمي توزيعي على اليمين واليسار على الجمع الشعاعي، أي إن:

$$\vec{\mathrm{A}}.(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C} \qquad (16.1)$$

$$(\vec{A} + \vec{B}).\vec{C} = \vec{A}.\vec{C} + \vec{B}.\vec{C} \qquad (17.1)$$

3-الجداء السلمي لشعاع ما في نفسه يساوي مربع طول ذلك الشعاع:

$$\vec{A}.\vec{A} = A.A.cos0 = A^2 \qquad (18.1)$$

من هذه العلاقة نستنتج قاعدة لحساب طول الشعاع $\vec{A}$ كالتالي:

$$A = \sqrt{\vec{A}.\vec{A}} \Leftarrow \vec{A}.\vec{A} = A^2 \qquad (19.1)$$

4-ينعدم الجداء السلمي لشعاعين إذا كان أحد الشعاعين شعاعا معدوما أو إذا كان الشعاعان متعامدين:

$$\vec{A}.\vec{B} = A.B.cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad (20.1)$$

ومنه نستنتج القاعدة:

$$\vec{A}.\vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A}\perp\vec{B} \qquad (21.1)$$

ومنه هذه القاعدة مناسبة لاختبار تعامد الاشعة.

5-الجداء السلمي $(\vec{\mathrm{A}}.\vec{e}_A)$ يعبر عن مسقط أو (مركبة) الشعاع $\vec{\mathrm{A}}$ وفق المحور Δ، حيث $\vec{e}_A$ شعاع توجيهه ونكتب:

$$A_{\Delta} = \vec{A}.\ \vec{e}_A = |\vec{A}|.|\ \vec{e}_A|.\cos\theta_{\Delta A} = A\cos\theta_{\Delta A} \qquad (22.1)$$

6-إذا كان الشعاعان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ على استقامة واحدة فإن:

$$\vec{A}.\vec{B} = \pm|\vec{A}|.|\vec{B}| \qquad (23.1)$$

حيث أن الإشارة تكون موجبة إذا كانا بالاتجاه نفسه وتكون سالبة إذا كانا في اتجاهين متعاكسين.

مثال

عين طويلة الشعاع $\vec{C}$ محصلة الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

الحل:

لدينا: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ومنه فان: $|\vec{C}| = |\vec{A} + \vec{B}|$

وبحسب الخاصية الثالثة والثانية فان:

$$|\vec{C}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(\vec{A} + \vec{B}).(\vec{A} + \vec{B})} = \sqrt{\vec{A}.\vec{A} + \vec{B}.\vec{B} + 2\vec{A}.\vec{B}}$$

ومنه:

$$|\vec{C}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta_{AB}}$$

وهي العلاقة المعروفة بعلاقة التجب والتي ذكرت آنفا (11.1).

8 . 1 الجداء الشعاعي

الجداء الشعاعي يمثل مقدارا شعاعيا بعكس الجداء السلمي الذي يمثل مقدارا سلميا. نرمز للجداء الشعاعي للشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالرمز $\vec{A}\wedge\vec{B}$ أو الرمز $\vec{A} \times \vec{B}$، وهو شعاع $\vec{C}$ يعطى بالعلاقة:

$$\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{B} = (AB\sin\theta_{AB})\ \vec{e}_C \qquad (24.1)$$

حيث: $\vec{e}_C$ شعاع الوحدة المحمول على الشعاع $\vec{C}$، و θ_{AB} هي الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$. الشعاع $\vec{C}$ عمودي على المستوي المحدد بالشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ وبحيث تكون الثلاثية الطردية المرتبة ($\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$) مباشرة، الشكل (14.1).

المقصود بالثلاثية الطردية هو ان يكون الانتقال من $\vec{A}$ الى $\vec{B}$ الى $\vec{C}$ بالترتيب من اليمين الى اليسار في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة واتجاه $\vec{C}$ يحدد بقاعدة أصابع اليد اليمنى،

11.1 الجداء الثلاثي (الجداء المختلط):

في عملية الجداء السلمي أو شعاعي يمكن أن يكون أحد الشعاعين هو نفسه جداء شعاعي لشعاعين.

