

Examen final
Transfert de chaleur I

Durée : 2 heures

Questions de cours (6 points)

- a) Montrer que le coefficient de frottement pariétal Cf_p donné par la relation

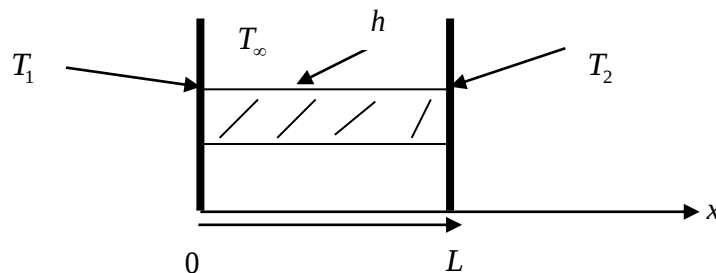
$$\frac{\rho C f_p U_\infty^2}{2\mu} = \left(\frac{\partial V_x(x,y)}{\partial y} \right)_{y=0} \text{ est adimensionnel.}$$

- b) Si un fluide de masse volumique ρ a une vitesse $\vec{V}$ de composantes (V_x, V_y, V_z) , écrire son équation de continuité en coordonnées cartésiennes.
 c) Donner les formules des nombres de Prandtl Pr , de Reynolds Re_L et de Nusselt Nu_L .

Exercice n°1 (7 points)

Un barreau cylindrique de longueur L et de section S est relié à deux murs plans de températures respectives T_1 et T_2 . Ce barreau perd de la chaleur par convection à l'air ambiant de température T_∞ .

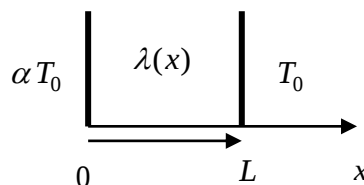
- a) Ecrire l'équation différentielle de la distribution de la température $T(x)$,
 b) Ecrire les conditions aux limites appropriées et
 c) Trouver la distribution de la température $T(x)$.



Exercice n°2 (7 points)

Un mur plan est constitué d'un matériau de conductivité thermique $\lambda(x) = \lambda_m e^{-\frac{x}{L}}$ où λ_m est une constante positive. Si les deux faces du mur sont aux températures αT_0 et T_0 , calculer :

- a) Le flux de chaleur échangé q ,
 b) La température $\frac{T(x)}{T_0}$.
 c) La température T_r à $x = \frac{L}{4}$.
 d) Quelle est la valeur de α , pour que T_r devienne égale à T_0 .



Corrigé type de l'examen final

Questions de cours (6 points)

- a) Comme le coefficient de frottement pariétal est

$$Cf_P = \frac{2\mu}{\rho U_\infty^2} \left(\frac{\partial V_x(x,y)}{\partial y} \right)_{y=0}$$

nous avons

$$[Cf_P] = \frac{[\mu]}{[\rho][U_\infty^2]} \frac{[V_x(x,y)]}{[y]} = \frac{kg.m^1.s^{-1}.ms^{-1}}{kg.m^{-3}.m^2.s^{-2}.m} = 1 \quad \boxed{0,5+0,5+0,5+0,5+0,5}$$

ainsi le coefficient de frottement pariétal est adimensionnel.

- b) L'équation de continuité en régime permanent est

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad \boxed{1.0}$$

soit en coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial(\rho V_x(x,y,z))}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y(x,y,z))}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z(x,y,z))}{\partial z} = 0 \quad \boxed{1.0}$$

- c) Le nombre de Prandtl Pr

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \quad \boxed{0.5}$$

Le nombre de Reynolds Re_L

$$Re_L = \frac{\rho U_\infty L_C}{\mu} \quad \boxed{0.5}$$

Le nombre de Nusselt Nu_L

$$Nu_L = \frac{h L_C}{\lambda} \quad \boxed{0.5}$$

Exercice n°1 (7 points)

Ce pont thermique obéit à l'équation d'une ailette, à savoir

$$\frac{d^2(T(x) - T_\infty)}{dx^2} - m^2(T(x) - T_\infty) = 0 \quad \boxed{0.5}$$

$$m^2 = \frac{hP}{\lambda S} \quad \boxed{0.5}$$

Avec les conditions aux limites

$$x = 0, T = T_1 \quad \boxed{0.5}$$

$$x = L, T = T_2 \quad \boxed{0.5}$$

La solution de l'équation de l'aillette est

$$T(x) - T_\infty = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad \boxed{0.5}$$