- خاصية الجداء الثلاثي السلمي:

هو بالتعريف الجداء السلمي للشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}\wedge\vec{C}$ ونكتب:

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$$

إذا كان:

$$\vec{A} = A_x.\vec{e}_x + A_y.\vec{e}_y + A_z.\vec{e}_z \qquad \vec{B} = B_x.\vec{e}_x + B_y.\vec{e}_y + B_z.\vec{e}_z$$

$$\vec{C} = C_x.\vec{e}_x + C_y.\vec{e}_y + C_z.\vec{e}_z$$

فان:

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = (A_x.\vec{e}_x + A_y.\vec{e}_y + A_z.\vec{e}_z).\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = A_x\begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} + A_y\begin{vmatrix} B_z & B_x \\ C_z & C_x \end{vmatrix} + A_z\begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

نلاحظ انه إذا تغيرت مواضع الأشعة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ بشكل دائري، أي إذا حل الشعاع $\vec{A}$ محل الشعاع $\vec{B}$ وحل الشعاع $\vec{B}$ محل الشعاع $\vec{C}$ والشعاع $\vec{C}$ محل الشعاع $\vec{A}$ ، فإن قيمة الجداء الثلاثي السلمي لا تتغير. أي أن:

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = \vec{C}.\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \vec{B}.\left(\vec{C}\wedge\vec{A}\right) \qquad (41.1)$$

-خاصية الجداء الثلاثي الشعاعي:

هو بالتعريف الجداء الشعاعي للشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}\wedge\vec{C}$ ونكتب: $\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$

ويكون لدينا:

$$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = (\vec{A}.\vec{C}).\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B}).\vec{C} \qquad (42.1)$$

12.1 التدرج – التباعد – الدوران:

- نقول عن الدالة f(x, y, z) حقلا سلميا اذا كانت الدالة f(x, y, z) سلمية.

- نقول عن الدالة $\vec{V}$(x, y, z) حقلا شعاعيا اذا كانت الدالة $\vec{V}$(x, y, z) شعاعية.

- في الرياضيات، المؤثر نبلا هو دالة تقوم بإنجاز نوع من العمليات على الدوال السلمية أو الشعاعية الأخرى.

يعرف المؤثر الشعاعي التفاضلي نبلا (nabla) والذي يرمز له بالرمز ($\vec{\nabla}$) كالتالي:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad (43.1)$$

($\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$) هي المشتقات الجزئية بالنسبة للموضع.

ا.التدرج: تدرج الدالة السلمية

أن التدرج يؤثر على الحقول السلمية وينتج حقولا شعاعية أي يعبر عن تغيرات الحقل السلمي ، ويكسبه صفة شعاعية تساعد على تحديد جهة تلك التغيرات وأنه تفاضل الدالة بالنسبة للأبعاد الثلاثة (x , y , z) ، فإذا كانت f(x, y, z) دالة سلمية فان تدرجها مقدار شعاعي مركباته مشتقاتها الجزئية وهو معرف كالتالي:

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f = \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (44.1)$$

مثال:

أحسب تدرج الدالة: $f(x, y, z) = 4x^3y^2z$

الحل:

حساب تدرج الدالة باستعمال العلاقة (44.1) فنجد:

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f = 12x^2y^2z.\vec{e}_x + 8x^3yz.\vec{e}_y + 4x^3y^2.\vec{e}_z$$

ب.التباعد: (التفرق)

التباعد أو ما يعرف بالتفرق يؤثر على الحقول الشعاعية وينتج عنه حقول سلمية وهو الجداء السلمي للمؤثر نبلا في دالّة شعاعية قابلة للاشتقاق والصورة التحليلية لتباعد الشعاع هي:

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad (45.1)$$

مثال: أحسب تباعد الشعاع:

$$\vec{V}(\mathrm{x,y,z}) = 3xz\vec{e}_x + 2xy^2z\vec{e}_y + yz\vec{e}_z$$

الحل:

حساب تباعد الشعاع باستعمال العلاقة (45.1) فنجد:

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = 3z + 4xyz + y$$

ج.الدوران:

إذا كان لدينا الشعاع: $\vec{V} = \left(V_x,\ V_y,\ V_z\right)$ فان الصورة التحليلية لدوران هذا الشعاع تعطى بالعلاقة التالية:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \qquad (46.1)$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

مثال:

عين دوران الشعاع:

$$\vec{V}(\mathrm{x,y,z}) = 4xy\vec{e}_x - 6yz^2\vec{e}_y + 18xy^3\vec{e}_z$$

الحل:

لحساب دوران الشعاع نستعمل العلاقة (46.1) فنجد:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = (54xy^2 + 12yz)\vec{e}_x - (18y^3 - 0)\vec{e}_y + (0 - 4x)\vec{e}_z$$

ومنه:

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = (54xy^2 + 12yz)\vec{e}_x - (18y^3)\vec{e}_y + (4x)\vec{e}_z$$