A partir des conditions aux limites

$$T_1 - T_\infty = C_1 e^0 + C_2 e^{-0}$$

$$T_2 - T_\infty = C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}$$

nous obtenons le système d'équations

$$C_1 + C_2 = T_1 - T_\infty$$

$$C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} = T_2 - T_\infty$$

qui nous permet de calculer les constantes d'intégration C_1 et C_2 , soient

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} T_1 - T_\infty & 1 \\ T_2 - T_\infty & e^{-mL} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{mL} & e^{-mL} \end{vmatrix}} = \frac{(T_1 - T_\infty)e^{-mL} - (T_2 - T_\infty)}{e^{-mL} - e^{mL}} \quad 0.25$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & T_1 - T_\infty \\ e^{mL} & T_2 - T_\infty \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{mL} & e^{-mL} \end{vmatrix}} = \frac{(T_2 - T_\infty) - (T_1 - T_\infty)e^{mL}}{e^{-mL} - e^{mL}} \quad 0.25$$

d'où

$$T(x) - T_\infty = \frac{(T_1 - T_\infty)e^{-mL} - (T_2 - T_\infty)}{e^{-mL} - e^{mL}} e^{mx} + \frac{(T_2 - T_\infty) - (T_1 - T_\infty)e^{mL}}{e^{-mL} - e^{mL}} e^{-mx} \quad 0.5$$

avec certaines manipulations

$$T(x) - T_\infty = \frac{(T_1 - T_\infty)e^{-mL}e^{mx} - (T_2 - T_\infty)e^{mx} + (T_2 - T_\infty)e^{-mx} - (T_1 - T_\infty)e^{mL}e^{-mx}}{e^{-mL} - e^{mL}}$$

$$T(x) - T_\infty = \frac{(T_1 - T_\infty)[e^{-mL}e^{mx} - e^{mL}e^{-mx}] - (T_2 - T_\infty)[e^{mx} - e^{-mx}]}{e^{-mL} - e^{mL}}$$

$$T(x) - T_\infty = \frac{(T_1 - T_\infty)(e^{m(x-L)} - e^{-m(x-L)}) - (T_2 - T_\infty)[e^{mx} - e^{-mx}]}{e^{-mL} - e^{mL}} \quad 0.5$$

$$T(x) - T_\infty = \frac{2(T_1 - T_\infty)\sinh m(x-L) - 2(T_2 - T_\infty)\sinh mx}{-2\sinh mL} \quad 1.0$$

Nous obtenons

$$T(x) - T_\infty = \frac{(T_2 - T_\infty)\sinh mx - (T_1 - T_\infty)\sinh m(x-L)}{\sinh mL} \quad 1.0$$

Exercice n°2 (7 points)

Un mur plan est constitué d'un matériau de conductivité thermique $\lambda(x) = \lambda_m e^{-\frac{x}{L}}$

a) Le flux de chaleur échangé q :

$$q = -\lambda(x) \frac{dT(x)}{dx} = -\lambda_m e^{-\frac{x}{L}} \frac{dT(x)}{dx} \quad 1.0$$

$$\frac{q}{\lambda_m} e^{\frac{x}{L}} dx = -dT(x)$$

$$\frac{q}{\lambda_m} \int_0^L e^{\frac{x}{L}} dx = - \int_{\alpha T_0}^{T_0} dT(x) = \int_{T_0}^{\alpha T_0} dT(x) \text{ soit } \frac{qL}{\lambda_m} \left[e^{\frac{x}{L}} \right]_0^L = [T(x)]_{T_0}^{\alpha T_0} \quad 1,0$$

d'où

$$\frac{qL}{\lambda_m} (e-1) = (\alpha-1)T_0$$

$$q = \frac{(\alpha-1)\lambda_m T_0}{(e-1)L} \quad 1,0$$

b) La température $T(x)$:

$$\frac{q}{\lambda_m} \int_0^x e^{\frac{x}{L}} dx = \int_{T(x)}^{\alpha T_0} dT(x) \quad 1,0$$

$$\frac{qL}{\lambda_m} \left[e^{\frac{x}{L}} \right]_0^x = [T(x)]_{T(x)}^{\alpha T_0}$$

$$T(x) = \left(\alpha - \frac{(\alpha-1)\left(e^{\frac{x}{L}} - 1\right)}{(e-1)} \right) T_0 \quad 1,0$$

c) La température du mur T_r à $x = \frac{L}{4}$:

$$T_r = \left(\alpha - \frac{(\alpha-1)\left(e^{\frac{1}{4}} - 1\right)}{(e-1)} \right) T_0 \quad 1,0$$

d) La valeur de α , pour que T_r devienne égale à T_0 :

Pour cela il suffit d'écrire

$$\frac{T_r}{T_0} = 1 \quad 0,5$$

d'où nous obtenons la relation

$$\alpha - \frac{(\alpha-1)\left(e^{\frac{1}{4}} - 1\right)}{e-1} = 1$$

soit

$$\alpha = \frac{e^{\frac{1}{4}} - 1}{e^{\frac{1}{4}} - e} \quad 0,5$$